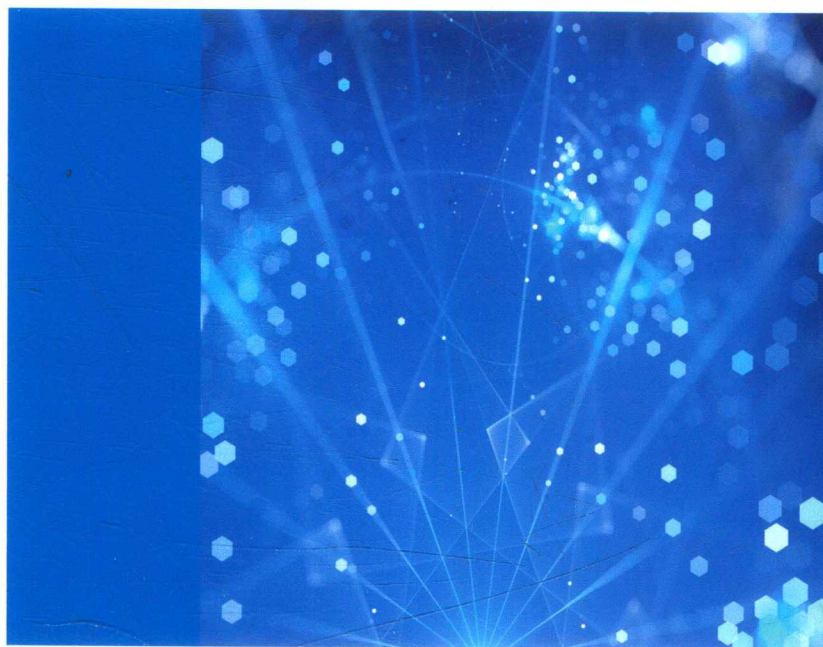


On Resistance Distance and
Kirchhoff Index



电阻距离和 基尔霍夫指数的研究

刘家保 著



中国科学技术大学出版社



On Resistance Distance and
Kirchhoff Index

电阻距离和 基尔霍夫指数的研究



刘家保 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书主要研究几类图的电阻距离和基尔霍夫指数,得到了一些新的有意义的结果.关于电阻距离和基尔霍夫指数方面的研究,不但可以丰富和发展图论方面的理论研究,也可以对电网络的量化分析和优化设计起到一些辅助作用.

本书既可作为数学与应用数学专业本科高年级以及硕士研究生专业选修课的教材,也可用作高校和研究所相关专业的教师、研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

电阻距离和基尔霍夫指数的研究/刘家保著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2017.7

ISBN 978-7-312-04261-4

I. 电… II. 刘… III. ①电阻—距离—研究 ②基尔霍夫定律—研究
IV. ①O441.1 ②TN211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 152452 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>

<https://zgkxjsdxcbs.tmall.com>

印刷 安徽省瑞隆印务有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×1000 mm 1/16

印张 9.25

字数 149 千

版次 2017 年 7 月第 1 版

印次 2017 年 7 月第 1 次印刷

定价 32.00 元

前 言

现实世界中的许多实际问题都可以用图模型来描述或刻画,图模型作为描述复杂网络的有力工具,已经得到了广泛而系统的研究.任何一个网络都可以看作是由一些节点按照某种方式连接在一起构成的一个系统.具体的网络用图来表示,就是用抽象的点表示具体网络中的节点,并用节点之间的连线来表示具体网络中节点之间的连接关系.

电阻距离是定义在图上的距离函数(或度量),是由 Klein 和 Randić 在 1993 年首次提出的.连通图中任意两点之间的电阻距离被定义为用单位电阻代替图中每条边后相应的电网络中这两点之间的有效电阻.电阻距离包含了两顶点之间所有路的信息,而一般距离仅仅包含两顶点之间的信息.正因如此,电阻距离是刻画原子之间波状的或类液的通信的强有力工具.事实上,类似于信息流、交通流和其他的类液的传输或通信等,用电阻距离来描述更符合物理的本质特征.节点之间电阻距离与这两个节点之间的最短路径条数成正比,即当两个节点之间存在较多的最短路径时,电阻距离就较小.电阻距离等价于图上随机游走时两个节点之间的平均往返时间.在化学上,电阻距离是刻画原子之间通信能力的有力工具.在生态学上,电阻距离可以建立生态学的连通性模型.

