国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

BÉZOUT THEOREM IN ALGEBRAIC GEOMETRY

代数几何中的Bézout定理

佩捷 吴雨宸 李舒畅 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

王梓坤

REM IN ALGEBRAIC GEOMETRY

代数几何中的Bézout定理

佩 捷　吴雨宸　李舒畅　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

代数几何是数学中的一个重要分支，国内外很多著名的数学家都从事过对它的研究。本书共分 10 章，分别为：一道背景深刻的 IMO 试题、多项式的简单预备知识、代数几何中的贝祖定理的简单情形、射影空间中的交、代数几何、肖刚论代数几何、贝祖定理在代数几何中的应用、贝祖的结式理论在几何学中的发展历程、代数几何大师的风采、中国代数几何大师肖刚纪念专辑。

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读。

图书在版编目（CIP）数据

代数几何中的 Bézout 定理/佩捷，吴雨宸，李舒畅编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

（现代数学中的著名定理纵横谈丛书）

ISBN 978－7－5603－5662－4

Ⅰ.①代… Ⅱ.①佩…②孙…③吴… Ⅲ.①代数几何－定理（数学）－研究Ⅳ.①O187

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 251563 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　杨明蕾　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 36.5　字数 400 千字
版　　次　2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5662－4
定　　价　98.00 元

⊙代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了我极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片.

丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此. 一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材. 这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍. 从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》. 我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全. 即以近年来极时髦的人质问题（伊朗人质、劫机人质等），这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利. 其中"秋水""解牛"诸篇，诚绝唱也.《论语》束身严谨，勇于面世，"己所不欲，勿施于人"，有长者之风. 司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究. 我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说. 我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句："人生自古谁无死，留取丹心照汗青""谁言女子非英物，夜夜龙泉壁上鸣". 唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心. 不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信. 以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品,都是长期积累和短期突击相结合的产物.涓涓不息,将成江河;无此涓涓,何来江河?

爱好读书是许多伟人的共同特性,不仅学者专家如此,一些大政治家、大军事家也如此.曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷,嗜书如命的人.他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

◎ 目录

第1章 一道背景深刻的 IMO[①] 试题

设 n 是一个正整数，考虑 $S=\{(x,y,z)\mid x,y,z=0,1,2,\cdots,n,x+y+z>0\}$ 这样一个三维空间中具有 $(n+1)^3-1$ 个点的集合. 问：最少要多少个平面，它们的并集才能包含 S 但不含 $(0,0,0)$.

（这是一道 48 届 IMO 试题. 其解答颇费周折）

分析 二维的情况比较简单，方法如下：

我们可以考虑最外一圈的 $4n-1$ 个点. 如果没有直线 $x=n$ 或 $y=n$，那么每条直线最多过这 $4n-1$ 个点中的两个. 故至少需要 $2n$ 条直线. 如果有直线 $x=n$ 或 $y=n$，那么将此直线和其上的点去除，再考虑最外一圈，只不过点数变成了 $4n-3$ 个，需要至少 $2n-1$ 条直线，再加上去掉的那条正好 $2n$ 条. 如果需要多次去除直线，以至于比如 $x=1,x=2,\cdots,x=n$ 这所

① 国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad）的英文缩写为 IMO. ——编者注

有 n 条直线全部被去除了，那么剩下 $(0,1),(0,2),\cdots,(0,n)$ 至少还需要 n 条直线去覆盖，$2n$ 条亦是必须的. $2n$ 条显然是可以做到的，所以二维的最终结果就是 $2n$.

但是将这种方法推向三维的时候，会出现困难，因为现在用来覆盖的不是直线而是平面，平面等于有了三个自由变量，而且不容易选取标志点来进行考察. 当然，我们要坚信一个事实，那就是答案一定是 $3n$，否则题目是没有办法解决的. 在这个前提下，通过转化，将这个看起来是一道组合计数的题目变成一道代数题.

