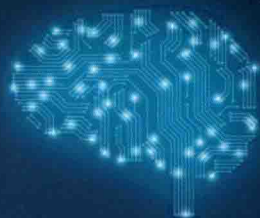


焦李成 赵进 杨淑媛 刘芳 著

# 深度学习、优化与识别



Deep Learning,  
Optimization  
and Recognition

清华大学出版社



焦李成 赵进 杨淑媛 刘芳 著

# 深度学习、优化与识别

Deep Learning, Optimization and Recognition

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

深度神经网络是近年来受到广泛关注的研究方向,它已成为人工智能 2.0 的主要组成部分。本书系统地论述了深度神经网络的基本理论、算法及应用。全书共 16 章,分为两个部分:第一部分(第 1 章~10 章)系统论述理论及算法,包括深度前馈神经网络、深度卷积神经网络、深度堆栈神经网络、深度递归神经网络、深度生成网络、深度融合网络等;第二部分(第 11 章~15 章)论述常用的深度学习平台,以及在高光谱图像、自然图像、SAR 与极化 SAR 影像等领域的应用;第 16 章为总结与展望,给出了深度学习发展的历史图、前沿方向及最新进展。每章都附有相关阅读材料及仿真代码,以便有兴趣的读者进一步钻研探索。

本书可为高等院校计算机科学、电子科学与技术、信息科学、控制科学与工程、人工智能等领域的研究人员提供参考,以及作为相关专业本科生及研究生教学参考书,同时可供深度学习及其应用感兴趣的研究人员和工程技术人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。  
版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

深度学习、优化与识别/焦李成等著. —北京:清华大学出版社,2017(2017.7重印)  
ISBN 978-7-302-47367-1

I. ①深… II. ①焦… III. ①人工神经网络—研究 IV. ①TP183

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 097460 号

责任编辑:王 芳 薛 阳  
封面设计:常雪影  
责任校对:李建庄  
责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:三河市铭诚印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:186mm×240mm 印 张:25.75 字 数:624 千字

版 次:2017 年 7 月第 1 版 印 次:2017 年 7 月第 3 次印刷

印 数:6001~11000

定 价:128.00 元

产品编号:075883-01

Preface..

# 序

Preface..

从 1308 年加泰罗尼亚诗人、神学家雷蒙·卢尔(Ramon Llull)发表了有关用机械方法从一系列现象中创造新知识的论文开始,到 1943 年美国心理学家 W. S. McCulloch 和数学家 W. Pitts 提出 MP 模型及 1950 年 A. Turing 提出著名的图灵测试,再到 1956 年达特茅斯会议上人工智能的诞生,神经网络几经沉浮,走过了艰难曲折的历程;2006 年从单隐层神经网络到深度神经网络模型,迎来了神经网络发展的又一高潮,深度学习及其应用受到了前所未有的重视与关注,世界迎来又一轮人工智能变革的高潮,从谷歌脑到中国脑科学计划,再到互联网+和中国人工智能 2.0,人工智能及深度学习也首次写进了 2017 年全国人民代表大会第十五次会议国务院政府工作报告。深度学习是人工智能及机器学习的一个重要方向,在未来,它将会不断出现激动人心的理论进展和方法实践,深刻影响我们生活的方方面面。

随着研究的不断深入,深度学习已经超越了目前机器学习模型的神经科学观点,学习多层次组合的这一设计原则更加吸引人。从第一代的深度前馈神经网络开始,随之而来的就有如下三个问题:一是可用训练数据量远小于模型中的参数量,容易出现过(欠)拟合现象;二是随着层级的增加,模型的优化目标函数呈现高度非凸性,由于待优化参数所在的可行域中存在着大量的鞍点和局部极小值点,所以参数初始化策略影响着网络模型的稳定性和收敛性;三是基于误差的反向传播算法越靠近输出层变化越大,越靠近输入层变化越小,这对通过梯度下降方式来实现逐层参数更新会导致梯度弥散现象。为了解决第一个问题便提出了深度卷积神经网络和深度循环神经网络,其核心均是通过约减参数量间接提升数据量的方式降低过拟合现象的发生;针对第二个问题和第三个问题便引入了基于自编码器的逐层初始化策略,以期获取的初始化参数能够避免过早地陷入局部最优,同时弱化或克服梯度弥散现象,例如基于受限波尔兹曼机的深度置信网络。进一步,基于传统的机器学习算法来实

