普通高等教育“十二五”规划教材

微积分

郭卫华　王　霞　主编

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

微 积 分

主 编 郭卫华 王 霞

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

全书共10章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程与差分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数的微积分、无穷级数.

本书可作为普通高等学校本科经管、财经和文科类各专业微积分课程教材，也可供高职高专院校根据专业需求自行选用.

图书在版编目 CIP 数据

微积分/郭卫华，王霞主编. —北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-038528-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①郭… ②王… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第207924号

责任编辑：相 凌 李香叶／责任校对：张小霞
责任印制：肖 兴／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2013年9月第一次印刷 印张：19 1/2
字数：511 000

定价：40.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

本书遵循微积分教学基本要求，在广泛调查研究的基础上，结合高等教育改革的新形势，以及编者多年的教学经验，尽量吸取微积分教学改革成果和国内外诸多同类优秀教材的精华编写而成.

本书有四大特点：一是力求适合素质教育，重视问题的几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用能力和创新精神；二是内容阐述简明扼要，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是章、节例题设计实用，书中选取较多的例题和习题，对例题的讲解着重思路分析和解题规律的总结；四是本书配备的各类题型都是精心设计的，有掌握基本知识、基本方法和基本技巧的习题，有巩固提高的习题，每章结束还设计了复习题.配备复习题是为了强化全章知识，综合运用所学知识，通过训练达到能力提升的目的而设置.而且在各类题型中均设计了一定量的贴近生活、贴近实际的应用题，以增强学生综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为学生学习后续课程和进一步获得专业知识奠定必要的数学基础.

本书结构严谨，叙述较为详细，语言力求准确，文字通俗易懂，既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性.与以往所用教材相比，本书改善了过去教材覆盖面小，习题配备难度大且不配套等不适合学生学习的内容，使学生在课堂上不但能学到必要的基础知识，而且训练了基本技能，能力得到普遍提高.很多现代化知识的加入，为学生进一步深造和就业奠定良好的基础.

本书由郑州轻工业学院郭卫华、王霞担任主编，辛向军、周树克、李清波、赵玲玲、李春担任副主编.

由于编者水平有限，书中的不妥和疏漏之处，敬请读者不吝指教，提出宝贵的批评和建议，以便我们进行改正.

编　者

2013 年 6 月

目　录

第1章 函　数

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的一个数学概念.函数描述了现实世界中各种变量之间的相互依赖关系，是微积分研究的基本对象.本章将给出函数的概念和基本性质，并介绍经济学中一些常见的函数.

1.1　函数的概念

1.1.1　集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，一般地，我们将具有某些确定性质的对象组成的总体，称为集合(简称集)，通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 或带下标的大写字母 $A_1,B_1,\cdots$ 表示，集合中的各个对象称为集合的元素，通常用小写字母 $a,b,\cdots$ 或带下标的小写字母 $a_1,b_1,\cdots$ 表示.如果 a 是集合 A 的一个元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A，否则记作 $a\notin A$.

我们把不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$；把所研究问题的全体元素组成的集合称为全集，记为 I；含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限多个元素的集合称为无限集.

集合的表示方法通常有两种.

一种是列举法(枚举法)，就是将集合中的元素全部列出，写在一个花括号内，元素间用逗号隔开.例如，$A=\{a,b,c,d\}$，$N=\{0,1,2,\cdots\}$.用列举法表示集合时，一般对元素之间的次序没有要求，对重复的元素通常看作同一个元素，在集合中用到省略号时，省略的部分必须满足一般的可认知性.

一种是描述法，一般形式是 $A=\{x\mid p(x)\}$，其中 x 表示 A 中的元素，$p(x)$ 表示 A 中的元素 x 所具有的特征.例如，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$ 表示大于等于 3 且小于等于 5 的全体实数的集合.一般在不致混淆的情况下，可以省去“$x\in\mathbf{R}$”，记成 $B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 5\}$.

如果集合中的元素都是数，则称其为数集.有时我们在表示数集的字母的右上角标上“+”或者“−”来表示该数集是由所有正数或者负数构成的特定子集.常用的数集及其符号表示有以下几种.