解法 1 首先第一步，我们就要将每个平面表示成一个三元一次多项式的形式. 比如平面 $x+y+z=1$ 就表示成 $x+y+z-1$，将所有这些平面均表述成如此形式后，我们将这些多项式都乘起来. 下面我们需要证明的只有一点，就是乘出来的多项式，至少具有 $3n$ 次 ($3n$ 个平面是显然可以做到的，只要证明这点，$3n$ 就是最佳答案了).

这个乘出来的多项式具有什么特点呢? 它在 x,y,z 均等于 0 时不等于 0，在 x,y,z 取其他 $0\sim n$ 之间的数值时，其值均为 0. 我们发现，当多项式中某一项上具有某个字母的至少 $n+1$ 次时，我们可以将其降低为较低的次数. 我们用的方法就是，利用仅仅讨论 x,y,z 在取 $0,1,2,\cdots,n$ 这些值时多项式的取值这一事实，在原多项式里可以减去形如 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ 或者此式子的任何倍数的式子. 从而，如果多项式中某一项的某个字母次数超过 n，可以用此法将其变成小于或等于 n.

我们假设用此法变换后剩余的多项式是 F，显然

F 的次数不大于原乘积多项式的次数. 我们下面需要证明的,就是 F 中 $x^n y^n z^n$ 这一项系数非零(F 中只有这一项次数是 $3n$). 要想证明这样的问题,我们需要证明二维即两个未知数时的两个引理.

引理1　一个关于 x 和 y 的实系数多项式,x 和 y 的次数均不超过 n. 如果此多项式在 $x=y=0$ 时非零,在 $x=p,y=q(p,q=0,1,2,\cdots,n$ 且 p,q 不全为0)时为零,那么此多项式中 $x^n y^n$ 的系数必然不是零.

证明　假设 $x^n y^n$ 的系数是0,我们知道,当假设 $y=1,2,3,\cdots,n$ 中任意一值时,将 y 代入多项式,所得的多项式必须都是零多项式. 这是由于当 y 取这些值时,此多项式为关于 x 的不超过 n 次的多项式,却有 $n+1$ 个零点,所以假设 y 是常数,按 x 的次数来整理该多项式,x^n 的次数是一个关于 y 的不超过 $n-1$ 次的多项式,但是却有 n 个零点,故为零多项式. 因此,当按照 x 的次数来整理多项式时,x 的最高次最多是 $n-1$ 次. 现令 $y=0$ 代入多项式,转化为关于 x 的多项式,最多 $n-1$ 次,但是有 n 个零点$(1,2,\cdots,n)$. 因此,这个多项式应当是零多项式,但是这与此多项式在 $x=y=0$ 时非零矛盾.

引理2　一个关于 x 和 y 的实系数多项式,x 和 y 的次数均不超过 n. 如果此多项式在 $x=p,y=q(p,q=0,1,2,\cdots,n)$ 时均为0,则此多项式为零多项式.

证明　对于任意的 $y=0,1,2,\cdots,n$ 代入原多项式,变成关于 x 的不超过 n 次的多项式,这个新多项式必然是零多项式,否则它不可能有 $n+1$ 个零点,所以按 x 的次数来整理原多项式,对于任意的 $k=0,1,2,\cdots,n$,x^k 项的系数 $C_k(y)$ 都是一个关于 y 的不超过

n 次的多项式,但是却有 $n+1$ 个零点,故所有的系数都为零.

回到原题.假设 F 中 $x^n y^n z^n$ 这一项系数为 0,那么设 z 为常数,考虑按 x 和 y 的次数来整理多项式 F. F 中,$x^n y^n$ 项的系数是一个关于 z 的,不超过 $n-1$ 次的多项式.但是由引理 2,这个多项式却拥有 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个零点,故它是零多项式.现在我们令 $z=0$,化归成关于 x 和 y 的多项式.此时,$x^n y^n$ 项的系数已经是 0,但是我们却发现,这个多项式恰恰在 $x=y=0$ 时非零,在 $x=p,y=q(p,q=0,1,2,\cdots,n$ 且 p,q 不全为 $0)$ 时为零,这与刚才的引理 1 矛盾.

