



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

经济应用数学基础（二）

线性代数

赵树嫖 / 主编

第五版

$$Ax=b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

3





“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

经济应用数学

线性代数

赵树嫖 / 主编

第五版

$$Ax=b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/赵树嫖主编. —5 版. —北京:中国人民大学出版社, 2017. 8
(经济应用数学基础)
ISBN 978-7-300-24672-7

I. ①线… II. ①赵… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 164469 号

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
经济应用数学基础(二)
线性代数(第五版)
赵树嫖 主编
Xianxing Daishu

出版发行	中国人民大学出版社	邮政编码	100080
社 址	北京中关村大街 31 号		
电 话	010-62511242(总编室)		010-62511770(质管部)
	010-82501766(邮购部)		010-62514148(门市部)
	010-62515195(发行公司)		010-62515275(盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	版 次	1983 年 5 月第 1 版 2017 年 8 月第 5 版
规 格	185 mm×260 mm 16 开本	印 次	2017 年 9 月第 2 次印刷
印 张	14.25 插页 1	定 价	29.00 元
字 数	326 000		

第五版修订说明

《经济应用数学基础(二):线性代数》自 1983 年第一版出版以来已三十余年,被很多高校选作教材,深受广大师生的欢迎,在此期间,随着国家经济的高速发展以及教学环境的改进,针对本教材进行了多次修订。这次修订是在中国人民大学出版社的积极协助下进行的。

《线性代数》(第五版)仍保持了原版的体系和风格,补充了一些例题、习题;某些内容做了一些修改。同时,为了适应当前广泛开展的数字化教学改革的需要,本书通过扫描书内嵌入的二维码进入 APP 的方式为读者提供了丰富的教学资料,包括重点和难点的视频讲解、习题解答、高校模拟试卷,等等。我们相信,将数字化手段引入数学教学改革的尝试和创新,一定会进一步促进数学教学水平的提高。

在本书的修订过程中,中国人民大学出版社经济分社社长刘晶、本书的策划编辑李丽娜、责任编辑刘冬给予了大力支持和协助,编者对他们的辛勤工作表示衷心感谢。

参加本次修订工作的有赵树嫒、胡显佑、陆启良,本次修订的不妥之处,敬请读者不吝指正。

编 者

2017 年 1 月

第四版修订说明

根据中国人民大学出版社的要求，我们对《线性代数》(第三版)进行了再次修订。

教材《经济应用数学基础(二):线性代数》自1983年第一版出版三十多年来深受广大读者的欢迎，直至目前，仍保持着很大的年度发行量，说明本教材现在仍然适合很多读者的需要。但也有不少读者希望我们进行修订，本着对广大读者负责的态度，我们的修订工作进行得十分慎重。本次修订，我们保持了原书的风格，在内容上有少量增删，习题中的选择题根据目前考试的要求全部进行了改写。

同时，此版结合当前广泛使用的数字化手段尝试对教学方法进行改革。本书通过扫描书内嵌入的二维码进入APP的方式为读者提供了丰富的教学辅助资料，包括重点和难点知识点的视频讲解、习题解答、高校模拟试卷等。我们相信通过这种数字化手段改进教学的创新，会从教与学两方面有利于读者高效率地学习。

参加本次修订工作的有：赵树嫄、胡显佑、陆启良、褚永增等。

对第四版中的错误与不妥之处热诚欢迎广大读者批评指正。

编者

2016年6月

第三版修订说明

第三版是对本书 1988 年修订版的再修订，这次修订，改正了原修订本中的一些错误与不妥之处。删去了原书中的第六章，有关内容融入了其他章节；其余各章均有一些增删，但基本上保持了原修订本的风格与体系。通过修订，读者使用起来会更方便，更适用。

参加本次修订的主要有赵树嫒(执笔第一、二章)和胡显佑(执笔第三、四、五章)，参加修订的还有付维潼、胡富昌、陆启良、褚永增。由赵树嫒担任主编。

书中不妥之处，敬请读者指正。

编 者

1997 年 6 月

第二版修订说明

《经济应用数学基础》是原教育部委托中国人民大学经济信息管理系数学教研室赵树嫒主持编写的高等学校财经专业试用教材,共分五册:第一册《微积分》,第二册《线性代数》,第三册《概率论与数理统计》,第四册《线性规划》,第五册《运筹学通论》。从1981年以来,由中国人民大学出版社陆续出版。

本套教材自出版发行后,被许多院校选作教材,也受到了自学财经专业课程的读者的欢迎,在一定程度上满足了当时教学的迫切需要。

目前,随着我国社会主义经济建设的发展和经济体制改革的深入,经济数学方法的研究和应用日益受到广大经济理论教学及研究人员和实际工作者的重视。很多院校加强了数量经济学方面的研究和教学工作,相继增开了一些有关的必修或选修课程。近年来,高等学校财经专业学生队伍的构成和素质也有了很大的变化。这一切都对高等学校财经专业基础数学的教学提出了更高的要求。为此,我们将对本套教材陆续进行修订。

