4

世界数学
精品译丛

流形上的热核和分析

Heat Kernel and Analysis on Manifolds

□ Alexander Grigor'yan 著

□ 林 勇 倪天佳 译

高等教育出版社

4

世界数学
精品译丛

Heat Kernel and Analysis on Manifolds

流形上的热核和分析

□ Alexander Grigor'yan 著

□ 林 勇 倪天佳 译

高等教育出版社·北京 International Press

内容简介

热核长期以来一直都是古典和现代数学的基本工具，而从 20 世纪 70 年代开始几何分析成为重要的创新学科以来，热核在其中变得尤为重要。基于热核的方法广泛应用于分析、几何、概率论以及物理学中。本书是对黎曼流形上的热核技术的全面概述，这必然包括对 Laplace-Beltrami 算子和相应热方程的分析。

本书的前十章包含了这一学科的基本内容，后面几章讨论了热核在各种各样情况下更高深的结果。全书从基本的黎曼几何概念出发，详尽研究了黎曼流形上的拉普拉斯算子和热方程的谱理论、马尔可夫性和光滑性，最终得到高斯热核估计。

本书考虑到学生的需求，还特别包含了 400 多道练习题，是一本联系基础成果和现代研究的桥梁之作。

流形上的热核和分析

Liuxing shang de rehe he fenxi

图书在版编目（CIP）数据

流形上的热核和分析 /（英）亚历山大·格里戈里安（Alexander Grigor'yan）著；林勇、倪天佳译 . —北京：高等教育出版社，2017.6

书名原文：Heat Kernel and Analysis on Manifolds

ISBN 978-7-04-047747-4

Ⅰ.①流… Ⅱ.①亚… ②林… ③倪… Ⅲ.①流形分析 Ⅳ.①O192

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 091155 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 赵天夫
封面设计 李小璐　　责任印制 尤　静

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
印刷 涿州市星河印刷有限公司

开本 787mm × 960mm 1/16
印张 32.25
字数 670 千字
版次 2017 年 6 月第 1 版
印次 2017 年 6 月第 1 次印刷
定价 119.00 元

[物 料 号 47747-00]

中译本序

我很高兴本书用中文出版. 中国在数学与科学领域的近期发展令人印象深刻, 华人数学家在数学的所有领域都做出了重要贡献, 当然也包括本书所属的学科.

如果没有丘成桐教授一如既往的支持和鼓励, 本书是不可能面世的. 我也感谢与刘家成教授在香港中文大学的长期合作, 这本书的大部分都是在那里写成的.

我非常感谢林勇教授将本书翻译成中文, 同时也感谢徐佩教授和胡家信教授, 他们为提高本书的翻译质量提出了很多建议.

Alexander Grigor'yan

比勒费尔德大学

2017 年 3 月

译者序

历经数年的努力, Grigor'yan 教授的《流形上的热核和分析》中文版终于面世了, 它是由丘成桐教授推荐我们翻译成中文并在高等教育出版社出版的.

热核作为分析中一个基本的概念在偏微分方程、概率论和几何分析等数学领域具有非常重要的地位. 本书的作者德国比勒费尔德大学的 Grigor'yan 教授作为苏联莫斯科大学数学系培养出来的数学家, 具有深厚的数学基础和功底, 他也曾长期担任伦敦帝国理工大学数学系的教授, 是国际数学界热核研究领域的专家. Grigor'yan 教授最早为人所知的工作就是证明了黎曼流形具有高斯热核估计等价于测度的倍增性质和庞加莱不等式, 从而给了经典的 Li-Yau 的非负里奇曲率下具有高斯热核估计性质的另一种刻画.

国内外以热核作为主题的学术著作极少. 本书从最基本的黎曼流形的概念出发, 从欧氏空间的高斯热核讲起, 逐步介绍黎曼流形以及一般距离测度空间的热核的概念和基本性质, 最后结合作者本人几十年的工作, 介绍了目前国际热核研究领域的热点. 全书由浅入深, 通俗易懂, 可以作为相关领域的专家学者研究热核的百科全书, 也可以作为年轻学生学习热核知识的入门书. 本书曾经在中国科学院晨兴数学中心和中国人民大学数学系的讨论班上作为主题讲授过. Grigor'yan 教授长期的合作者、清华大学数学系的胡家信教授审阅过翻译初稿, 匿名审稿人也提出过宝贵意见, 本书在出版过程中得到高等教育出版社赵天夫编辑的长期关心和支持, 在此一并表示感谢.