全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.全体正整数的集合记为 $\mathbf{N}^+$，即 $\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$；

全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

集合之间有以下几种关系.

定义 1.1　如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的一个子

集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B，或 B 包含 A.

定义 1.2 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$，否则记为 $A\neq B$.

定义 1.3 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的一个真子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

在后面的许多问题的讨论中，我们往往将问题限定在某两个实数之间的一部分实数范围内，为了简便地表示这部分实数集合，我们引入区间和邻域的概念.

若实数 $a<b$，满足条件 $a<x<b$ 的全体实数构成的集合称为一个开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数所构成的集合称为一个闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.类似地，可以定义半开半闭区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度.

除上面的有限区间外，还可以定义无限区间

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\};\quad (a,+\infty)=\{x\mid x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}.$$

有些情况下，我们不需要指出所讨论的区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间，此时简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

下面给出邻域的概念.

定义 1.4 以点 x_0 为中心，$\delta(\delta>0)$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

有些情形下不要求指出邻域的半径，则可以简单记作 $U(x_0)$，称为点 x_0 的某个邻域.

我们还可以定义以点 x_0 为中心 δ 为半径的去心邻域：

$$\mathring{U}(x_\delta,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

它不包含邻域中心 x_0.

1.1.2 函数的概念

在自然科学和工程技术中，常常会遇到这样的两种量，常量和变量.在某一变化过程中保持不变的量称为常量，常用 $a,b,c,\cdots$ 表示；在某一变化过程中不断变化的量称为变量，常用 $x,y,z,\cdots$ 表示.

例 1.1 一个物体在做自由落体运动过程中，物体经过的路程 s 与时间 t 之间的对应关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出，其中重力加速度 g 为常量，而路程 s 与时间 t 均为变量.

例 1.2 一根导线在输送的过程中，电压 U 与电流 I 之间的对应关系满足欧姆定律(设电阻值保持不变)

$$I=\frac{U}{R}\text{或}U=RI,$$

其中电阻 R 为常量，而 I 与 U 均为变量.

例 1.3 圆的面积 A 与它的半径 r 之间的对应关系为

$$A=\pi r^2,$$

其中 π 为常量，而 A 与 r 均为变量.

定义 1.5　设 x 与 y 是两个变量，D 为非空数集.若对 D 中的每一个数 x，变量 y 按照一定的对应关系 f 总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的(单值)函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$.x 称为自变量，y 称为因变量，自变量的取值范围 D 称为这个函数的定义域.

当 x 在定义域 D 内取值 x_0 时，对应的 y 的数值为函数在点 x_0 处的函数值，记为 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$.

当 x 取遍 D 内的一切数值时，对应函数值的集合 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

例 1.4　设 $f(x)=3x^2+1$，求 $f(0)$，$f(-2)$ 及 $f(a+1)$.

解　由函数的定义可知

$$f(0)=3\cdot 0^2+1=1,$$
$$f(-2)=3\cdot(-2)^2+1=13,$$
$$f(a+1)=3\cdot(a+1)^2+1=3a^2+6a+4.$$

例 1.5　设 $f(x-1)=x^2-3x+2$，求 $f(x+1)$.

解　令 $u=x-1$，则 $x=u+1$，所以 $f(u)=(u+1)^2-3(u+1)+2$，即

$$f(x)=(x+1)^2-3(x+1)+2.$$

所以

$$f(x+1)=(x+2)^2-3(x+2)+2=x^2+x.$$

注　在函数的定义中有两个基本要素：

(1)自变量的取值范围，即函数的定义域；

(2)自变量与因变量之间的对应关系.

当两个函数的定义域相同，对应关系也相同时，我们将这两个函数视为同一个函数.

例 1.6　判断下列函数是否相同.

(1) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$；

(3) $f(x)=x$ 与 $g(x)=x\cos^2 x+x\sin^2 x$.

解　(1)由于 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与函数 $f(x)=x$ 的对应关系不同，所以这两个函数不相同.

(2)在函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 中，$x\neq 0$ 与函数 $f(x)=x$ 的定义域不同，故两个函数不相同.