这次修订工作是在国家教委的支持与领导下进行的,并得到北京大学、北京经济学院、北京商学院、北京财贸学院、中央财政金融学院、对外经济贸易大学等兄弟院校有关同志的大力协助,他们对本套教材的修改提出了许多宝贵的意见。在此,我们表示衷心感谢。

《线性代数》(第二版)介绍了线性经济模型中有关的线性代数基本知识。书中有些内容加了“※”号,选用本教材时可根据教学需要和学时安排略去不讲。

参加《线性代数》第一版编写与审阅的有:赵树嫒、马兴忠、胡富昌、陆启良,由赵树嫒任主编。参加第二版修改与审阅的有:赵树嫒、付维潼、胡富昌、金必先、陆启良,由赵树嫒任主编。褚永增对本书的修订做了大量工作并审核了全部习题答案。

本次修订对第一版的某些章节的体系进行了调整,补充了一些内容。在习题中增加了选择题,各章习题均分为(A)、(B)两类。(A)类为计算、证明、应用等传统题型;(B)类为选择题,每题各有4个备选答案,其中至少有一个是正确的,请读者将正确答案前的字母都填在括号内,凡多填或漏填均算答案错误。习题答案附书后。

由于我们水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

编者

1988年3月

目 录

第一章	行列式	1
§ 1.1	二阶、三阶行列式	1
§ 1.2	n 阶行列式	3
§ 1.3	行列式的性质	9
§ 1.4	行列式按行(列)展开	18
§ 1.5	克莱姆法则	26
习题一		30
第二章	矩阵	43
§ 2.1	矩阵的概念	43
§ 2.2	矩阵的运算	45
§ 2.3	n 阶矩阵(方阵), 方阵的行列式	56
§ 2.4	几种特殊的矩阵	59
§ 2.5	分块矩阵	61
§ 2.6	逆矩阵	66
§ 2.7	矩阵的初等变换	72
§ 2.8	矩阵的秩	80
习题二		84
第三章	线性方程组	97
§ 3.1	线性方程组的消元解法	97
§ 3.2	向量与向量组的线性组合	107
§ 3.3	向量组的线性相关性	113
§ 3.4	向量组的秩	119
§ 3.5	线性方程组解的结构	124
* § 3.6	投入产出数学模型	132
习题三		138
第四章	矩阵的特征值	148
§ 4.1	矩阵的特征值与特征向量	148
§ 4.2	相似矩阵与矩阵对角化	155
§ 4.3	实对称矩阵的特征值和特征向量	162

* § 4.4 矩阵级数的收敛性	168
习题四	173
* 第五章 二次型	178
§ 5.1 二次型与对称矩阵	178
§ 5.2 二次型与对称矩阵的标准形	182
§ 5.3 二次型与对称矩阵的有定性	191
§ 5.4 正定性和负定性的一个应用	197
习题五	199
习题答案	202

第一章 行列式

§ 1.1 二阶、三阶行列式

(一) 二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.1)$$

二阶行列式表示的代数, 可以用画线 (见图 1—1) 的方法记忆, 即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积.

例 1 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-1) \times 3 = 13$

例 2 设 $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

问: (1) 当 λ 为何值时, $D = 0$?

(2) 当 λ 为何值时, $D \neq 0$?

解: $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$

(1) 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$ 时, $D = 0$.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时, $D \neq 0$.

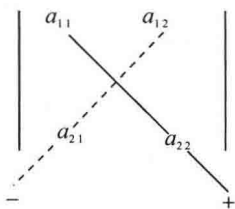


图 1—1

(二) 三阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.2)$$

三阶行列式表示的代数和, 也可以用画线(见图1—2)的方法记忆, 其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项, 各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项.

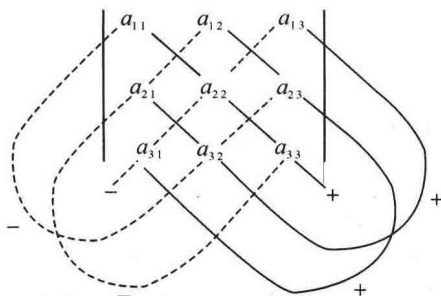


图 1—2

例 3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times 6 + 2 \times 5 \times (-1) + 3 \times 4 \times 0 \\ - 1 \times 5 \times 0 - 2 \times 4 \times 6 - 3 \times 0 \times (-1) \\ = -10 - 48 = -58$

例 4 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么?