图的基尔霍夫指数被定义为图中所有点对之间的电阻距离之和.实际上,图的基尔霍夫指数在物理、化学以及网络科学等方面都有着广泛的应用.对物理电阻网络来说,基尔霍夫指数反映了当随机地对电阻网络注入电流时,电阻网络对电能的平均消耗.基尔霍夫指数越小,单位时间内电阻网络消耗的电能就越小.基尔霍夫指数的大小不仅能反映网络

的规模,而且也能反映网络的连通性.在给定网络规模的情况下,基尔霍夫指数越小,则网络连通性越好,同时意味着节点间的电阻距离越小,整个网络消耗的平均电能也就越少.基尔霍夫指数是图论的一个很重要的拓扑指数,在化学上可以用来描述分子的结构特征,基尔霍夫指数还可以定义高分子的拓扑半径.张存铨等人依据基尔霍夫指数提出了网络节点重要度的评估方法,基尔霍夫指数也被用来刻画复杂网络的拓扑中心性.

综上所述,图的电阻距离和基尔霍夫指数涉及图论、工程物理、网络科学等相关知识,其理论被广泛应用到电网络理论研究、复杂网络分析、化学分子的属性预测等领域.

本书是在我的博士学位论文和最近一些科研论文的基础上修改完成的,在此特别感谢我的导师潘向峰教授,在我读博期间给予的悉心指导和谆谆教诲!谨向潘老师致以诚挚的谢意!

作者衷心感谢国家自然科学基金青年项目(11601006)、安徽建筑大学引进人才及博士启动基金(2016QD116)、安徽建筑大学专著项目以及安徽建筑大学系统工程重点学科建设项目等的资助.本书能够顺利出版得到了安徽建筑大学数理学院和中国科学技术大学出版社的积极帮助!

本书吸取了国内外同行的科研成果和他们的著作中的部分内容,在此向他们表示崇高的敬意和衷心的感谢!由于作者的水平和经验有限,本书可能存在不足乃至错误,衷心希望同行专家、各位师友和读者批评指教.

作 者

2017 年春于合肥

目 录

前言	i
第 1 章 绪论	1
1.1 基本概念和术语	1
1.2 若干拓扑指数的研究背景和进展	4
1.3 图的基尔霍夫指数及其衍生形式的研究背景和进展	5
第 2 章 给定点二部度的图的基尔霍夫指数的极小值	8
2.1 图的广义联操作	8
2.2 一些引理	9
2.3 主要结果	10
第 3 章 一种图操作的基尔霍夫指数	15
3.1 相关的图操作及背景	15
3.2 相关图的基尔霍夫指数及其上下界	20
3.3 一些例子	23
第 4 章 双圈图的基尔霍夫指数	26
4.1 已有的相关研究结果	26
4.2 一些引理	27
4.3 双圈图的基尔霍夫指数的下界和极图	28

第 5 章 仙人掌图的度基尔霍夫指数	43
5.1 已有的相关研究结果	43
5.2 次小度基尔霍夫指数的仙人掌图	45
5.3 第三小基尔霍夫指数的仙人掌图	48
第 6 章 超立方体网络及其相关网络的基尔霍夫指数	52
6.1 相关的定义和引理	52
6.2 超立方体网络的基尔霍夫指数	55
6.3 超立方体网络的线图、细分图以及全图的基尔霍夫指数	56
6.3.1 超立方体网络的线图的基尔霍夫指数	56
6.3.2 超立方体网络的细分图的基尔霍夫指数	57
6.3.3 超立方体网络的全图的基尔霍夫指数	59
第 7 章 两类图操作的拉普拉斯广义逆及其应用	61
7.1 相关的背景和定义	61
7.2 一些引理	63
7.3 主要结果	66
7.3.1 细分点冠图的拉普拉斯矩阵 $\{1\}$ -逆	66
7.3.2 细分边冠图的拉普拉斯矩阵 $\{1\}$ -逆	72
第 8 章 格图的若干物理化学拓扑指数的一个注记	78
8.1 一些错误及反例	78
8.2 主要结果及证明	81
8.3 格图的基尔霍夫指数和渐近平均电阻距离	84
第 9 章 若干格图的拓扑指数的渐近性	86
9.1 若干格图的关联能量的渐近性	86
9.1.1 相关的研究背景	87
9.1.2 相同渐近关联能量的判定	89
9.1.3 六边形、三角形、 $3^3.4^2$ 格图的渐近关联能量	91