综上,我们证明了多项式 F 中 $x^n y^n z^n$ 这一项系数非零,即原乘积多项式至少有 $3n$ 次,即至少需要 $3n$ 个平面,才能覆盖题目中要求的所有点而不过原点.故原题的答案为 $3n$.

评论 这是一道很难的题目,最关键的一点就是将这个看似组合计数的题目,转化成纯代数问题.尤其是在有二维背景的前提下,在考试规定的时间内,更是很少有人能跳出思维的局限.这或许就是为什么全世界顶尖的高中生只有区区 4 人做出此题的原因吧!

解法 2 很容易发现 $3n$ 个平面能满足要求,例如平面 $x=i,y=i$ 和 $z=i(i=1,2,\cdots,n)$,易见这 $3n$ 个平面的并集包含 S 但不含原点.另外的例子是平面集

$$x+y+z=k \quad (k=1,2,\cdots,3n)$$

我们证明 $3n$ 是最少可能数,下面的引理是关键的.

引理 3 考虑 k 个变量的非零多项式 $P(x_1,\cdots,x_k)$.若所有满足 $x_1,\cdots,x_k\in\{0,1,\cdots,n\}$,$x_1+\cdots+x_k>0$ 的点 $(x_1,\cdots,x_k)$ 都是 $P(x_1,\cdots,x_k)$ 的零点,且

$P(0,0,\cdots,0)\neq 0$,则 $\deg P\geqslant kn$①.

证明 我们对 k 用归纳法:当 $k=0$ 时,由 $P\neq 0$ 知结论成立.现假设结论对 $k-1$ 成立,下证结论对 k 成立.

令 $y=x_k$,设 $R(x_1,\cdots,x_{k-1},y)$ 是 P 被 $Q(y)=y(y-1)\cdots(y-n)$ 除的余式.

因为多项式 $Q(y)$ 以 $y=0,1,\cdots,n$ 为 $n+1$ 个零点,所以 $P(x_1,\cdots,x_{k-1},y)=R(x_1,\cdots,x_{k-1},y)$ 对所有 $x_1,\cdots,x_{k-1},y\in\{0,1,\cdots,n\}$ 成立.

因此,R 也满足引理的条件.

进一步有 $\deg_y R\leqslant n$,又明显地 $\deg R\leqslant\deg P$,所以只要证明 $\deg R\geqslant nk$ 即可.

现在,将多项式 R 写成 y 的降幂形式

$$\begin{aligned}R(x_1,\cdots,x_{k-1},y)=&R_n(x_1,\cdots,x_{k-1})y^n+\\&R_{n-1}(x_1,\cdots,x_{k-1})y^{n-1}+\cdots+\\&R_0(x_1,\cdots,x_{k-1})\end{aligned}$$

下面我们证明 $R_n(x_1,\cdots,x_{k-1})$ 满足归纳假设条件.

事实上,考虑多项式

$$T(y)=R(0,\cdots,0,y)$$

易见 $\deg T(y)\leqslant n$,这个多项式有 n 个根,$y=1,\cdots,n$;另一方面,由 $T(0)\neq 0$ 知 $T(y)\neq 0$,因此 $\deg T=n$,且它的首项系数是 $R_n(0,\cdots,0)\neq 0$(特别地,在 $k=1$ 的情况下,我们得到系数 R_n 是非零的).

类似地,取任意 $a_1,\cdots,a_{k-1}\in\{0,1,\cdots,n\}$ 且 $a_1+\cdots+a_{k-1}>0$.

① degré 是法文"次数"的意思,本书中以 $\deg a$ 表示多项式 a 的次数.——编者注