解: $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$

当且仅当 $a^2 - 1 > 0$, 即 $|a| > 1$ 时, $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$. 因此可得 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条

件是 $|a| > 1$.

例 5 解下列行列式方程

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 4 & x & x \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

解: 展开给定行列式, 得

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 4 & x & x \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$$

于是有 $(x+1)(x-4) = 0$, 由此得到 $x = -1, x = 4$, 即为给定行列式方程的解.

§ 1.2 n 阶行列式

(一) 排列与逆序

由 n 个不同数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的有序数组 $i_1 i_2 \dots i_n$, 称为一个 n 级排列.

例如, 1234 及 2431 都是 4 级排列, 25413 是一个 5 级排列.

定义 1.1 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中, 如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面 ($i_s < i_t$), 则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数, 称为它的逆序数, 记为

$$N(i_1 i_2 \dots i_n)$$

逆序数是奇数的排列称为奇排列; 逆序数是偶数或 0 的排列称为偶排列.

n 个数码所组成的 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 共有 $n!$ 种. 因第一个位置 i_1 有 n 种选择, 第二个位置 i_2 有 $(n-1)$ 种选择, $\dots$, 第 n 个位置 i_n 只有一种选择, 故共有 $n!$ 种排列方法.

n 级排列 $12 \dots n$, 没有破坏自然数的大小次序, 称这个排列为“自然序排列”, 其逆序数为 0, 是偶排列.

例如, 1, 2, 3 三个数码组成的 3 级排列共有 $3! = 6$ 种: 123, 132, 213, 231, 312, 321, 其中 123, 231, 312 为偶排列, 132, 213, 321 为奇排列. 计算一个 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的逆序数, 可逐一求出每个数码前面比它大的数码个数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 它们连加起来的和, 就是该排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的逆序数, 即 $N(i_1 i_2 \dots i_n) = t_1 + t_2 + \dots + t_n$.

例 1 求 6 级排列 326145 的逆序数, 并确定其奇偶性.

解: 依次逐一计算每个数码的逆序数.

3 排在首位, 没有比它大的数码排在它前面, 故逆序数为 0;

2 前面有 3 比它大, 故逆序数为 1;

6 前面没有比它大的数码排在它前面, 故逆序数为 0;

1 前面有三个数码 3, 2, 6 比它大, 故逆序数为 3;

4 前面有 6 比它大, 故逆序数为 1;

5 前面有 6 比它大, 故逆序数为 1;

那么有 $N(326145) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 + 1 = 6$.

于是可知, 排列 326145 为偶排列.

注: 求一个排列的逆序数, 也可以逐个计算每个数码后面比它小的数码个数, 将它们连加起来.

在一个排列 $i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$ 中, 如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调, 其他数码不变,

得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$, 这样的变换称为一个对换, 记为对换 (i_s, i_t) .

例如, 对排列 21354 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 24351.

21354 为偶排列, 而 24351 为奇排列, 可见对换后奇偶性改变.

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

证: (1) 首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形, 设排列为

$$A i j B$$

其中 A, B 表示除 i, j 两个数码外其余的数码, 经过对换 (i, j) , 变为排列

$$A j i B$$

比较上面两个排列中的逆序, A, B 中数码的次序没有改变, i, j 与 A, B 中数码的次序也没有改变, 仅仅改变了 i 与 j 的次序, 因此, 新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i < j$ 时), 或减少了一个逆序(当 $i > j$ 时), 所以它们的奇偶性相反.

(2) 下面讨论一般情形, 设原排列为

$$A i k_1 k_2 \cdots k_s j B$$

经过对换 (i, j) , 变为新排列

$$A j k_1 k_2 \cdots k_s i B$$

在原排列中将数码 i 依次与 $k_1, k_2, \dots, k_s, j$ 作 $s+1$ 次相邻对换, 变为

$$A k_1 k_2 \cdots k_s j i B$$

再将 j 依次与 $k_s, \dots, k_2, k_1$ 作 s 次相邻对换, 得到新排列, 即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由 (1) 的结论可知, 它改变了奇数次奇偶性, 所以它与原排列的奇偶性相反.

定理 1.2 n 个数码 ($n > 1$) 共有 $n!$ 个 n 级排列, 其中奇偶排列各占一半.

证: n 级排列的总数为 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$, 设其中奇排列为 p 个, 偶排列为 q 个.

设想将每一个奇排列都施以同一的对换, 例如都对换 $(1, 2)$, 则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全部变为偶排列, 于是有 $p \leq q$; 否则若 $p > q$, 则必有不完全相同的奇数排列对换为同一个偶排列; 同理, 如将全部偶排列也都施以同一对换, 则 q 个偶排列全部变为奇排列, 于是又有 $q \leq p$, 所以得出 $p = q$, 即奇偶排列数相等, 各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

用 3 级排列验证可知, 奇偶排列各有三个.