9.2 若干格图的拟拉普拉斯能量的渐近性	100
9.2.1 相关的研究背景	100
9.2.2 相同渐近拟拉普拉斯能量的判定	102
9.2.3 六边形、3.12.12、三角形 kagomé 格图的 渐近拟拉普拉斯能量	104
9.3 若干格图的拓扑指数渐近性的一致方法	113
9.3.1 相关的研究背景	114
9.3.2 相同渐近拓扑指数的判定	114
第 10 章 重要结论与进一步研究的问题	118
10.1 本书的重要结论	118
10.2 有待进一步研究的问题	127
参考文献	128
附录	135

第 1 章 绪 论

本章首先介绍了本书需要用到的一些基本概念、术语和记号 (本书中出现但没有定义的有关图的概念、术语和记号可以参见文献 [6,14]). 其次介绍了若干拓扑指数的研究背景和进展. 最后介绍了图的基尔霍夫指数及其衍生形式的研究背景和进展.

1.1 基本概念和术语

图 (graph) 是一个满足二元关系 $G = (V(G), E(G))$ 的数学结构, 其中 $V(G)$ 称为图的**顶点集** (vertex-set), $V(G)$ 中的元素称为图的**顶点**, $E(G)$ 是定义在 $V(G)$ 上的二元关系集, 称为图的**边集** (edge-set), $E(G)$ 中的元素称为图的**边**. 一般用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, 并简记 $G = (V, E)$. 对于边 $e = (x, y) \in E(G)$, 其中, 顶点 x 和 y 是边 e 的两个端点, 且顶点 x, y 是相邻的, 边 e 与它的两个端点 x, y 是关联的. 两端点相同的边称为**环**, 两个端点分别相同的两条边称为**平行边** (parallel edges). 既无环也无平行边的图称为**简单图** (simple graph) [5]. 本书研究的图都是简单无向图.

阶 (order): 图 G 中所含顶点的数目称为图 G 的阶数, 简称阶, 记作 $|V(G)|$.

边数 (number of edges): 图 G 中所含边的条数称为图 G 的边数, 记作

$|E(G)|$.

空图 (empty graph): 如果图 G 的边集是空集, 即 $E(G) = \emptyset$, 那么称图 G 为空图.

完全图 (complete graph): 如果简单无向图 G 中任意两个不同的顶点之间都有边相连, 那么称图 G 为完全图. n 个顶点的完全图用 K_n 表示.

二部图 (bipartite graph): 如果 $V(G)$ 能划分为两个非空子集 X 和 Y , 使得 X 中任何两个顶点之间无边相连并且 Y 中任何两个顶点之间也无边相连, 那么称 G 为二部图, $\{X, Y\}$ 称为图 G 的**二部划分** (bipartition), 并记 $G = (X \cup Y, E)$. 对于简单二部图 $G = (X \cup Y, E)$, 其中 $|X| = m$, $|Y| = n$, 如果 X 中每个顶点与 Y 中每个顶点之间都有边相连, 那么称 G 是**完全二部图** (complete bipartite graph), 记为 $K_{m,n}$. 特别地, $K_{1,n}$ 称为**星** (star).

距离 (distance): 设 x, y 是 G 中的两个不同的顶点, G 中所有 xy 路的最短长度称为 x 与 y 之间的距离, 记为 $d(G; x, y)$. 长度等于距离的路称为**最短路** (shortest path).

直径 (diameter): 记为 $d(G)$, 是指在图 G 中所有顶点对之间的最大距离, 即 $d(G) = \max\{d(G; x, y) : \forall x, y \in V(G)\}$.

定义 1.1 图 G 的邻接矩阵^[14] 是指 n 阶矩阵 $A(G) = (a_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq n$), 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 在 } G \text{ 中相邻}), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$$

定义 1.2 图 G 的拉普拉斯矩阵^[14] 是指 n 阶矩阵 $L(G) = D(G) - A(G)$, 其中, $D(G) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$, 其中 $d(v_i)$ 为顶点 v_i 的度数 ($i = 1, 2, \dots, n$).

定义 1.3 图 G 的无符号拉普拉斯矩阵^[10, 14] 是指 n 阶矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$.

定义 1.4 图 G 的邻接谱 (拉普拉斯谱, 无符号拉普拉斯谱)^[10, 14, 60, 89] 是指由矩阵 $A(G)$ ($L(G)$, $Q(G)$) 的所有的特征值连同它们的重数一起构成的多重集.