(3) $g(x)=x\cos^2 x+x\sin^2 x=x$ 与函数 $f(x)=x$ 的定义域和对应关系相同，故这两个函数相同，即 $f(x)=g(x)$.

1.1.3　函数的定义域

定义域一般分为两种情况：

(1)在实际问题中，函数的定义域是根据实际意义确定的，称为实际定义域，如自由落体运动函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中的时间 t 必须满足 $t\geqslant 0$ 才有意义，即函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$.

(2)对于用数学解析式表示的函数，如果不考虑它的实际意义，那么使函数表达式有意义

的一切实数组成的集合就是函数的定义域，称为自然定义域，简称为定义域. 例如，函数 $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$（g 是常数），它的定义域为实数集.

例 1.7 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x+1)}$ 的定义域.

解 要使得函数有意义，要求自变量必须满足：

$$\begin{cases}2x+1>0,\\ 2x+1\neq 1,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2},\\ x\neq 0,\end{cases}$$

则函数的定义域为 $D=\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$.

1.1.4 几个特殊函数

例 1.8 绝对值函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z=[0,+\infty)$（图 1.1）.

如果一个函数在其定义域的不同子集上，用不同的解析式表示，这样的函数称为分段函数，相应的子集的共同端点称为该函数的分段点. 需要注意的是，尽管在不同的区间内函数的表达式不同，但它们是一个整体，是一个函数，而不是几个函数.

例 1.9 符号函数

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D(-\infty,+\infty)$，值域为 $R=\{-1,0,1\}$（图 1.2）.

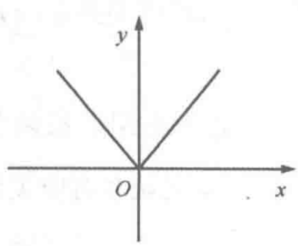


图 1.1

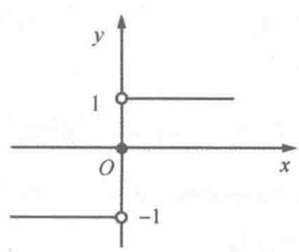


图 1.2

例 1.10 取整函数

$$y=f(x)=[x],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，即若 $x=n+r,n\in\mathbf{Z},0\leqslant r<1$，则$[x]=n$. 其定义域为$D=\mathbf{R}$，值域为 $R=\mathbf{Z}$（整数集）（图 1.3）.

例 1.11 用解析法给出如图 1.4 所示的函数.

解 这是定义在$[-2,2]$上的函数，当 $x\in[-2,0)$时，$y=x$；当 $x=0$ 时，$y=1$；当

$x\in(0,2]$时，$y=2-x$，所以

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-2,0),\\ 1, & x=0,\\ 2-x, & x\in(0,2].\end{cases}$$

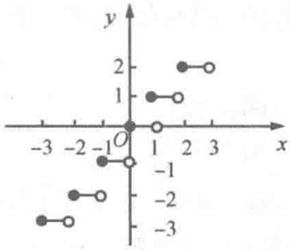


图 1.3

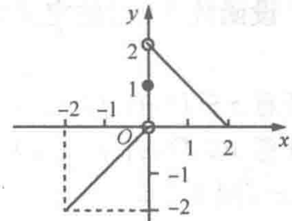


图 1.4

例 1.12 设汽车从 A 出发以 30km/h 匀加速开往 B，前进 2h 后，又匀速前进，再经过 7h 后又以 30km/h 匀减速经 2h 后到达 B.将汽车在这段时间内运行的速度和位移表示成时间的函数.