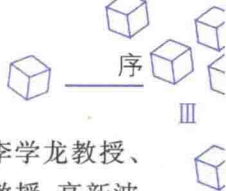


现参数初始化方向上涌现了如深度 PCA 网络、深度 ICA 网络、深度 SVM 网络、深度森林（随机森林多层级联）、深度极限学习机和深度 ADMM 网络等模型。同时与之类似的，通过更改非线性函数以换取模型“扭曲”能力的提升，产生了如深度小波网络、深度脊波网络和深度轮廓波网络等模型。根据其特性，我们称这些网络为深度融合网络。2014 年以来，大量的研究文献表明层级“深度”的不断增加，或导致性能显著提升（如深度残差网络、深度分形网络），抑或导致性能严重下降（本质上是参数量远大于训练数据量）。为了解决该问题，一方面通过多通路、并行化的网络设计来削弱“深度”对性能的依赖性，同时塔式结构、对称性等也被融入网络的设计过程中；另一方面，深度生成模型也悄然兴起，其核心是通过生成训练数据集的概率密度函数来实现数据的扩充，其代表便是生成式对抗网络和变分自编码器。值得注意的是，与传统的深度学习设计“单网络”不同，生成式对抗网络采用了“两个子网络”来实现非合作状态下的博弈，在最小最大值定理的保证下，理论上可以保证网络的收敛性。除了模型结构和优化策略改进外，应用问题背景也不再是经典的输入输出“单数据对”刻画，而是从状态到行动“整体性”刻画。众所周知，感知、认知和决策是衡量智能化的标准，充分发挥深度学习的感知能力和强化学习的决策能力，形成的深度强化学习已在众多应用问题上取得突破，如无人驾驶、计算机围棋程序和智能机器人等。在后深度学习时代，其核心在于生成数据、环境交互和领域迁移，对应着深度生成网络、深度强化学习和深度迁移学习将继续成为人工智能领域的研究热点。另外，根据数据的属性和操作的有效性，衍生的网络包括深度复数域神经网络（如深度复卷积神经网络）、深度二值神经网络和深度脉冲神经网络等。

我们依托智能感知与图像理解教育部重点实验室、智能感知与计算国际联合实验室及智能感知与计算国际联合研究中心于 2014 年成立了类脑计算与深度学习研究中心，致力于类脑计算与深度学习的基础与应用研究，搭建了多个深度学习应用平台，并在深度学习理论、应用及实现等方面取得了突破性的进展，本书即是我们在该领域研究工作的初步总结。

本书的完成离不开团队多位老师和研究生的支持与帮助，感谢团队中侯彪、刘静、公茂果、王爽、张向荣、吴建设、缙水平、尚荣华、刘波、刘若辰等教授以及马晶晶、马文萍、白静、朱虎明、田小林、张小华、曹向海等副教授对本工作的关心支持与辛勤付出。感谢王蓉芳博士、冯捷博士、张丹老师，以及唐旭、刘芳、谢雯、任博、魏野、王善峰、冯志玺等博士生在学术交流过程中无私的付出与生活上的关心。同时，特别感谢赵佳琦、刘旭、赵暉、朱浩、孙其功、任仲乐、李娟飞、张雅科、宋玮、张文华等博士生，以及马丽媛、杨争艳、张婷、李晰、孟繁荣、汶茂宁、侯瑶琪、孙莹莹、张佳琪、杨慧、王美玲等研究生在写作过程中无私付出的辛勤劳动与努力。感谢宋玮、张文华等博士生帮忙校勘时发现了许多笔误。

本书是我们团队在该领域工作的一个小结，也汇聚了西安电子科技大学智能感知与图像理解教育部重点实验室、智能感知与计算国际联合实验室及智能感知与计算国际联合研究中心的集体智慧。在本书出版之际，特别感谢邱关源先生及保铮院士三十多年来的悉心培养与教导，特别感谢徐宗本院士、张钹院士、李衍达院士、郭爱克院士、郑南宁院士、谭铁牛院士、马远良院士、包为民院士、郝跃院士、陈国良院士、韩崇昭教授，IEEE Fellows 管晓宏