译者

中国人民大学

2017 年 3 月

引言

过去几十年数学的发展使得热核的概念在众多以及一些看似冷门的数学分支中被大量应用. 在论文 [217], “无处不在的热核” 中, Jay Jorgenson 与 Serge Lang 将热核称为 “...... 在数学与物理中具有支配地位的工具, 同时具有许多非常简单而重要的性质”.

在基础分析的课程中, 我们看到了指数函数 $t \mapsto e^{at}$ 的独特作用. 指数函数的推广——热半群 $\left\{e^{-tA}\right\}_{t\geqslant 0}$, 此处 A 为正定线性算子, 可以用来解相应的热方程 $\dot{u}+Au=0$. 这无疑使得热半群在数学与物理中具有同样重要的地位. 如果算子 A 作用于函数空间, 则热半群 e^{-tA} 的作用可以由积分算子给出, 此积分算子的核就称为 A 的热核.

显然, 关于热核的知识例如其上界与下界的估计, 可以帮我们解决很多与算子 A 及其谱相关的问题, 也可以得到热方程的解以及相应空间的性质. 如果算子 A 具有马尔可夫 (Markov) 性, 则其可以生成一个马尔可夫过程 (例如当 A 为二阶椭圆微分算子时), 则我们可以用热核的性质来研究随机过程.

本书主要介绍黎曼 (Riemann) 流形上的拉普拉斯 (Laplace) 算子的热方程以及热核. 140 年前, 在 1867 年, Eugenio Beltrami [29] 引入了黎曼度量下的拉普拉斯算子, 也称为 Laplace-Beltrami 算子. 在 1954 年, Matthew Gaffney [126] 为进一步分析该算子做出了关键性工作, 他证明了在测地完备流形上拉普拉斯算子在 L^2 中为自伴算子. Gaffney 在 [127] 中也证明了热半群随机完备性的第一个非平凡充分条件, 即此半群的保 L^1-范数性. 几乎在同一时间, S. Minakshisundaram [275] 用参数方法构造了紧黎曼流形上的热核.

然而直到 1970 年代中叶, 丘成桐 (Shing-Tung Yau) 为拉普拉斯算子以及热方程上的几何分析做出革命性的工作之后, 这个领域才完全形成. 几何分析领域的高峰为李 (Li) 与丘 (Yau) [258] 在 1986 年在非负里奇 (Ricci) 曲率的完备流形上证明抛物哈纳克 (Harnack) 不等式以及热核的上下估计, 这激发了许多学者对热核估计的更进一步研究. 除了在几何分析领域的广泛影响, 李与丘研究的梯度估计为哈密顿 (Richard Hamilton) 关于里奇流的研究提供了参考, 在此研究的基础上最终由佩雷尔曼 (Grigory Perel'man) 解决了庞加莱 (Poincaré) 猜想, 这可以被视为热核在几何中应用最为辉煌

的成就①.

热核研究的另一个方向由 Brian Davies [96] 与 Nick Varopoulos [354], [356] 提出, 他们用基础泛函分析方法将热核估计与特定的泛函不等式联系起来.

本书的主要目的是为研究生提供拉普拉斯算子和热方程上几何分析的相关知识, 这也帮助学生将几何分析的基础知识与当今研究的前沿联系起来. 本书主要通过几个不同的章节研究如下几个方面的问题.

I. *局部几何背景知识*. 本书给出了黎曼几何的详细介绍, 强调了黎曼测度的构造, 黎曼–拉普拉斯算子作为二阶椭圆微分算子的构造, 该算子的系数由黎曼度量张量确定.

II. *谱理论性质*. 拉普拉斯算子可以被扩展为 L^2 空间上的自伴算子, 这使得我们可以应用自伴算子的谱理论和泛函分析的相关知识, 进而构造相应的热半群. 要适当处理自伴拉普拉斯算子的定义域以及相应的能量形式, 我们需要引入流形上的索伯列夫 (Sobolev) 函数空间. 我们将给出 $\mathbb{R}^n$ 与黎曼流形上的分布理论与索伯列夫空间的详细介绍.

III. *马尔可夫性与极大值原理*. 拉普拉斯算子的上述谱理论利用了其椭圆性与对称性. 其为 2 阶的事实推出了所谓的马尔可夫性, 即拉普拉斯方程和热方程解的极大值与极小值原理. 多种形式的极大值/极小值原理将在本书不同的部分以弱、普通或强的形式给出. 马尔可夫性与伴随着拉普拉斯算子的扩散马尔可夫过程紧密相连, 这可以通过术语反映出来. 但是本书中我们不会深入研究随机过程, 将此留到下一本书中研究.