解 由题意可知，当 $0\leqslant t\leqslant 2$ 时做匀加速运动，$2<t\leqslant 9$ 时做匀速运动，$9<t\leqslant 11$ 时做匀减速运动直至到达 B，则速度函数为

$$v(t)=\begin{cases}30t, & 0\leqslant t\leqslant 2,\\ 60, & 2<t\leqslant 9,\\ 60-30(t-9), & 9<t\leqslant 11.\end{cases}$$

位移函数为

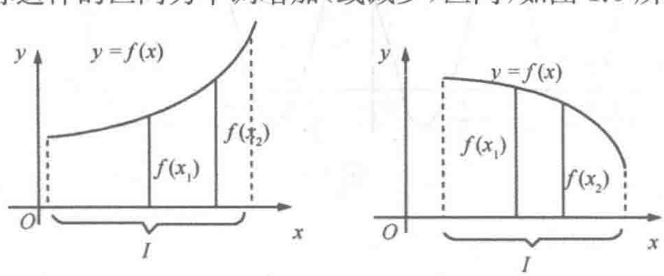
$$s(t)=\begin{cases}15t^2, & 0\leqslant t\leqslant 2,\\ 60(t-1), & 2<t\leqslant 9,\\ 60(t-1)-15(t-9)^2, & 9<t\leqslant 11.\end{cases}$$

1.1.5 函数的几种特性

1.函数的单调性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$，如果对某区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$在 I 内是**单调增加**(**或单调减少**)的，也称为**单调递增**(**或单调递减**).

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.一个函数在其定义域内某区间上是单调增加(或减少)的，我们称这样的区间为单调增加(或减少)区间，如图 1.5 所示.



(a) 单调增加　　(b) 单调减少

图 1.5 函数的单调区间

例如，函数 $y=x$ 是单调增加函数，$y=-x$ 是单调减少函数，取整函数 $y=[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调非减函数，但不是单调增加函数.区间 $(-\infty,0]$，$[0,+\infty)$ 分别是函数 $y=x^2$ 的单调减少区间和单调增加区间.

2.函数奇偶性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的(即对任意的一个 $x\in D$，必存在 $-x\in D$).

(1)若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2)若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$y=x^2$(图 1.6)，$y=c$，$y=x^{2n}$，$y=\cos x$ 等为偶函数；$y=x^3$(图 1.7)，$y=x$，$y=x^{2n+1}$，$y=\sin x$ 等为奇函数.但是，并非任何函数都具有奇偶性，如函数 $y=\cos x+\sin x$ 既不是偶函数也不是奇函数.

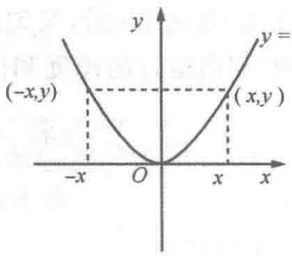


图 1.6

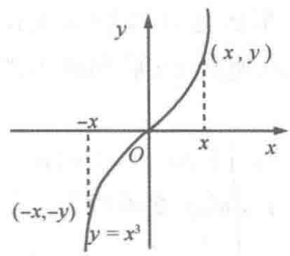


图 1.7

我们指出，偶函数和奇函数的图形有如下特点：

(1)偶函数的图形关于 y 轴对称；

(2)奇函数的图形关于原点对称.

3.函数周期性

定义 1.8 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，若存在正数 l，使得对任意 $x\in D$，有

$$x\pm l\in D,\quad 且\ f(x\pm l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，其中满足上述条件的最小的正数 l 称为 $f(x)$ 的最小正周期，通常简称周期.在本书中，除特别声明外周期均指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期，$\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期为 l 的函数在长度为 l 的区间上有着相同的图形.如图 1.8 所示.

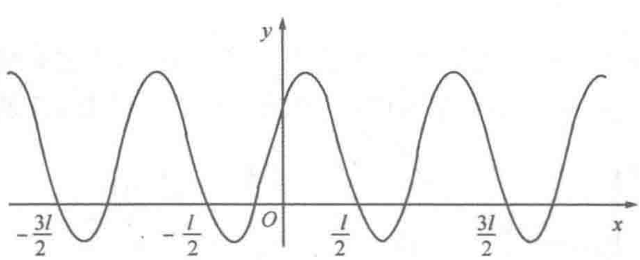


图 1.8

4.有界性

定义 1.9 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，并称函数 $y=f(x)$ 为区间 I 上的有界函数.

若不存在这样的正数 M,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界,函数 $y=f(x)$ 为 I 上的无界函数.

