高 等 学 校 教 材

应用随机过程

Applied Stochastic Processes

韩东　王桂兰　熊德文

高等教育出版社

高等学校教材

应用随机过程

Yingyong Suiji Guocheng

韩　东　王桂兰　熊德文

高等教育出版社·北京

内容提要

本书着重从应用的角度介绍几类基本的随机过程及其理论和方法，内容主要包括概率论的一些基本知识、随机过程的基本概念、泊松过程、马尔可夫过程、鞅论、布朗运动、随机分析基础、平稳过程。全书重点突出，图文并茂，注重各类随机过程的背景与应用。

本书既可作为理工类高年级本科生和经济管理类研究生的入门教材，也可作为学生、教师、科研与工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/韩东，王桂兰，熊德文编.--北京：高等教育出版社，2016.9

ISBN 978-7-04-046008-7

Ⅰ.①应… Ⅱ.①韩… ②王… ③熊… Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第173790号

策划编辑 胡 颖　责任编辑 胡 颖　封面设计 赵 阳　版式设计 童 丹
插图绘制 郝 林　责任校对 胡美萍　责任印制 耿 轩

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 煤炭工业出版社印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 13
字 数 230千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 2016年9月第1版
印 次 2016年9月第1次印刷
定 价 27.50元

物 料 号 46008-00

引　言

通俗地讲，随机过程就是一个或多个随机事件、随机系统或随机现象随时间发生演变的过程。如果说概率论是研究“静态”随机现象的统计规律，那么随机过程论就是研究“动态”随机现象的统计规律。一般认为，随机过程的研究最早起源于对物理学的研究，如吉布斯 (Gibbs)、玻尔兹曼 (Boltzmann)、庞加莱 (Poincaré) 等人对统计力学的研究，以及后来爱因斯坦 (Einstein)、维纳 (Wiener)、莱维 (Lévy) 等人对布朗运动的研究。1907 年前后，马尔可夫 (Markov) 研究了有特定相依性的随机变量序列，后人称之为马尔可夫链。随机过程一般理论的研究通常认为开始于20世纪30年代。1931 年，柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 发表了《概率论的解析方法》，1934 年，辛钦 (Khinchin) 发表了《平稳过程的相关理论》，这两篇著作奠定了马尔可夫过程与平稳过程的理论基础。1953 年，杜布 (Doob) 的《随机过程论》一书系统地叙述了随机过程的基本理论。可以说，柯尔莫哥洛夫和杜布奠定了随机过程的理论基础。半个多世纪以来，随机过程的理论以其强大的生命力不断地丰富和发展，而它的应用也广泛渗透到自然界和人类社会的各个领域。

随机过程的理论非常丰富，我们只能有所取舍、有所侧重地来介绍。本书着重从应用的角度介绍几类基本的随机过程及其理论和方法，主要包括：泊松过程、马尔可夫过程、鞅论、布朗运动、随机微分方程以及平稳过程。由于金融数学的需要，本书非常详细地介绍了布朗运动、随机积分、伊藤公式及其在金融中的应用。鉴于布朗运动、随机积分对于本科生来说有点抽象，本书在必要的地方加了一些图像，让学生能够直观感受到随机过程的魅力。此外，为了让读者更多地了解课堂教学之外的知识，我们在书中每章都加有“补充与注记”一节。本书力求做到以下几点:

(1) 着重阐明基本概念、模型和方法的实际背景和来源;

(2) 强调用概率思想和观点来阐述基本原理和方法;

(3) 着眼于理论联系实际，通过典型的应用实例学习掌握理论和方法的要义。

尽管本书的初稿曾在研究生和高年级本科生中以讲义的形式使用过多年，

并多次修改, 但限于作者水平, 书中的内容安排、陈述方式以及文字叙述恐有不妥, 敬请读者批评指正。

作 者

2016 年 4 月

目　录

第一章　预备知识——概率论精要

§1.1　概率的公理化与概率空间

§1.1.1　概率的公理化

• 随机现象: 在一定条件下, 并不总是出现相同结果的现象.

• 样本空间: 随机现象所有可能的基本结果 (样本点) 组成的空间, 记为Ω.

• 随机事件: 随机现象的某些基本结果组成的集合, 或者说是样本空间的某些样本点组成的集合.

• 事件域 (σ 代数): 称 Ω 的某些子集所组成的集合类 $\mathscr{F}$ 为**事件域**, 如果它满足

$$\begin{cases} \Omega \in \mathscr{F}, \\ A \in \mathscr{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathscr{F}, \\ A_k \in \mathscr{F} \Longrightarrow \bigcup A_k \in \mathscr{F}. \end{cases}$$

所谓**概率**, 通俗地讲就是一个随机事件发生的可能性大小的度量. 20 世纪 30 年代, 柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 在概率的频率极限定义、古典定义、几何定义的基础上给出了如下的概率公理化定义.

• 概率的公理化定义: 设 Ω 是一个样本空间, $\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集所组成的一个事件域. 称定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数 $P:\mathscr{F}\longrightarrow[0,1]$ 为**概率**, 如果它满足:

$$\begin{cases} (\text{非负性公理}) \quad \forall A \in \mathscr{F}, P(A) \geqslant 0, \\ (\text{正则性公理}) \quad P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1, \\ (\text{可列可加性公理}) \quad \forall i \neq j, A_i \bigcap A_j = \varnothing, P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i). \end{cases}$$

• 概率空间: 称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

§1.1.2　概率空间举例

例 1.1.1　掷一枚均匀的骰子, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,
$\mathscr{F}=\{\Omega$ 的所有子集$\}$

$$= \{\ \varnothing, (\omega_1), \cdots, (\omega_6), (\omega_1, \omega_2), \cdots, (\omega_5, \omega_6), \cdots, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)\ \},$$

$$|\mathscr{F}| = \mathrm{C}_6^0 + \mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_6^6 = 2^6.$$

一般地, 对有限的样本空间 Ω 和其上的最大的事件域 $\mathscr{F}$, $|\mathscr{F}| = 2^{|\Omega|}$.

例 1.1.2　某电话机交换台在某一单位时间 (小时、天、$\cdots$) 可能收到的呼叫次数为 $0, 1, 2, \cdots$. 可取 $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathscr{F} = \{\Omega$ 的所有子集$\}$. 易验证 $\mathscr{F}$ 为事件域且包含不可数无穷多个集合. 若呼叫次数服从泊松 (Poisson) 分布, 记 $A_k = \{$ 呼叫次数为 $k\}$, $B_k = \{$ 呼叫次数超过 $k\}$, 则

$$P(A_k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k \geqslant 0.$$

而

$$P(B_k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

例 1.1.3　在直线段 (a, b) 上投质点, 它所有可能的落点的位置为 $\Omega = (a, b)$ 上的点, 可取 $\mathscr{F} = \mathscr{B}((a, b)) = \mathscr{B}(\Omega) = \{(a, b)$ 上所有开子区间经过可列多次交、并及逆运算所形成的子集的全体$\}$. 设 $(c, d) \in \mathscr{F}$, 则 $P((c, d)) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

- 等可能概型: 古典概型 (有限)+ 几何概型 (无限). 如对事件 A,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

其中 $m(A)$ 表示 A 的测度 (measure).

§1.2　条件概率、独立性与概率计算

§1.2.1　条件概率与独立性

- 条件概率: 设 A, B 为两个随机事件, 称

$$P(A|B) := \frac{P(BA)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$$

为已知事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

若 $P(B) > 0, P(A) > 0$, 则有

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)(= P(AB)).$$

- 独立: 设 A, B 为两个随机事件, 若

$$P(BA) = P(B)P(A),$$

即 $P(A) = P(A|B)$, 则称事件 A 与 B **相互独立**, 简称 A 与 B **独立**.