教授、张青富教授、张军教授、姚新教授、刘德荣教授、金耀初教授、周志华教授、李学龙教授、吴枫教授、田捷教授、屈嵘教授、李军教授和张艳宁教授,以及马西奎教授、潘泉教授、高新波教授、石光明教授、李小平教授、陈莉教授、王磊教授等多年来的关怀、帮助与指导,感谢教育部创新团队和国家“111”创新引智基地的支持;同时,我们的工作也得到西安电子科技大学领导及国家“973”计划(2013CB329402)、国家自然科学基金(61573267, 61472306, 61671305, 61573267, 61473215, 61571342, 61572383, 61501353, 61502369, 61271302, 61272282, 61202176)、重大专项计划(91438201, 91438103)等科研任务的支持,特此感谢。同时特别感谢清华大学出版社的大力支持和帮助,感谢王芳老师和薛阳老师付出的辛勤劳动与努力。感谢书中所有被引用文献的作者。

20世纪90年代初我们出版了《神经网络系统理论》《神经网络计算》《神经网络的应用与实现》等系列专著,三十年来神经网络取得了长足的进展,本书的取材和安排完全是作者的偏好,由于水平有限,书中不妥之处恳请广大读者批评指正。

著者

2017年3月

西安电子科技大学

Contents..

# 目录

Contents..

<b>第 1 章 深度学习基础</b> .....	1
1.1 数学基础 .....	2
1.1.1 矩阵论.....	2
1.1.2 概率论.....	3
1.1.3 优化分析.....	5
1.1.4 框架分析.....	6
1.2 稀疏表示 .....	8
1.2.1 稀疏表示初步.....	8
1.2.2 稀疏模型 .....	20
1.2.3 稀疏认知学习、计算与识别的范式.....	24
1.3 机器学习与神经网络.....	31
1.3.1 机器学习 .....	31
1.3.2 神经网络 .....	36
参考文献 .....	38
<b>第 2 章 深度前馈神经网络</b> .....	41
2.1 神经元的生物机理.....	42
2.1.1 生物机理 .....	42
2.1.2 单隐层前馈神经网络 .....	43
2.2 多隐层前馈神经网络.....	45



2.3	反向传播算法	47
2.4	深度前馈神经网络的学习范式	48
	参考文献	51
<b>第3章</b>	<b>深度卷积神经网络</b>	<b>54</b>
3.1	卷积神经网络的生物机理及数学刻画	55
3.1.1	生物机理	55
3.1.2	卷积流的数学刻画	56
3.2	深度卷积神经网络	61
3.2.1	典型网络模型与框架	61
3.2.2	学习算法及训练策略	69
3.2.3	模型的优缺点分析	71
3.3	深度反卷积神经网络	73
3.3.1	卷积稀疏编码	73
3.3.2	深度反卷积神经网络	75
3.3.3	网络模型的性能分析与应用举例	77
3.4	全卷积神经网络	77
3.4.1	网络模型的数学刻画	77
3.4.2	网络模型的性能分析及应用举例	79
	参考文献	80
<b>第4章</b>	<b>深度堆栈自编码网络</b>	<b>83</b>
4.1	自编码网络	84
4.1.1	逐层学习策略	84
4.1.2	自编码网络	84
4.1.3	自编码网络的常见范式	87
4.2	深度堆栈网络	90
4.3	深度置信网络/深度玻尔兹曼机网络	93
4.3.1	玻尔兹曼机/受限玻尔兹曼机	93
4.3.2	深度玻尔兹曼机/深度置信网络	94
	参考文献	96
<b>第5章</b>	<b>稀疏深度神经网络</b>	<b>99</b>
5.1	稀疏性的生物机理	100
5.1.1	生物视觉机理	100
5.1.2	稀疏性响应与数学物理描述	102

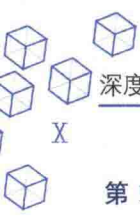


5.2	稀疏深度网络模型及基本性质 .....	102
5.2.1	数据的稀疏性 .....	103
5.2.2	稀疏正则 .....	103
5.2.3	稀疏连接 .....	104
5.2.4	稀疏分类器设计 .....	106
5.2.5	深度学习中关于稀疏的技巧与策略 .....	108
5.3	网络模型的性能分析 .....	110
5.3.1	稀疏性对深度学习的影响 .....	110
5.3.2	对比试验及结果分析 .....	110
	参考文献 .....	111
<b>第 6 章</b>	<b>深度融合网络</b> .....	<b>113</b>
6.1	深度 SVM 网络 .....	114
6.1.1	从神经网络到 SVM .....	114
6.1.2	网络模型的结构 .....	115
6.1.3	训练技巧 .....	117
6.2	深度 PCA 网络 .....	117
6.3	深度 ADMM 网络 .....	119
6.4	深度极限学习机 .....	121
6.4.1	极限学习机 .....	121
6.4.2	深度极限学习机 .....	123
6.5	深度多尺度几何网络 .....	125
6.5.1	深度脊波网络 .....	126
6.5.2	深度轮廓波网络 .....	127
6.6	深度森林 .....	130
6.6.1	多分辨特性融合 .....	131
6.6.2	级联特征深度处理 .....	131
	参考文献 .....	133
<b>第 7 章</b>	<b>深度生成网络</b> .....	<b>136</b>
7.1	生成式对抗网络的基本原理 .....	137
7.1.1	网络模型的动机 .....	137
7.1.2	网络模型的数学物理描述 .....	139
7.2	深度卷积对抗生成网络 .....	141
7.2.1	网络模型的基本结构 .....	141
7.2.2	网络模型的性能分析 .....	144



7.2.3	网络模型的典型应用	146
7.3	深度生成网络模型的新范式	151
7.3.1	生成式对抗网络的新范式	151
7.3.2	网络框架的性能分析与改进	154
7.4	应用驱动下的两种新生成式对抗网络	155
7.4.1	堆栈生成式对抗网络	155
7.4.2	对偶学习范式下的生成式对抗网络	158
7.5	变分自编码器	160
	参考文献	162
<b>第8章</b>	<b>深度复卷积神经网络与深度二值神经网络</b>	<b>167</b>
8.1	深度复卷积神经网络	168
8.1.1	网络模型构造的动机	168
8.1.2	网络模型的数学物理描述	168
8.2	深度二值神经网络	172
8.2.1	网络基本结构	172
8.2.2	网络的数学物理描述	173
8.2.3	讨论	176
	参考文献	177
<b>第9章</b>	<b>深度循环和递归神经网络</b>	<b>180</b>
9.1	深度循环神经网络	181
9.1.1	循环神经网络的生物机理	181
9.1.2	简单的循环神经网络	181
9.1.3	深度循环神经网络的数学物理描述	183
9.2	深度递归神经网络	188
9.2.1	简单的递归神经网络	188
9.2.2	深度递归神经网络的优势	189
9.3	长短时记忆神经网络	190
9.3.1	改进动机分析	190
9.3.2	长短时记忆神经网络的数学分析	191
9.4	典型应用	192
9.4.1	深度循环神经网络的应用举例	193
9.4.2	深度递归神经网络的应用举例	194
	参考文献	194

<b>第 10 章 深度强化学习</b> .....	197
10.1 深度强化学习简介 .....	198
10.1.1 深度强化学习的基本思路 .....	198
10.1.2 发展历程 .....	198
10.1.3 应用新方向 .....	200
10.2 深度 Q 网络 .....	201
10.2.1 网络基本模型与框架 .....	201
10.2.2 深度 Q 网络的数学分析 .....	202
10.3 应用举例——AlphaGo .....	204
10.3.1 AlphaGo 原理分析 .....	205
10.3.2 深度强化学习性能分析 .....	206
参考文献 .....	207
<b>第 11 章 深度学习软件仿真平台及开发环境</b> .....	209
11.1 Caffe 平台 .....	210
11.1.1 Caffe 平台开发环境 .....	210
11.1.2 AlexNet 神经网络学习 .....	210
11.1.3 AlexNet 神经网络应用于图像分类 .....	212
11.2 TensorFlow 平台 .....	215
11.2.1 TensorFlow 平台开发环境 .....	215
11.2.2 深度卷积生成式对抗网 DCGAN .....	216
11.2.3 DAN 应用于样本扩充 .....	217
11.3 MXNet 平台 .....	220
11.3.1 MXNet 平台开发环境 .....	220
11.3.2 VGG-NET 深度神经网络学习 .....	222
11.3.3 图像分类应用任务 .....	225
11.4 Torch 7 平台 .....	226
11.4.1 Torch 7 平台开发环境 .....	226
11.4.2 二值神经网络 .....	227
11.4.3 二值神经网络应用于图像分类 .....	229
11.5 Theano 平台 .....	233
11.5.1 Theano 平台开发环境 .....	233
11.5.2 递归神经网络 .....	234
11.5.3 LSTM 应用于情感分类任务 .....	237
参考文献 .....	238

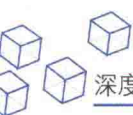


<b>第 12 章 基于深度神经网络的 SAR/PolSAR 影像地物分类</b> .....	240
12.1 数据集及研究目的 .....	241
12.1.1 数据集特性分析 .....	241
12.1.2 基本数据集 .....	244
12.1.3 研究目的 .....	247
12.2 基于深度神经网络的 SAR 影像地物分类 .....	251
12.2.1 基于自适应自编码和超像素的 SAR 图像分类 .....	251
12.2.2 基于卷积中层特征学习的 SAR 图像分类 .....	257
12.3 基于第一代深度神经网络的 PolSAR 影像地物分类 .....	263
12.3.1 基于稀疏极化 DBN 的极化 SAR 地物分类 .....	263
12.3.2 基于深度 PCA 网络的极化 SAR 影像地物分类 .....	267
12.4 基于第二代深度神经网络的 PolSAR 影像地物分类 .....	271
12.4.1 基于深度复卷积网络的 PolSAR 影像地物分类 .....	271
12.4.2 基于生成式对抗网的 PolSAR 影像地物分类 .....	274
12.4.3 基于深度残差网络的 PolSAR 影像地物分类 .....	278
参考文献 .....	280
<b>第 13 章 基于深度神经网络的 SAR 影像的变化检测</b> .....	284
13.1 数据集特点及研究目的 .....	285
13.1.1 研究目的 .....	285
13.1.2 数据基本特性 .....	288
13.1.3 典型数据集 .....	291
13.2 基于深度学习和 SIFT 特征的 SAR 图像变化检测 .....	293
13.2.1 基本方法与实现策略 .....	294
13.2.2 对比试验结果分析 .....	295
13.3 基于 SAE 的 SAR 图像变化检测 .....	299
13.3.1 基本方法与实现策略 .....	299
13.3.2 实验结果和分析 .....	303
13.4 基于 CNN 的 SAR 图像变化检测 .....	305
13.4.1 基本方法与实现策略 .....	305
13.4.2 对比试验结果分析 .....	307
参考文献 .....	309
<b>第 14 章 基于深度神经网络的高光谱图像分类与压缩</b> .....	311
14.1 数据集及研究目的 .....	312



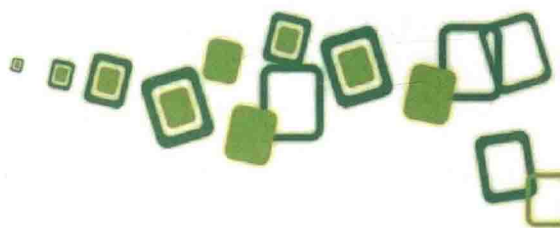
14.1.1	高光谱遥感技术 .....	312
14.1.2	高光谱遥感的研究目的 .....	313
14.1.3	常用的高光谱数据集 .....	314
14.2	基于深度神经网络的高光谱影像的分类 .....	318
14.2.1	基于堆栈自编码的高光谱影像的分类 .....	319
14.2.2	基于卷积神经网络的高光谱影像的分类 .....	325
14.3	基于深度神经网络的高光谱影像的压缩 .....	333
14.3.1	基于深度自编码网络的高光谱图像压缩方法 .....	334
14.3.2	实验设计及分类结果 .....	336
	参考文献 .....	338
<b>第 15 章</b>	<b>基于深度神经网络的目标检测与识别</b> .....	<b>340</b>
15.1	数据特性及研究目的 .....	341
15.1.1	研究目的 .....	341
15.1.2	常用数据集 .....	343
15.2	基于快速 CNN 的目标检测与识别 .....	345
15.2.1	R-CNN .....	346
15.2.2	Fast R-CNN .....	348
15.2.3	Faster R-CNN .....	349
15.2.4	对比实验结果与分析 .....	352
15.3	基于回归学习的目标检测与识别 .....	353
15.3.1	YOLO .....	353
15.3.2	SSD .....	356
15.3.3	对比实验结果与分析 .....	359
15.4	基于学习搜索的目标检测与识别 .....	360
15.4.1	基于深度学习的主动目标定位 .....	360
15.4.2	AttentionNet .....	363
15.4.3	对比实验结果与分析 .....	365
	参考文献 .....	366
<b>第 16 章</b>	<b>总结与展望</b> .....	<b>368</b>
16.1	深度学习发展历史图 .....	369
16.1.1	从机器学习、稀疏表示学习到深度学习 .....	369
16.1.2	深度学习、计算与认知的范式演进 .....	370
16.1.3	深度学习形成脉络 .....	371
16.2	深度学习的应用介绍 .....	375





16.2.1	目标检测与识别 .....	375
16.2.2	超分辨 .....	376
16.2.3	自然语言处理 .....	376
16.3	深度神经网络的可塑性 .....	377
16.3.1	旋转不变性 .....	377
16.3.2	平移不变性 .....	378
16.3.3	多尺度、多分辨和多通路特性 .....	378
16.3.4	稀疏性 .....	379
16.4	基于脑启发式的深度学习前沿方向 .....	380
16.4.1	生物神经领域关于认知、识别、注意等的最新研究进展 .....	380
16.4.2	深度神经网络的进一步研究方向 .....	382
16.4.3	深度学习的可拓展性 .....	383
	参考文献 .....	383
附录 A	基于深度学习的常见任务处理介绍 .....	386
附录 B	代码介绍 .....	393

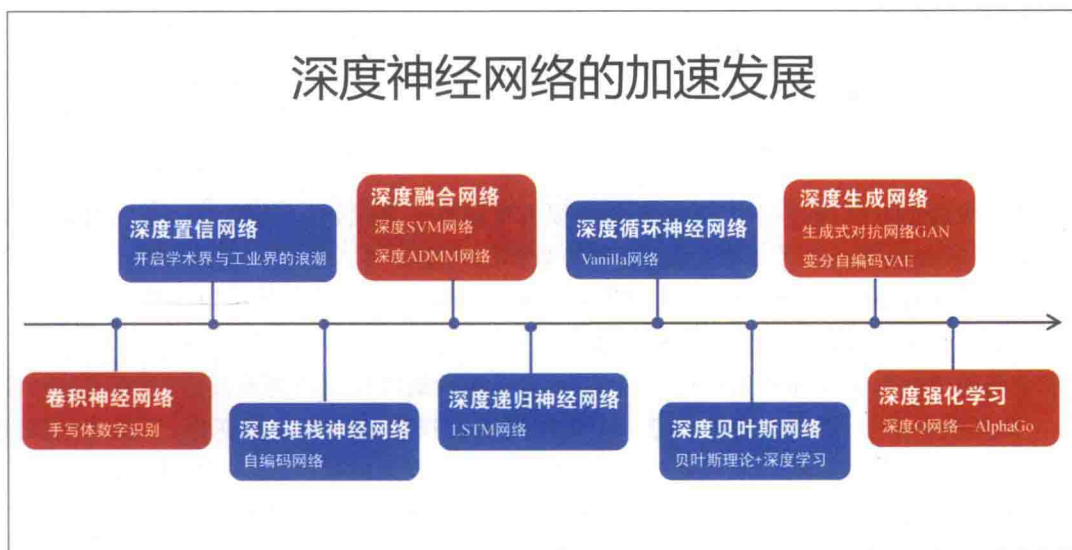
# 第1章



## 深度学习基础

### CHAPTER 1

### 深度神经网络的加速发展



## 1.1 数学基础

### 1.1.1 矩阵论

在实数域上,大小为  $n \times m$  矩阵的集合可以表示为:

$$\mathbf{M}(\mathbb{R}^{n \times m}) = \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}\} \quad (1.1)$$

因此,  $(\mathbf{M}(\mathbb{R}^{n \times m}), \mathbb{R})$  可作为线性空间。为了刻画该空间中矩阵与矩阵之间的关系,则需要定义距离,如  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^{n \times m})$ , 它们的距离  $\text{distance}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  满足非负性,对称性和三角不等式性。通常,可以通过定义范数的形式来诱导距离,常用的范数有:  $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^{n \times m})$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^n |A_{i,1}|, \sum_{i=1}^n |A_{i,2}|, \dots, \sum_{i=1}^n |A_{i,m}|\right\} \quad (1.2)$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \mathbf{A} \text{ 的最大奇异值} \quad (1.3)$$

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A_{i,j})^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^m |A_{1,j}|, \sum_{j=1}^m |A_{2,j}|, \dots, \sum_{j=1}^m |A_{n,j}|\right\} \quad (1.5)$$

$$\|\mathbf{A}\|_{1,2} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (A_{i,j})^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

$$\|\mathbf{A}\|_{2,1} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |A_{i,j}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

在实际的信号处理过程中,无论是构建损失项还是正则项,每一种范数都有其特定的物理意义,反映着数据的分布类型,或者蕴含着数据的先验特性。

由于在线性空间  $(\mathbf{M}(\mathbb{R}^{n \times m}), \mathbb{R})$  上通过范数诱导得到距离,所以便可以衡量其中任意两个矩阵的临近关系,即邻域特性,根据这种邻域特性,便可以将线性空间进行剖分,当然剖分的子空间的个数取决于邻域的半径。通常,称具有距离的线性空间为距离空间(赋范线性空间)。在机器学习中,该空间中的任意一个矩阵都可以视为是一种线性变换,当然非线性变换可以通过线性变换的逼近来得到,逼近的程度取决于范数的选取以及邻域半径的定义。

矩阵的导数的求解通常在机器学习中较为常用,如参数更新时所依赖的梯度的计算等。假设对于输入信号  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  与输出信号  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  之间存在着线性映射关系,即

$$f(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \approx \mathbf{y} \quad (1.8)$$

其中  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  为“投影”矩阵,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  为偏置项。通常利用  $L_2$  范数来定义损失函数,即

$$\text{Loss}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (1.9)$$

其中待学习的参数为  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 。由于损失项的形式是凸函数,所以损失项关于参数的偏导数



可以通过如下的公式求解：

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{Loss}}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}^T \\ \frac{\partial \text{Loss}}{\partial \mathbf{b}} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{y}) \end{cases} \quad (1.10)$$

进一步,对于参数的求解可以通过迭代更新来实现,即给定初始 $(\mathbf{A}^{(0)}, \mathbf{b}^{(0)})$ 及学习速率 $\alpha$ ,通过下面的迭代公式进行更新:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)} - \alpha \cdot \frac{\partial \text{Loss}}{\partial \mathbf{A}} \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}^{(k-1)}} \\ \mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k-1)} - \alpha \cdot \frac{\partial \text{Loss}}{\partial \mathbf{b}} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(k-1)}} \end{cases} \quad (1.11)$$

直至 $(\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{b}^{(k)})$ 收敛为止或者满足迭代终止条件。

另外,为了防止过拟合现象,通常会用富比尼斯范数约束“投影”矩阵作为正则项,即 $\|\mathbf{A}\|_F^2$ ,它的导数为:

$$\frac{\partial \|\mathbf{A}\|_F^2}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A} \quad (1.12)$$

**注意:**这里的过拟合现象是指数据样本量相比参数量而言较多,导致训练得到的模型十分依赖于该数据集,使得该模型的测试性能或者预测性能比较差,即在另一数据集上的表现较差(需要说明的是这两个数据集的分布方式相同)。

矩阵的奇异值分解是指,对于任意一个矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,都有如下的表达式:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \\ \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{I}_m \end{cases} \quad (1.13)$$

其中, $\mathbf{\Sigma}$ 为对角矩阵,且 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 。在机器学习中,主成分分析使用到了矩阵的奇异值分解,通过奇异值的排序和信息利用率达到85%以上的准则确定主成分的个数;通常,主成分分析是一种线性的降维方法。使用矩阵的奇异值分解的核心是逼近的思想,可以通过调整对角矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 中的值,实现对矩阵 $\mathbf{A}$ 的刻画,这样既可以有效地对数据进行泛化,又可以达到降维、进而实现减少计算量的目的。

## 1.1.2 概率论

在机器学习的领域中,经常使用后验概率来实现执果索因的目的,常用的公式表述为:

$$\begin{cases} P(X | Y) = \frac{P(Y | X)P(X)}{\sum_X P(Y | X)P(X)} \\ P(Y) = \sum_X P(Y | X)P(X) \end{cases} \quad (1.14)$$

公式中,称 $P(X|Y)$ 为随机事件 $Y$ 发生的前提下,随机事件 $X$ 发生的概率,也称为后验概率, $P(X)$ 为先验项或先验概率, $P(Y|X)$ 为似然项, $P(Y)$ 为随机变量 $Y$ 的先验概率或边缘