如函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\arcsin x$ 在其定义域上都是有界的,而函数 $y=\tan x$, $y=x$ 在其定义域上无界.

例 1.13 判断下列函数在定义域上是否有界?

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

(2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $f(x)=\arctan x$.

解 (1)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,在任何不含 $x=0$ 的闭区间和不以 $x=0$ 为区间端点的开区间内是有界的.例如,在 $(1,2)$ 内是有界的,因为这时可以取 $M=1$;但是,在任何以 $x=0$ 为端点的开区间内是无界的.例如,在 $(0,1)$ 是无界的,所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在定义域内是无界的.

(2)因为 $x\neq0$ 时,$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$,所以定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,故 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内有界;

(3)因为 $f(x)=\arctan x$, $D=\mathbf{R}$,对任意 $x\in D$ 均有 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 在 D 内有界.

习题 1.1

1.已知函数 $f(x)=ax+b$,且 $f(2)=1$, $f(-1)=0$,求 a 与 b 的值.

2.判断下列每对函数是否相同?

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2}$;　　(2) $f(x)=1$, $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$;

(3) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{|x|^2}$;　　(4) $f(x)=e^{\ln x}$, $g(x)=x$.

3.求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{5x}{x^2-3x+2}$;　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;　　(4) $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$;

(5) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(6) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

4.设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^3, & x<0.\end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$.

5.已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f[f(x)]$.

6.判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

(3) $f(x)=\frac{|x|}{x}$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ 0, x=0,\\ 1, x>0.\end{cases}$

7.作出下列函数的图像.

(1) $f(x)=|x+1|$；　　(2) $f(x)=|x^2-4x+1|$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant -1,\\ x^2, & -1<x<2,\\ 2x, & x\geqslant 2;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$

8.判断下列函数在其定义域内的单调性.

(1) $y=2x+1$； (2) $y=x^2-2x+3$； (3) $y=e^{-x+1}$； (4) $y=\ln(x+1)$.

9.下列函数中，哪些函数在其定义域内有界？

(1) $y=\sin^2 x$； (2) $y=\frac{1}{1+x^2}$； (3) $y=\ln(x+1)$； (4) $y=\arctan x$.

1.2 反函数、复合函数和初等函数

1.2.1 反函数

定义 1.10 设函数 $y=f(x), x\in D$ 的值域为 W.如果任给 W 中的一个元素 y，可以在 D 中找到唯一的 x 与之对应.这样又可以确定一个 W 到 D 的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y), y\in W$，函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

一般地，习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把函数 $y=f(x), x\in D$ 的反函数改写成 $y=f^{-1}(x), x\in W$.

由反函数的定义可以看出直接函数实际上也是其反函数的反函数，所以我们通常也称 $y=f(x), x\in D$ 和 $y=f^{-1}(x), x\in W$ 互为反函数.

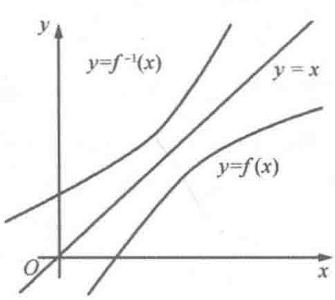


图 1.9

互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.9 所示.

例 1.14 求下列函数的反函数.

(1) $y=3x-1, x\in \mathbf{R}$；

(2) $y=-\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

解 (1)为求其反函数，先解出 $x=\frac{1}{3}(y+1)$，再把 x 和 y 对调，得到反函数

$$y=\frac{1}{3}(x+1),\quad x\in \mathbf{R}.$$

(2)它的值域是 $(-\infty,0]$，先解出 $x=y^2$，所以反函数是 $y=x^2, x\in(-\infty,0]$.

注 并不是每个函数都存在反函数，如 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数.这是因为在区间 $(-\infty,0)$ 内反解出 $x=-\sqrt{y}$，此时有反函数 $y=-\sqrt{x}$.但在区间 $[0,+\infty)$ 上反函数为 $y=\sqrt{x}$，所以函数 $y=x^2$ 在定义域上不存在反函数，那么函数在什么条件下才存在反函数呢？下面我们给出反函数存在的条件.

定理 1.1(反函数存在定理) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调函数，则在区间 I 上存

在反函数,而且反函数与直接函数具有相同的单调性.

1.2.2 复合函数

定义 1.11 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 R_φ,当满足 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$ 时,称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数,变量 u 称为中间变量.

利用函数的复合运算的规则,还可以将三个或三个以上函数构成复合函数;反之,也可以将一个复合函数分解为几个简单函数.但必须注意的是,函数之间的复合是有条件的,不是任意两个函数都能复合的.例如,函数 $y=\sin^2(\log_2 x)$ 就是由三个函数 $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=\log_2 x$ 复合而成的关于 x 的复合函数;若 $y=f(u)=\log_5 u$,$u=\varphi(x)=-1+\sin x$,则 $y=\log_5(-1+\sin x)$ 并不是一个函数,因为 $D_f=(0,+\infty)$,$R_\varphi=[-2,0]$,$D_f\cap R_\varphi=\varnothing$,所以两个函数不能构成复合函数.

例 1.15 设 $y=f(u)=\sqrt{1+u}$,$u=\varphi(x)=x^2-5$,求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 因为 $D_f=[-1,+\infty)$,$R_\varphi=[-5,+\infty)$,$D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,所以两个函数可以复合.

由复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 直接求其定义域,这里 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{x^2-4}$,要求 $x^2-4\geqslant 0$,即定义域为 $D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

例 1.16 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 由复合函数的定义可得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1,\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$$

当 $\varphi(x)<1$ 时,或者 $x<0$,$\varphi(x)=x+2<1$,得 $x<-1$;或者 $x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1<1$,得 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时,或者 $x<0$,$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,得 $-1\leqslant x<0$;或者 $x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,得 $x\geqslant\sqrt{2}$.

于是

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

1.2.3 基本初等函数

我们在中学学过常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,并研究了它们的性质和图像,这些函数都是我们经常用到的函数,称为基本初等函数,下面回顾一下这些函数的图像和简单性质.

1.常数函数

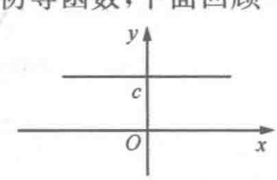


图 1.10

函数 $y=c$(c 为常数)称为常数函数,其定义域为实数集,常数函数是偶函数,其图像是一条直线,且关于 y 轴对称,如图 1.10

所示.

2.幂函数

函数 $y=x^{\alpha}$(α 是常数)称为幂函数.

幂函数的定义域与 α 有关,当 $x>0$ 时函数总有意义;且当 $x>0$ 时,函数是单调的,都经过点(1,1).

当 α 为偶数时,函数 $y=x^{\alpha}$ 是偶函数,其图像关于 y 轴对称;当 α 为奇数时,函数 $y=x^{\alpha}$ 是奇函数,其图像关于原点对称;当 $\alpha<0$ 时,图像在 $x=0$ 处无意义.

我们画出了常见的几种幂函数的图像.图 1.11 给出了 $y=x$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ 的图像,图 1.12 给出了 $y=x^3$ 的图像,图 1.13 给出了 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像,图 1.14 给出了 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的图像.

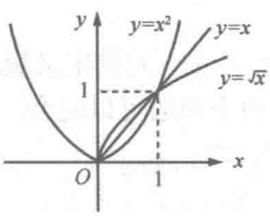


图 1.11

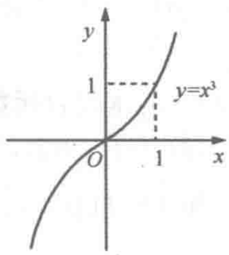


图 1.12

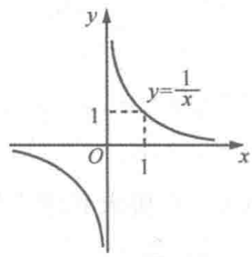


图 1.13

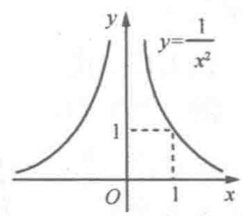


图 1.14

3.指数函数

函数

$$y=a^x\text{(}a\text{ 为常数},a>0\text{ 且 }a\neq 1\text{)}$$

称为指数函数.