§1.2.2 概率的性质与计算

- $P(\bigcup A_i) = 1 - P(\bigcap \overline{A_i})$.
- $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 注: $A \bigcup B = (A - AB) + B$.
- 加法公式:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \cdots + \\ & (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n). \end{aligned}$$

例 1.2.1 有 N 个考签, $n(n \geqslant N)$ 个学生有放回地抽取, 问 N 个考签都被抽到的概率?

解 设 A_i 表示随机事件“第 i 个考签被抽到”,$i = 1, 2, \cdots, N, B = A_1A_2\cdots A_N$, 则

$$P(B) = 1 - P\left(\overline{A_1A_2\cdots A_N}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right),$$

$$P(\overline{A_i}) = \frac{(N-1)^n}{N^n},$$

$$P\left(\overline{A_i} \bigcap \overline{A_j}\right) = \frac{(N-2)^n}{N^n}, i \neq j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P\left(\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \cdots \bigcap \overline{A_{N-1}}\right) = \frac{1}{N^n},$$

$$P\left(\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \cdots \bigcap \overline{A_N}\right) = 0,$$

$$P(B) = 1 - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{C}_N^k (-1)^{k-1} \frac{(N-k)^n}{N^n}.$$ □

- 次可加性: $P(\bigcup A_i) \leqslant \sum P(A_i)$.
- 乘法公式: 若 $P(A_1A_2\cdots A_n) > 0$, 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\cdots P(A_n|A_{n-1}\cdots A_1).$$

例 1.2.2　有 N 把钥匙, 只有一把能开房门, 随机不放回地抽取钥匙开房门, 求恰好第 n $(n \leqslant N)$ 次打开房门的概率.

解　设 A_n 为随机事件“恰好第 n 次打开房门”, 则

$$\begin{aligned}
&P(\text{“恰好第}n\text{次打开房门”})\\
&= P(\overline{A_1}\cdots\overline{A_{n-1}}A_n)\\
&= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_2}\bigcap\overline{A_1})P(\overline{A_{n-1}}|\overline{A_{n-2}}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_1})\cdot\\
&\quad P(A_n|\overline{A_{n-1}}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_1})\\
&= \frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\cdots\frac{N-(n-1)}{N-(n-2)}\frac{1}{N-(n-1)}\\
&= \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

□

- 全概率公式: 若 $\bigcup B_i \supset A, \forall i \neq j, B_i \bigcap B_j = \varnothing, P(B_i) > 0$, 则

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i).$$

例 1.2.3　设某一虫类能生产虫卵的个数服从泊松分布, 即

$$P(B_n) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

如果有 n 个虫卵, 且 n 个虫卵恰好蜕变成 m 个幼虫的概率服从二项分布:

$$P(A_m|B_n) = \mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}, m = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

求此虫类下一代恰好产生 k 个幼虫的概率.

解　由全概率公式, 有

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)P(A_k|B_n) = \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

□

- 逆概率公式 (贝叶斯公式):

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum\limits_k P(B_k)P(A|B_k)}.$$

全概率公式: 原因 $\longrightarrow$ 结果; 逆概率公式: 结果 $\longrightarrow$ 原因.

§1.3 随机变量、分布函数与数字特征

§1.3.1 随机变量

$X(\omega)$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的实值函数, 若对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$, 则称 X 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个**随机变量**, 而

$$F(x)=P(\{\omega: X(\omega)\leqslant x\})=P(X\leqslant x)$$

称为随机变量 X 的**分布函数**.

n **维随机变量**: $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 若满足

$$\{\omega: X_1(\omega)\leqslant x_1, X_2(\omega)\leqslant x_2,\cdots,X_n(\omega)\leqslant x_n\}\in\mathscr{F},$$

则称其为 n **维随机变量**. 它具有 n 维分布函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n).$$

• 二维随机变量 (X,Y) 的边缘分布:

$$F(x,+\infty)=F_X(x), F(+\infty,y)=F_Y(y).$$

类似可以定义 n 维随机变量的边缘分布.