IV. *光滑性性质*. 众所周知, 当光滑解的次数高于特定的范围时, 椭圆方程与抛物方程具有正则性. 我们给出具有光滑系数的椭圆算子和抛物算子在 $\mathbb{R}^n$ (从而在流形上) 局部正则性的详细理论. 这包括了对具有正负阶数索伯列夫空间上解的光滑性研究, 以及关于索伯列夫空间到 C^k 中的嵌入理论. 我们用到解的局部估计, 特别地, 证明了任意流形上热核的存在性.

V. *整体几何性质*. 有些解的性质取决于流形的整体几何性质, 例如拉普拉斯算子的本质自伴性 (即自伴拓展的唯一性), 热核的随机完备性, 热方程有界柯西 (Cauchy) 问题解的唯一性, 以及解的定量估计, 特别是热核估计. 我们需要特别注意热核的上界, 尤其是具有长时间相关的对角上界, 以及反映出长距离特征的高斯 (Gauss) 型上界. 本书中我们不研究下界估计以及与其相关的一致哈纳克不等式和梯度估计, 相关内容将在下一本书中给出.

阅读本书的所需知识为 $\mathbb{R}^n$ 上分析与泛函分析的基本知识, 包括测度论, 希尔伯特 (Hilbert) 空间, 以及自伴算子的谱理论 (附录中给出了所需的泛函分析基本知识). 本书可以被用作研究生课程的教材, 所涉及科目如下: 黎曼几何, 流形上的分析, 索伯列夫空间, 偏微分方程, 热半群, 热核估计以及其他课程. 事实上, 本书主要来源于作者于

①热核的另一个关键性应用为 Atiyah-Singer 指标定理的热方程方法——见 [12], [132], [318].

1995—2005 年在伦敦帝国理工大学以及在 2002 年和 2005 年于香港中文大学讲授的"流形上的分析" 课程所用的主要教学资料.

本书包含了超过 400 道练习题, 题目的难度从 "十分简单" 到极其复杂不等. 练习扩展并表述了书中所讲的主要内容, 有些为正文中的引理. 练习详细的解答 (约 200 页) 以及它们的 LaTeX 代码提供在 AMS 网页:

`http://www.ams.org/bookpages/amsip-47`

上, 此处也会提供本书所属学科的其他材料.

本书与现存其他专著几乎没有交集. 上面提到的热核上界主要由本书作者在 1990 年代得出, 且为第一次以书籍的形式呈现. 同时, 背景资料也与已经出版的书籍有实质性的不同. 本书基本知识部分的主要特点是给出了任意黎曼流形上热核构造的全新方法. Minakshisundaram 给出了上述构造的传统方法, 即通过参数方法 (见例 [36], [37], [51], [318], [327]). 最近几年距离空间包括分形上分析的发展 (见 [22], [186], [187], [224]), 使得我们得到全新的不完全与底空间的局部欧几里得 (Euclid) 结构相关的其他构造方法.

虽然本书中不讨论奇异空间, 但是我们还是会在可能的情况下考虑可以应用于此类空间上的一些方法. 我们尽量不使用参数方法以及光滑超曲面的相关工具, 例如余面积 (coarea) 公式与解的边界正则性, 这使得我们可能面临更复杂的处理. 因此, 本书中的许多证明为全新的, 包括许多关于热核和格林 (Green) 函数熟知的性质. 许多重要定理都给出了多个证明, 这使得我们可以为不同背景的读者掌握相关知识提供足够的灵活性.

第一章至第十章的内容, 第十一章的第一部分以及第十三章, 为本书的基础知识. 余下的部分——第十一章的第二部分, 第十二章与第十四章至第十六章, 包括了 1980 年代至 1990 年代间得到的最新研究成果.

下面简要介绍每章的主要内容.

第一章、第二章与第六章包括了 $\mathbb{R}^n$ 中的分析以及 $\mathbb{R}^n$ 中椭圆与抛物方程正则性的相关知识. 这些内容与其他章的内容关联度不大, 因此既可以独立阅读, 也可以用作学习本学科的参考资料.

第三章包括了黎曼几何的基础介绍, 主要集中于 Laplace-Beltrami 算子以及格林公式.

第四章介绍了 L^2 中的自伴算子——Dirichlet Laplace 算子, 这使得我们可以定义相应的热半群并证明其基本性质. 谱理论为本部分的主要工具.

第五章研究热半群的马尔可夫性质, 这些性质等价于弱梯度的链式法则, 以及椭圆问题与抛物问题的弱极大值原理. 本章中没有用到解的光滑性, 因此索伯列夫空间为主要工具.

第七章引入了任意流形上的热核, 其为热半群的积分核. 本章的主要工具是将第六

章的正则性理论移植到流形上. 热核的存在性可由 $L^2 \to L^\infty$ 上热半群的局部估计得到, 这些可以由索伯列夫嵌入定理以及正则性理论的相关知识推得. 同时正则性理论可以推出热核的光滑性.

第八章讨论了与热方程解的非负性和有界性相关的几个问题, 这可以被视为用解的光滑性对第五章中相关知识的拓展. 这包含了热半群与预解式的极小性, 正上解的强极小值原理以及随机完备性的基本准则.

第九章中将热核视为基础解. 由此可以引入一些有用的工具来证明给定的函数为热核, 同时给出了一些热核的例子.

第十章研究了 Dirichlet Laplace 算子的基本谱性质. 其包含了谱的下确界 λ_1 的变分原理, 底部特征函数的正值性, 谱的离散性以及相对紧域中 λ_1 的正值性, 同时还有用 λ_1 来刻画热核在长时间下的性质.

第十一章包含了与测地距离相关的知识. 本章开头介绍了利普希茨 (Lipschitz) 函数的相关性质, 特别是其弱可微性, 这使得我们可以将利普希茨函数作为检验函数应用于各种证明中. 后续结果的证明用到距离函数: 测地完备流形上的 Dirichlet Laplace 算子为自伴算子, 随机完备性与抛物性的体积判别法则, 以及谱下界的估计.

第十二章为研究热核的上边界四章中的第一章. 它包含在任意流形上均有效的积分形式的高斯估计的基本内容: 积分形式的极大值原理, Davies-Gaffney 不等式, Takeda 不等式以及一些结论. 这些证明中用到根据测地距离选择的检验函数.

第十三章主要研究拉普拉斯算子的格林函数, 这可以由热核对时间积分得到. 由格林函数与强极小值原理可以证明 α-调和函数的局部哈纳克不等式以及其推论——例如收敛定理. 同时给出应用的例子, 证明了任意流形基态的存在性. 逻辑上讲该章属于本学科的基础知识, 应该放在更前面的章节中. 但是局部哈纳克不等式的证明需要第十二章中的结论, 这使得我们将其放在现在的位置.

第十四章主要研究热核的对角上界, 这需要流形上进一步的假设条件. 一般的假设由等周或泛函不等式给出. 我们用 Faber-Krahn 不等式方法来研究特征值下界, 这使得我们可以将其与谱性质联系起来. 我们得到的主要结论为, 在一定程度上, 热核的对角上界等价于 Faber-Krahn 不等式.

第十五章继续研究高斯型估计的相关问题. 主要结论为热方程解的莫泽 (Moser) 平均值不等式, 连同积分形式的极大值原理使得我们可以得到热核的逐点高斯型上界. 我们在以下三种情况下考虑此类估计: 任意流形, 满足整体 Faber-Krahn 不等式的流形, 以及满足相对 Faber-Krahn 不等式从而有 Li-Yau 热核估计的流形.

第十六章主要介绍了研究热核的高斯估计的其他方法. 尽管需要相对复杂的方法, 高斯上界可以直接由对角上界推得. 作为这些方法的应用例子, 我们证明了一些对角下界估计.

附录 A 包含了一些上面已经提到的参考资料.

鸣谢. 本书是利用 TCI 软件研究公司与 MacKichan 软件公司开发的 Scientific Workplace 编辑程序下用 LaTeX 排版的.

在写作本书的过程中, 我在如下学术机构任职 (长期任职或临时任职): 伦敦帝国理工大学, 巴黎亨利 · 庞加莱研究院, 香港中文大学, 京都数学科学研究院, 莫斯科控制科学研究院, 比勒费尔德大学以及苏黎世联邦理工学院, 并得到了相应基金会的资金支持.

本书的主要部分写作于我三次访问香港中文大学数学科学研究所总共十二个月的时间内, 我十分感谢丘成桐教授给我如此难得的机会. 他的支持与鼓励为我的工作提供了重要帮助.

极大值原理部分的写作使我想起了我的老师 Eugene Landis, 他对极大值原理的掌握运用从未有人超越. 我所学的分析知识主要来源于 Landis, 这也形成了本书中选择材料与证明方法的风格.

我还要特别感谢已故的 Serge Lang, 我与他关于本书结构进行了有益的讨论.

非常高兴在这里我感谢我的同行们, 他们以各种形式帮助了我的工作: Martin Barlow, Alexander Bendikov, Isaac Chavel, Thierry Coulhon, Józef Dodziuk, Brian Davies, Wolfhard Hansen, Elton Pei Hsu (徐佩), Jiaxin Hu (胡家信), Vladimir Kondratiev, Takashi Kumagai, Ka-Sing Lau (刘家成), Peter Li, Terry Lyons, Vladimir Maz'ya, Minoru Murata, Nikolai Nadirashvili, Michael Röckner, Laurent Saloff-Coste, Theo Sturm, Nina Ural'tseva.

最后我要感谢我的家人, 特别是我的妻子 Tatiana 给我的鼓励与帮助.

Alexander Grigor'yan

伦敦 – 巴黎 – 香港 – 京都 – 莫斯科 – 比勒费尔德 – 苏黎世

2002—2009

目 录

第一章　$\mathbb{R}^n$ 中的拉普拉斯算子与热方程

$\mathbb{R}^n$ 中的拉普拉斯算子是如下定义的偏微分算子:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

此处 $x_1, \ldots, x_n$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡儿 (Descartes) 坐标. 拉普拉斯算子在数学与物理学研究中具有重要作用. 本章将讨论拉普拉斯算子的一些基本性质以及由算子导出的热方程, 由此可以在流形上引出相近的研究.

1.1　历史背景

数学中的拉普拉斯算子由物理学中引入.

拉普拉斯方程. 皮埃尔–西蒙 · 拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace) 在 1784—1785 年间发现, 重力场可以被表示为一个势函数 $U(x)$ 的梯度, 并且此函数应该满足 $\Delta U = 0$, 此方程称为*拉普拉斯方程*. 位于原点 $o \in \mathbb{R}^3$ 的质点的引力势能可以被表示为: $U(x) = -\frac{m}{|x|}$, m 为质点质量. 易证在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ 中有 $\Delta \frac{1}{|x|} = 0$ 从而 $\Delta U = 0$. 开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中物体的势能可以表示为:

$$U(x) = -\int_{\Omega} \frac{\rho(y)\, dy}{|x-y|},$$

ρ 表示物体密度, 易得在 $\overline{\Omega}$ 外有 $\Delta U(x) = 0$.

热方程. 傅里叶 (Fourier) 热传导定律 ("Théorie analytique de la chaleur"①, 1822) 表明, 点 $x \in \mathbb{R}^3$ 于时间 t 的温度 $u(t,x)$ 满足如下*热方程*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u,$$

此方程在任何无热源与热沉的区域都成立 (此处 $k > 0$ 为热传导系数).

①"热的解析理论".

波动方程. 由麦克斯韦方程 ("Treatise on Electricity and Magnetism", 1873) 可知, 无电荷与电流区域内电磁场中的分量 $u = u(t,x)$ 满足*波动方程*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u,$$

此处 c 为光速. 波动方程也常被用来描述其他与波传播相关的物理现象.

扩散方程. 阿尔伯特 · 爱因斯坦在他的 1905 年于 *Annalen der Physik* 发表的论文 "Über die von der molekulakinetischen Theorie der Wärme gefoderte Bewegung von in ruhenden flüssigkeite suspendierten Teilchen"② 中提出了布朗运动的数学描述. 他提出由原点 $o \in \mathbb{R}^3$ 出发的质点于时间 t 到达点 x 的概率密度满足如下*扩散方程*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u$$

(此处 $D > 0$ 为扩散系数). 爱因斯坦根据此方程预测质点于时间 t 的平均偏移距离为 $\sqrt{4Dt}$. 该结论随后被 Jean Perrin 于 1908 年以实验证明, Jean Perrin 也因此获得 1926 年诺贝尔物理学奖. 这些工作为分子运动理论提供了强有力的支持, 也证明了物质的原子结构.

Schrödinger *方程*. Erwin Schrödinger 于 1926 年提出了用于描述量子力学中基本粒子运动的新方法. 根据 Louis de Broglie 提出的粒子运动服从运动方程 $\psi(t,x)$, Schrödinger 推导出如下用来描述无旋转粒子波动的方程

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi,$$

此处 m 为粒子质量, U 为势场, $\hbar$ 为 Planck 常数且 $i = \sqrt{-1}$. 他将此方程用于对氢原子的研究, 得出许多关于氢原子性质的精确预测. Erwin Schrödinger 与 Paul Dirac 共同获得 1933 年诺贝尔物理学奖.

1.2 格林公式

格林公式是散度定理的一个推论, 拉普拉斯算子通过格林公式被运用于包括物理定律的许多领域. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有光滑边界的有界开子集, 散度定理表明对于 Ω 中任意 C^1 且在 $\overline{\Omega}$ 中连续的向量场 F, 有

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx, \tag{1.1}$$

此处 σ 为 $\partial\Omega$ 的边界面积测度, ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

②"由热的分子运动理论决定的悬浮在静止的液体中的小粒子的运动".