定义 1.5 关联能量 ^[61] 设 $B(G)$ 为 n 阶图 G 的 (点边) 关联矩阵, 则称其所有的奇异值 $\sigma_1(G), \sigma_2(G), \dots, \sigma_n(G)$ 之和为图 G 的关联能量, 记为 $IE(G)$, 即

$$IE(G) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(G).$$

定义 1.6 拟拉普拉斯能量 ^[71] 设 $L(G)$ 为 n 阶图 G 的拉普拉斯矩阵, 则称其所有的特征值 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ 之和为图 G 的拟拉普拉斯能量, 记为 $LEL(G)$, 即

$$LEL(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i}.$$

定义 1.7 基尔霍夫指数 ^[62] 将连通图 G 中的每条边视为单位电阻, 便得到了相应的电网络 N . 图 G 中顶点 v_i 和 v_j 之间的电阻距离 r_{ij} 是指电网络 N 中顶点 v_i 和 v_j 之间的有效电阻. 图 G 的基尔霍夫指数, 记为 $Kf(G)$, 是指图 G 中所有顶点对之间的电阻距离之和, 即

$$Kf(G) = \sum_{i < j} r_{ij},$$

特别地, 对任意的点 v_i , 将 v_i 到其他所有点的电阻距离之和定义为 $Kf_{v_i}(G)$, 即

$$Kf_{v_i}(G) = \sum_{v_j \in V(G)} r_{ij}.$$

定义 1.8 笛卡儿乘积图 ^[18] 设图 G_1 和 G_2 是两个无向图, G_1 和 G_2 的笛卡儿乘积图, 记为 $G_1 \square G_2$, 其中, $V(G_1 \square G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, 两个不同的顶点 $x_1 x_2$ 和 $y_1 y_2$ ($x_1, y_1 \in V(G_1), x_2, y_2 \in V(G_2)$) 在 $G_1 \square G_2$ 中相邻当且仅当 $x_1 = y_1$ 且 $x_2 y_2 \in E(G_2)$, 或者 $x_2 = y_2$ 且 $x_1 y_1 \in E(G_1)$.

定义 1.9 克罗内克积 ^[51] 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}_{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbf{C}_{p \times q}$, 则称分块矩阵 $A \otimes B = (a_{ij} B)_{m \times n} \in \mathbf{C}_{mp \times nq}$ 为矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{p \times q}$ 的克罗内克积. 更多的性质详见文献 [51].

1.2 若干拓扑指数的研究背景和进展

化学图论是图论研究的重要分支之一, 分子图的各种拓扑指数是化学图论中的一个核心课题. 图的拓扑指数与其对应的分子图的物理、化学性质密切相关, 其理论研究在材料物理、分析化学等领域有着广泛的应用, 可以用来预测一些化合物, 特别是新的或未合成出来的化合物的物理、化学和生物性质等^[30], 这些结果被广泛地应用到 QSAR(量子结构活性关系) 和 QSPR(量子结构性质关系) 的模型中, 这样可以更有目的地对生物活性物质进行结构改造, 大大缩短了化学药物开发的过程, 提高了化工生产的效率, 降低了生产成本, 这些可参见已出版的专著^[30].

在化学图论中, 大量的拓扑指数已被数学、理论化学的学者研究和探讨, 如图的能量、关联能量、拟拉普拉斯能量等^[40, 44, 61, 67, 68, 71, 85].

图的能量是由国际数学化学科学院院士 I. Gutman 于 1978 年正式提出的^[44], 即 $\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$, 其中 λ_i 为图的邻接矩阵特征值. 自 2001 年以来, 关于图的能量研究引起了世界各地众多数学家的广泛关注, 同时也涌现出了大量的成果^[93, 101, 102, 114], 2012 年出版的专著^[68]集中体现了这方面的工作.

类似于图的能量, 图的拟拉普拉斯能量也是图的拓扑不变量. 比较图的邻接矩阵, 拉普拉斯矩阵的定义中不仅包含了所有顶点的邻接情况, 还包含了图中所有顶点度的信息. 因此, 正如 Mohar^[86]所说, 拉普拉斯特征值更能反映图的组合性质. 大家知道, 图的能量是与图的邻接特征值紧密相关的拓扑不变量, 那么, 一个自然的问题是, 对于图的拉普拉斯特征值能否构造一个类似于图的不变量, 使其能够保持图的能量主要属性不变? 正是出于这样一个想法, 2008 年柳柏濂教授等人引入了图的拟拉普拉斯能量的概念^[71]. 文献^[46]指出, 图的拟拉普拉斯能量作为一个分子结构描述子, 不仅很好地描述了大部分描述子已经说明了的性质, 如熵、摩尔体积、摩尔折射率以及离心因子

等,而且也能够描述一些更困难的性质,如沸点、熔点等^[91].正是因为图的拟拉普拉斯能量有着显著的物理、化学应用背景,所以图的拟拉普拉斯能量引起了许多专家学者的广泛关注^[20,71,74].关于拟拉普拉斯能量的其他成果参见综述文献^[69].