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,总经过点(0,1)且函数的图像总在 x 轴的上方,即$a^x>0$.

当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 是单调递增的;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 是单调递减的,如图 1.15 所示.

指数函数中,常见的是以常数 e 为底的指数函数 $y=e^x$,这里 $e=2.71828182\cdots$.

4.对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数,记为

$$y=\log_a x\text{(}a\text{ 为常数},a>0\text{ 且 }a\neq 1\text{)}$$

称为对数函数.

对数函数的定义域为$(0,+\infty)$,其图像总经过点(1,0).当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 是单调递增的;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 是单调递减的,如图 1.16 所示.

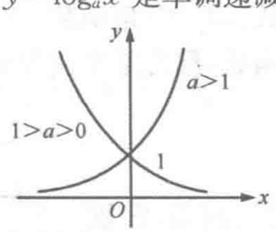


图 1.15

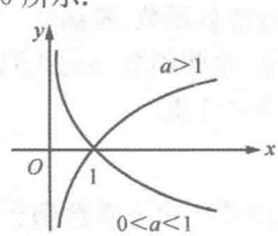


图 1.16

对数函数中，常见的是以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，称为自然对数函数，简记为 $y=\ln x$，以及以常数 10 为底的对数函数 $y=\log_{10}x$，简记为 $y=\lg x$.

5.三角函数

常见的三角函数有以下六种形式.

(1)正弦函数：$y=\sin x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，周期为 2π，正弦函数是奇函数，其图像经过原点，且关于原点对称，如图 1.17 所示.

(2)余弦函数：$y=\cos x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，周期为 2π，余弦函数是偶函数，其图像经过点$(0,1)$，且关于 y 轴对称，如图 1.18 所示.

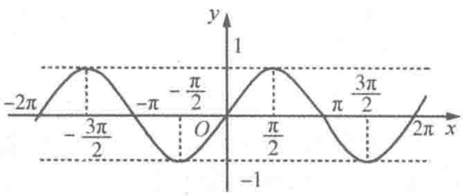


图 1.17

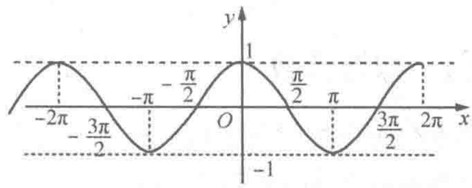


图 1.18

(3)正切函数：$y=\tan x$，其定义域为

$$D=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\},$$

值域为$(-\infty,+\infty)$，周期为 π，正切函数是奇函数.其图像经过原点，且关于原点对称.如图1.19所示.

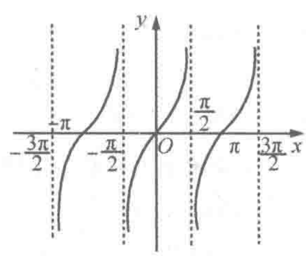


图 1.19

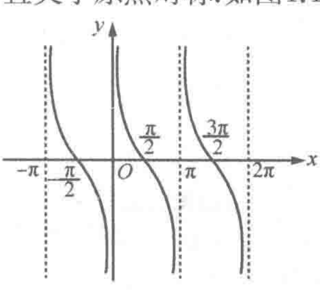


图 1.20

(4)余切函数 $y=\cot x$，其定义域为

$$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\},$$

值域为$(-\infty,+\infty)$，周期为 π，余切函数是奇函数.其图像关于原点对称.如图 1.20 所示.

另外，常见的三角函数还有：

正割函数：$y=\sec x$，其中 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；

余割函数：$y=\csc x$，其中 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6.反三角函数

常见的反三角函数有以下四种.

反正弦函数：$y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，如图 1.21 所示.

反余弦函数：$y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，如图 1.22 所示.

反正切函数：$y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，如图 1.23 所示.

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，如图 1.24 所示.