(二) n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(1) 二阶行列式表示所有不同的行、不同的列的两个元素乘积的代数和. 两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2 为 2 级排列, 当 j_1j_2 取遍 2 级排列 (12, 21) 时, 即得到二阶行列式的所有项 (不包含符号), 共为 $2! = 2$ 项.

三阶行列式表示所有位于不同的行、不同的列的 3 个元素乘积的代数和. 3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列, 当 $j_1j_2j_3$ 取遍 3 级排列时, 即得到三阶行列式的所有项 (不包含符号), 共为 $3! = 6$ 项.

(2) 每一项的符号是, 当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后, 如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号. 如在上述二阶行列式中, 当 $N(j_1j_2)$ 为偶数时取正号, 为奇数时取负号; 在上述三阶行列式中, 当 $N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时取正号, 为奇数时取负号.

根据这个规律, 给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 用 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

称为 n 阶行列式, 其中横排称为行, 纵排称为列. a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素, n 阶行列式表示所有可能取自不同的行、不同的列的 n 个元素乘积的代数和, 各项的符号是: 当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后, 如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号. 因此, n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (1.4)$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列, 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时, 则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项.

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.5)$$

其中, 符号 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 表示取遍 n 级排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

一阶行列式 $|a|$ 就是 a .

行列式(1.3)有时简记为 $|a_{ij}|$.

由定理 1.2 可知: n 阶行列式共有 $n!$ 项, 且冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的负号)各占一半.

例如, 四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有 $4! = 24$ 项.

例如, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 行标排列为 1234, 元素取自不同的行; 列标排列为 1234, 元素取自不同的列, 且逆序数 $N(1234) = 0$, 即元素乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面应冠以正号, 所以 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为 D 的一项.

再比如, $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 1234, 元素取自不同的行; 列标排列为 4312, 元素取自不同的列, 且逆序数 $N(4312) = 5$, 即 4312 为奇排列, 所以元素乘积 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前面应冠以负号, 即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 D 的一项.

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 有两个元素取自第四列, 所以它不是 D 的一项.

例 2 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$).

解: 记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

D 中有很多项为零, 现在考察有哪些项不为零. 一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行, 但第一行中只有 a_{11} 不为零, 因而 $j_1 = 1$, 即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零, 其他项均为零; 一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行, 第二行中有 a_{21} 和 a_{22} 不为零, 因第一个元素 a_{11}

已取自第一列, 因此第二个元素不能再取自第一列, 即不能取 a_{21} , 所以第二个元素只能取 a_{22} , 从而 $j_2 = 2$, 即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零, 其他项均为零; 这样推下去, 可得 $j_3 = 3, j_4 = 4, \dots, j_n = n$. 因此, D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零, 其他项均为零. 由于 $N(1\ 2\ \cdots\ n) = 0$, 因此这一项应取正号, 于是可得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式.

同理可得上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

特殊情况:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

这种行列式称为对角行列式.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

三角形行列式及对角行列式的值, 均等于主对角线上元素的乘积.

类似地可以证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

因为在给定行列式中, 非零项只有一项, 即

$$(-1)^{N(nn-1\ \cdots\ 21)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

同理,有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

这些结论在以后行列式的计算中可直接应用.

由行列式定义不难得出:一个行列式若有一行(或一列)中的元素皆为零,则此行列式必为零.

例3 用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解: 设 $|a_{ij}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$

考察 $|a_{ij}|$ 的非零项, 第三行和第一列均只有一个非零元素, 因此非零项必取 a_{21} 和 a_{32} , 取 a_{21} 和 a_{32} 后, 就不能取 a_{23} 和 a_{12} , 如取 a_{23} 则有两个元素取自第二行, 如取 a_{12} 则有两个元素取自第二列, 不取 a_{23} 和 a_{12} , 则只有取 a_{43} 和 a_{14} , 这样 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ 是取自不同行、不同列的元素乘积, 故

$$(-1)^{N(4123)} a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} = -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

是行列式 $|a_{ij}|$ 的一项, 其他项至少含有一个零元素, 故有

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替.

定理 1.3 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1.6)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 n 级排列.

证: 由于 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列, 因此, 式(1.6)中的 n 个元素是取自 D 的不同行、不同列.

如果交换式(1.6)中两个元素 $a_{i_s j_s}$ 与 $a_{i_t j_t}$, 则其行标排列由 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 换为 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$, 由定理 1.1 可知其逆序数奇偶性改变; 列标排列由 $j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n$ 换为 $j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n$, 其逆序数的奇偶性亦改变. 但对换后两下标排列的逆序数之和的奇偶性则不改变, 即有

$$(-1)^{N(i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n) + N(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)}$$