§1.3.2 分布函数的性质

(1) $F(+\infty,+\infty,\cdots+\infty)=1, F(x_1,\cdots,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},\cdots,x_n)=0$;

(2) 单调增、右连续性: 固定其他变量, 关于每个变量单调增、右连续;

(3) 若 $X_k, 1\leqslant k\leqslant n$ 独立, 则 $F(x_1,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$.

取值至多可数的随机变量称为**离散**随机变量, 常见的离散随机变量的分布有

• 0–1 分布: 若随机变量 X 的分布律是

$$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p, 0<p<1,$$

则称 X 服从以 p 为参数的 0–1 **分布**.

• 二项分布: 若随机变量 X 的分布律是

$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ 0\leqslant k\leqslant n, 0<p<1,$$

则称 X 服从参数为 n,p 的**二项分布**, 记为 $X\sim B(n,p)$.

• 几何分布: 若随机变量 X 的分布律是

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\ k\geqslant 1, 0<p<1,$$

则称 X 服从以 p 为参数的几何分布.

- 泊松分布: 若随机变量 X 的分布律是

$$P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k\geqslant 0, \lambda>0,$$

则称 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**, 记为 $X\sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

如果随机变量 X 的分布函数满足

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 X 为**连续**随机变量,

$$F'(x)=f(x)$$

称为**密度函数**. 类似可以定义多维连续随机变量:

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n,$$

$f(t_1,\cdots,t_n)$ 称为**联合密度函数**. 常见的连续随机变量的分布有

- 均匀分布: 若连续随机变量 X 具有密度函数

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant t\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a,b]$ 上服从**均匀分布**, 记为 $X\sim U[a,b]$.

- 指数分布: 若连续随机变量 X 具有密度函数

$$f(t)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases}\ (\lambda>0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的**指数分布**, 记为 $X\sim E(\lambda)$.

- 正态分布: 若连续随机变量 X 的密度函数为

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

则称 X 服从参数为 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 的**正态分布**, 记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$; 二维正态分布的联合密度函数为

$$f(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(t_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(t_1-\mu_1)(t_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(t_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

$$-\infty<t_1,t_2<+\infty,\mu_i\in\mathbb{R},\sigma_i>0,|\rho|<1,$$

记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

§1.3.3 随机变量函数的分布函数与密度函数

♣ 随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**顺序统计量**记为 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$, 关于顺序统计量的分布, 有

(1) 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立, 记 $F_k(x)=P(X_k\leqslant x)$, 则

$$F_{(n)}(x)=P(X_{(n)}\leqslant x)=P(X_1\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x)=\prod_{k=1}^n F_k(x),$$

$$F_{(1)}(x)=P(X_{(1)}\leqslant x)=1-P(X_1>x,\cdots,X_n>x)=1-\prod_{k=1}^n[1-F_k(x)].$$

(2) 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布, 密度函数为 $f(x)$, 则顺序统计量 $(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$ 的联合密度函数 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{cases} n!\prod\limits_{k=1}^n f(y_k), & 0<y_1<y_2<\cdots<y_n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

§1.3.4 数字特征

(1) 数学期望 (均值): 设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$, 如果 $\int_{\mathbb{R}}|x|\mathrm{d}F_X(x)<+\infty$, 则称

$$E(X):=\int_{\mathbb{R}}x\mathrm{d}F_X(x)=\begin{cases}\sum x_iP(X=x_i),\\ \int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\end{cases}$$

为随机变量 X 的**数学期望**.

易知数学期望具有如下性质:

$$E(g(X))=\int_{\mathbb{R}}g(x)\mathrm{d}F_X(x);$$

$$E(g(X_1,\cdots,X_n))=\int_{\mathbb{R}^n}g(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}F_X(x);$$