图的**关联能量**是与图的无符号拉普拉斯特征值密切相关的图的拓扑不变量.事实上,Nikiforov^[87]将图的能量的概念推广到了一般的矩阵.受到Nikiforov思想的启发,在2009年,Jooyandeh等人^[61]引进了关联能量的概念.图 G 的关联能量 $IE(G)$ 被定义为图 G 的关联矩阵的所有奇异值的和,即 $IE(G) = \sum_{i=1}^n \sigma_i$,其中, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 是图 G 的关联矩阵的奇异值.通过比较图的邻接特征值和拉普拉斯特征值,利用图的无符号拉普拉斯特征值研究图的性质会更加方便一些^[94].因此,我们期望这个新的图参数能够对图的能量和拟拉普拉斯能量的研究注入新的活力.实际上,如果图 G 是二部图,那么图的关联能量和拟拉普拉斯能量是相等的.正因为关联能量与能量以及拟拉普拉斯能量之间具有紧密的联系,所以关于关联能量的讨论是近几年图谱理论研究的热点问题之一.更多的关于关联能量的研究,读者可以参阅文献^[7,8,21,45,48,61,72,88,94,118,119].

1.3 图的基尔霍夫指数及其衍生形式的研究背景和进展

在图论中,图 G 中任意两点 v_i 和 v_j 之间的距离,记作 d_{ij} ,定义为连接这两点的一条最短路的长度.另外一种距离是由Klein和Randić^[62]在1993年提出的,即图的**电阻距离**,记作 r_{ij} ,是指根据欧姆定律计算出的 G 中两点 i 和 j 之间的有效电阻^[62].电阻距离是定义在图上的距离函数(或度量),是图的不变量.对照这两个定义,电阻距离 r_{ij} 包含 G 中 v_i 和 v_j 之间所有路的信息,而一般距离 d_{ij} 仅仅包含 G 中 v_i 和 v_j 之间最短路的信息.正因如此,电阻距离是刻画原子之间波状的或类液的通信的强有力工具^[62].事实上,最短路是

刻画像粒子之类的物质沿着图（或网络）的边运动的一些属性，而电阻距离刻画的是像波或者液体之类的物质沿着图（或网络）的边运动的一些属性。类似于信息流、交通流和其他的类液的传输或通信等，用电阻距离来描述更符合物理的本质特征。在现实生活中，后者更能模拟问题的情景，如交通流和化学反应中的变化情况^[33]。节点之间电阻距离 r_{ij} 与这两个节点之间的最短路径条数成正比，即当两个节点之间存在较多的最短路径时，电阻距离就比较小。

图的基尔霍夫指数，记为 $Kf(G)$ ，是指图 G 中所有的顶点对之间的电阻距离的和^[62]，即

$$Kf(G) = \sum_{i < j} r_{ij}(G).$$

图的基尔霍夫指数是一个与图的拉普拉斯特征值密切相关的图的拓扑不变量。实际上，图的基尔霍夫指数与图的拉普拉斯特征值是紧密联系的，其数值可以通过图的拉普拉斯特征值得^[49,123]：

$$Kf(G) = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i},$$

其中 μ_i 是连通图的拉普拉斯特征值。这个表达式是由 I. Gutman 和 Mohar^[49,123] 通过研究电阻距离与图的拉普拉斯谱关系得到的，这个结果提供了一种用图的拉普拉斯谱来计算基尔霍夫指数的方法。同时，从表达式可以看出，图的基尔霍夫指数是与图的拉普拉斯特征值密切相关的图的不变量。基尔霍夫指数是图的一个很重要的指标，在化学上可以用来描述分子的结构特征，基尔霍夫指数也是一个很好的分子拓扑预测器^[56]。另外，从电网网络角度来看，基尔霍夫指数的大小不仅反映了网络的规模，而且也能反映网络的连通性。在给定网络规模的情况下，基尔霍夫指数越小，则网络连通性越好，同时意味着节点间的电阻距离越小，整个网络消耗的平均电能也就越少。基尔霍夫指数由于广泛地应用在物理、化学和网络科学中而备受关注^[26,42,54,55,57-59,62,73,75,99,100,107,108,116,117,121,122]。但是对于一般图的基尔霍夫指数的计算是比较困难的^[1-4,27,82]。因此，计算一些特殊的图的基尔霍夫指数就显得有意义。因为对于树，基尔霍夫指数和维纳指数是一致的。所

以一些学者研究了图中含有圈结构的基尔霍夫指数,如杨玉军等人研究了单圈图的基尔霍夫指数及其极图^[104],邓汉元等人研究了第二大和最小的单圈图的基尔霍夫指数^[120].更多的关于基尔霍夫指数的研究,请参阅文献^[11,28,53,65,77,80,95,106,124].

随着研究的深入,考虑到两端点的度的大小因素,研究中又衍生出度电阻距离和度基尔霍夫指数. I. Gutman 等人^[43]在2012年定义了度和电阻距离 $r_{ij}^+ = (d_i + d_j)r_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq n$),并在此基础上定义了图的度和基尔霍夫指数,记作 $D_R(G)$. 定义为图中所有点对之间的度和电阻距离之和,即

$$D_R(G) = \sum_{i < j} (d_i + d_j)r_{ij}(G).$$

最近已有这方面的研究,如单圈图的度电阻距离^[35,125]、仙人掌图的极小度电阻距离^[31]. 我们也对仙人掌图的度电阻距离进行了讨论^[79]. 杨玉军研究了细分图的度电阻距离^[107].

第2章 给定点二部度的图的基尔霍夫指数的极小值

图的基尔霍夫指数在物理、化学及网络科学等方面都有着广泛的应用 [11, 77, 80, 106, 124]. 设图 $G = (V(G), E(G))$ 的点集和边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$. 图 G 的点二部度 [32], 记为 v_b , 表示在图 G 中删去最少点数后使其为二部图. 设 $\mathcal{G}_{n,m}$ 表示 n 个顶点且点二部度 $v_b(G) \leq m$ 的图类, 即 $\mathcal{G}_{n,m} = \{G = (V(G), E(G)) : |V(G)| = n, v_b(G) \leq m\}$, 其中, m 为满足 $m \leq n-3$ 的自然数. 在这一章中, 我们给定了 n 个顶点的给定点二部度 ($1 \leq v_b \leq n-3$) 的图的基尔霍夫指数的极小值, 并刻画了相应的极图. 本章的主要结果已在 *Applied Mathematics and Computation* (2016) 上发表.

2.1 图的广义联操作

设图 $G = (V(G), E(G))$ 的点集和边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$, 图 G 的邻接矩阵和度对角矩阵分别为 $A(G)$ 和 $D(G)$, 则图 G 的拉普拉斯矩阵被定义为 $L(G) = D(G) - A(G)$, 其所有的特征值构成了图的拉普拉斯谱 $\sigma(L(G)) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. 图 G 的顶点子集 $S \subseteq V(G)$ 的诱导子图, 记为 $\langle S \rangle$, 其

点集为 S , 边集 $E(\langle S \rangle) = \{uv : u, v \in S, uv \in E(G)\}$. 图 G 的补图, 记为 $\overline{G}$, 其点集 $V(\overline{G}) = V(G)$, 边集 $E(\overline{G}) = \{uv : uv \notin E(G)\}$.

通常地, 任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2 的联图记为 $G_1 \vee G_2$, 其点集为

$$V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2),$$

其边集为 $E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$.

一种新的图的广义联操作^[13]被定义如下:

设 $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ 为没有公共点的图序列, 其中 G_i 的阶为 n_i ($1 \leq i \leq k$). 设 H 的点集为 $V(H) = \{1, \dots, k\}$, 每个点 $i \in V(H)$ 被分配到 $G_i \in \mathcal{F}$, 则图 $G_1, \dots, G_k$ 的 H -联为 $G = H(G_1, \dots, G_k)$ 使得

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^k V(G_i)$$

且

$$E(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k E(G_i) \right) \cup \left(\bigcup_{rs \in H} \{uv \mid u \in V(G_r), v \in V(G_s)\} \right).$$

注 如果 $H = K_2$, 那么 H -联就是通常的图的联操作. 值得注意的是, 同样的广义联操作在文献^[13]中也有介绍.

2.2 一些引理

下面介绍在后面的主要结果的证明中要使用的一些引理.

引理 2.1^[59] 如果图 G^+ 是由图 G 中增加一条新的边而得到的图, 那么

$$Kf(G^+) < Kf(G).$$

图的拉普拉斯谱与基尔霍夫指数有个经典的结果如下: