

普通高等学校大学数学基础系列教材

线性代数

黄先开 主编

高等教育出版社

普通高等学校大学数学基础系列教材

线性代数

Xianxing Daishu

黄先开 主编



高等教育出版社·北京

内容提要

本书是北京高等教育精品教材建设立项项目成果,包括行列式、矩阵、 n 维向量、线性方程组、相似对角化与二次型等六章内容。

本书以应用为目的,注重概念及其实际应用,旨在培养学生的数学应用意识和能力;内容阐述简明扼要、通俗易懂,同时注重渗透数学思想方法,以便于教师讲授和学生自学;每节后安排了适量的基础练习题,便于学生复习与提高,每章后按学习内容的先后顺序及难易程度编排了总复习题,便于任课教师根据学生的不同情况布置作业,书后附有习题参考答案与提示。

本书可作为高等学校经济和管理类专业的教材或教学参考书,也可供科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 黄先开主编. -- 北京: 高等教育出版社, 2016. 12

ISBN 978-7-04-045727-8

I. ①线… II. ①黄… III. ①线性代数 - 高等学校 - 教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 140807 号

策划编辑 张彦云
插图绘制 黄建英

责任编辑 张彦云
责任校对 高歌

封面设计 王 鹏
责任印制 赵义民

版式设计 童 丹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京七色印务有限公司
开 本 787 mm × 960 mm 1/16
印 张 11.75
字 数 210 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2016 年 12 月第 1 版
印 次 2016 年 12 月第 1 次印刷
定 价 21.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 45727-00

序 言

本系列教材是根据 2013—2017 年教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新制订的《大学数学课程教学基本要求》，并参照“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，在认真研究国内外优秀教材的基础上，结合编者多年大学数学课程教学实践经验，充分考虑教师教学、学生学习的规律和专业发展需要，为普通高等学校非数学类专业编写的大学数学基础系列教材，主要包括《微积分》《线性代数》和《概率论与数理统计》。

随着数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，数学修养已经成为衡量一个人潜在能力的重要标志。大学数学基础是普通高等学校绝大多数学生的必修课程，数学的思想和方法不仅给学生提供了解决实际问题的有力数学工具，还提供了一种思维方法，帮助学生提高实际应用中所必需的数学素质和文化修养。但在高等教育大众化和教育改革不断深化的大背景下，大学数学课程的教学面临着课时调整、内容更新、慕课等新兴教学方式涌现的挑战，因此我们需要在大学数学教学中，相对比较系统地、灵活地构建课程的基本内容，着力培养学生的数学直觉和必要的数学逻辑推理能力，而不只是孤立地、表面地、形式地让学生背诵一些数学结论。目前各高校各专业具体情况和教学安排不同，许多从事大学数学教学的教师和学习大学数学的学生都希望有一套重点突出、内容精要、通俗易懂、深入浅出，可以根据专业和学生个性发展需要灵活选用的教材。正是在这样一个背景下，我们组织多年从事大学数学教学与研究的教师，精心编写了这套“普通高等学校大学数学基础系列教材”，以供普通高等学校非数学类专业选用。

本套教材的主要特点是采取模块化的结构，每本教材都划分为不同层次的模块，各层次的教学内容由浅入深，而不同的模块组合反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别的要求，体现了数学知识结构和大学生认识结构的统一。鉴于人类认识事物是从感性到理性、由易到难、由浅入深的，因此第一层次体现了大学数学的基础和各专业应当具有的数学素质教育，主要侧重基本概念和基本方法，加强基本运算，渗透基本数学思想；第二层次是对第一层次基本概念的不断加深和知识方法的拓宽，同时还适当体现出数学理论的系统性和严谨性；第三层次则是为满足某些对数学知识和方法有更高要求的专业或学生（比如考研）而设置的。各专业可根据需要选用不同的模块组合，这样就使得系列教材具有更大的灵活性，能够满足不同层次、不同要求的专业学生的需求。

本套教材精选内容，突出数学思想，体现素质教育；每一个概念的引入，都

是从实际问题出发,激发读者的学习兴趣;注重对实际工作的帮助以及分析问题和解决问题能力的提高,介绍了大量实际生活中的应用示例;书中习题配置分为两个层次,其一是满足基本教学要求,其二是满足更高的要求,如考研、大学数学竞赛等,供同学们选用。所选题型丰富、层次分明,书末附有习题参考答案与提示,便于学生自学。与系列教材配套的教学资源将陆续在网站 (<http://abook.hep.com.cn/>) 上线,内容包括部分授课视频、习题选讲等。

在此,我们要特别感谢本套教材的各位主审老师,他们对书稿进行了非常认真细致的审查,并提出了许多宝贵的意见。此外,在教材的撰写过程中,自始至终得到了高等教育出版社编辑的热情支持与帮助,他们对全书的体例结构提出了许多好的建议。他们的建议和意见为教材增色不少,在此表示衷心的感谢!

虽编者尽了最大努力,但仍然会有不足之处,恳请专家、同行和读者批评指正。

编 者

2015 年 7 月

前 言

线性代数是经济和管理类专业本科生的一门重要数学课程。线性代数课程教学质量的高低,对于培养大学生的数学素质、逻辑推理能力、对经济问题定量分析的能力以及综合运用数学思想方法分析问题和解决问题的能力,具有举足轻重的作用,会直接影响后续课程的学习,因此编写一本既符合经济和管理类专业教学基本要求,又易为学生接受的教材,对于教师的教学和学生的学习都是很有必要的。本教材是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制订的《大学数学课程教学基本要求(2014年版)》中“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”,参照教育部考试中心最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》对线性代数内容的要求,并结合编者多年的教学经验编写而成的。本教材在以下几个方面作了尝试:

1. 加强应用背景的引入。在各章教学内容的处理上,注重理论联系实际,加强概念与理论的背景和应用介绍,利用对实际问题的讨论,帮助学生理解抽象的概念,力求拓宽学生的视野和培养学生应用代数知识解决实际问题的能力。

2. 在内容的编排上,注意与中学相关知识的衔接,力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂、难点分散。如以大家最熟知的解线性方程组的消元法为主线引出行列式、矩阵的初等变换等一系列概念和方法,在章节的安排上,又专门把线性方程组的内容列为一章(第四章),突出了线性方程组及矩阵的初等变换的作用,为后续章节内容的讨论提供了方便,奠定了基础。

3. 例题紧扣教学内容,习题丰富且有层次。由于内容多、学时少,所以本教材在例题和习题的安排上,着重注意基本内容的训练,同时又有适当的提高题。在注意加强应用、适当淡化技巧的基础上,选择的都是紧扣教学内容的典型例题,以方便教师教学和学生自学。习题和总习题按由易到难的次序编排在每一章节后面,以便读者能够正确利用每节(或每章)所学理论和方法解决问题。书后还附有参考答案与提示,供学生解答后对照。另外,在每章的总习题里还配有相当数量的填空题和选择题,在保证教学基本要求的前提下留有一定难度的思考问题,有助于学生对基本概念、基本理论的更深一步的理解和对所学知识的巩固,也扩大了本书的适应面,提升了本书的伸缩性。

4. 在内容的取舍上,强调线性代数的基本概念、基本理论和基本解题方法。内容叙述力求做到简单明了、突出重点、精选例题、减少篇幅,以减轻学生学习的压力,提高学生学习的积极性,争取达到易教、易学、易懂的目的。

本书共分为六章。

第一章主要介绍行列式的相关内容,重点介绍行列式的概念、性质及计算行列式的方法。第二章主要介绍矩阵的相关内容,重点介绍矩阵的概念及其运算、方阵的行列式的性质、逆矩阵的概念与性质、矩阵的初等变换等。第三章主要介绍 n 维向量的相关内容,重点介绍向量组的基本概念、线性相关性的概念及其判定、极大线性无关组等。第四章主要介绍线性方程组的相关内容,重点介绍线性方程组解的结构问题。第五章主要介绍相似对角化的相关内容,重点介绍相似矩阵的定义及性质、方阵的特征值及特征向量、方阵可对角化的条件、实对称矩阵的对角化等。第六章主要介绍二次型的相关内容,重点介绍二次型的概念及其矩阵表示、二次型的标准形及规范形、正定二次型的概念及其性质等。

本书由黄先开组织编写,负责全书的框架、统稿和定稿。第一、六章由张莉编写,第二章由邢春峰编写,第三、四章由张立新编写,第五章由袁安锋编写。

编者衷心感谢北京市教委北京高等教育精品教材建设立项项目的资助和高等教育出版社以及北京联合大学教务处给予的大力支持,特别感谢高等教育出版社各位编辑付出的辛勤劳动。在本书的编写过程中,许多同行、专家提出了宝贵的建议,同时编者参阅了国内外许多现有的教材、参考书和网络资料,恕不一一列举,在此一并表示由衷的感谢。

由于编者经验和水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请读者、专家和同行不吝指正,以便进一步完善。

编 者

2016年4月

目 录

第一章 行列式	1	§3.2 向量组的线性相关性	77
§1.1 行列式的概念	1	习题 3.2	83
习题 1.1	8	§3.3 向量组的秩	84
§1.2 行列式的性质	8	习题 3.3	88
习题 1.2	12	第三章总习题	89
§1.3 行列式的展开定理	13		
习题 1.3	18	第四章 线性方程组	92
§1.4 行列式的计算	18	§4.1 线性方程组的可解性	92
习题 1.4	21	习题 4.1	96
§1.5 克拉默法则	21	§4.2 齐次线性方程组解的 结构	96
习题 1.5	25	习题 4.2	100
第一章总习题	25	§4.3 非齐次线性方程组解的 结构	101
		习题 4.3	104
第二章 矩阵	29	第四章总习题	104
§2.1 矩阵的概念	29		
习题 2.1	33	第五章 相似对角化	107
§2.2 矩阵的运算	33	§5.1 相似矩阵的定义及性质	107
习题 2.2	44	习题 5.1	110
§2.3 逆矩阵	45	§5.2 方阵的特征值及特征 向量	110
习题 2.3	48	习题 5.2	119
§2.4 矩阵的初等变换	49	§5.3 方阵可对角化的条件	120
习题 2.4	59	习题 5.3	126
§2.5 矩阵的秩	60	§5.4 实对称矩阵的对角化	127
习题 2.5	66	习题 5.4	138
第二章总习题	67	第五章总习题	139
第三章 n 维向量	72		
§3.1 向量组及其线性组合	72		
习题 3.1	76		

第六章 二次型	143	§6.3 正定二次型	155
§6.1 二次型的概念	143	习题 6.3	158
习题 6.1	147	第六章总习题	158
§6.2 二次型的标准形及规范形	147	习题参考答案与提示	161
习题 6.2	154	参考文献	177

第一章 行列式

行列式是由一些数排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数. 在 17 世纪末, 日本数学家关孝和 (Seki Takakazu) 与德国数学家莱布尼茨 (Leibniz) 分别独立地提出了行列式的概念. 1750 年, 瑞士数学家克拉默 (Cramer) 利用行列式构造了 xOy 平面中某些曲线的方程, 同时提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克拉默法则. 1812 年, 法国数学家柯西 (Cauchy) 发现了行列式在解析几何中的应用, 这一发现激起了人们探究行列式应用的浓厚兴趣. 此后, 行列式被应用于数学的很多分支, 并且扮演着重要的角色. 在本课程中, 行列式是研究矩阵、线性方程组及向量组的线性相关性等问题的重要工具, 在线性代数中起着重要作用.

本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算以及用行列式解线性方程组的克拉默法则.

§1.1 行列式的概念

行列式的概念来源于解线性方程组, 为了简化线性方程组解的表达式, 本节首先介绍二阶、三阶行列式的定义, 然后给出 n 阶行列式的定义.

一、二阶、三阶行列式

在初等数学中, 用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

事实上, 在 (1.1) 中分别消去 x_2, x_1 , 可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 有唯一解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

(1.2) 式中的分子、分母都是两组数的乘积之差, 其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组 (1.1) 的四个系数确定的. 为了便于记忆, 引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (1.3)$$

并称之为二阶行列式, 其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 称为行列式的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标, 表示该元素位于第 i 行; 第二个下标 j 称为列标, 表示该元素位于第 j 列.

二阶行列式 (1.3) 可用如下对角线法则来记忆 (如图 1-1 所示):

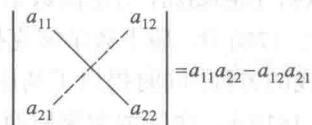
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$


图 1-1

可见, 二阶行列式等于实连线 (称为主对角线) 上两个元素 a_{11} 与 a_{22} 的乘积减去虚连线 (称为副对角线) 上两个元素 a_{12} 与 a_{21} 的乘积.

利用二阶行列式的定义, 方程组 (1.1) 的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中分母是方程组 (1.1) 的系数行列式 (由方程组中未知量的系数按原来的位置排列成的行列式), 分子是将系数行列式的第一列或第二列分别换成方程组 (1.1) 右端的常数列所得到的行列式. 令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 = 1. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7,$$

故方程组的解为 $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$. ■

类似地, 在解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

时, 我们引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1.5)$$

三阶行列式的计算结果含 6 项, 其中每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再分别取正号或负号. 三阶行列式也可用对角线法则确定, 如图 1-2 所示. 每条实线上的三个元素的乘积取正号, 每条虚线上的三个元素的乘积取负号.

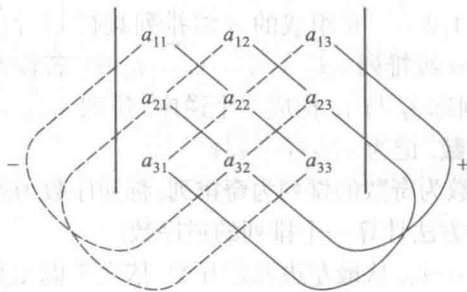


图 1-2

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则, 有

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 1 \times 1 + 0 \times (-5) \times (-2) + (-3) \times 3 \times 3 - \\ &\quad 1 \times (-5) \times 3 - 0 \times 3 \times 1 - (-3) \times 1 \times (-2) \\ &= 1 + 0 - 27 + 15 - 0 - 6 = -17. \end{aligned}$$

例 3 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x - 2x^2 + 3 - (-2x) - 1 - 3x^2 = -5x^2 + 3x + 2.$$

由 $-5x^2 + 3x + 2 = 0$, 解得 $x = -\frac{2}{5}$ 或 $x = 1$. ■

注 上述对角线法则只适用于二阶和三阶行列式.

二、排列及逆序数

为引出 n 阶行列式的概念, 先介绍排列的相关知识.

定义 1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 称为一个 n 级排列.

例如, 由 $1, 2, 3$ 组成的 3 级排列共有 $3! = 6$ 个, 分别是 $123, 231, 312, 132, 213, 321$. 一般地, 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的 n 级排列共有 $n!$ 个.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中, 若较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面, $i_t > i_s$, 则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中所有逆序的总数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

定义 3 称逆序数为奇数的排列为奇排列, 称逆序数为偶数的排列为偶排列.

我们可按下面的方法计算一个排列的逆序数:

设 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 从最左边元素开始, 依次考虑元素 $i_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 如果比 i_k 小的且排在 i_k 后面的元素有 m_k 个, 就说 i_k 这个元素的逆序数是 m_k , 则此排列的逆序数为

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k.$$

例 4 求排列 34152 的逆序数.

解 在排列 34152 中, 从最左边元素开始:

3 的后面比 3 小的有 1, 2, 构成 2 个逆序;

4 的后面比 4 小的有 1, 2, 构成 2 个逆序;

1 与后面的数字不构成逆序, 有 0 个逆序;

5 的后面比 5 小的有 2, 构成 1 个逆序;

2 排在末位, 有 0 个逆序.

于是此排列的逆序数为: $\tau(34152) = 2 + 2 + 0 + 1 + 0 = 5$. ■

例 5 求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$. ■

定义 4 在一个 n 级排列中, 交换其中某两个元素的位置, 而其余元素的位置保持不变, 就得到另一个 n 级排列, 称这种变换为一次**对换**.

可以证明, 下面两个定理成立:

定理 1 对一个排列中的任意两个元素进行一次对换, 改变排列的奇偶性.

定理 2 全部 n 级排列中, 奇、偶排列的个数皆为 $\frac{n!}{2}$.

三、 n 阶行列式的定义

从三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

中, 很容易看出:

(1) 每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积, 除正负号外, 都可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, 且当行标按自然顺序排列好后, 列标排成 $j_1j_2j_3$, 这是 1, 2, 3 的某个排列, 所有 3 级排列共有 6 个, 而三阶行列式恰好有 $6 = 3!$ 项;

(2) 排列 123, 231, 312 均为偶排列, 而排列 132, 213, 321 均为奇排列. 当列标的排列 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时, 该项取正号, 当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时, 该项取负号; 取正号和负号的项各占一半.

于是, 三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有 3 级排列求和.

类似地, 可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 5 把 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 它等于 $n!$ 项的代数和, 每一项均是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积, 并带有符号 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$, 即 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 该项带正号, 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 该项带负号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (1.6)$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

由定理 2 可知, 在这 $n!$ 项中, 带正号和带负号的项各占一半.

n 阶行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $D = |a_{ij}|$, 这里数 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为行列式的元素, 称 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 为行列式的一般项.

当 $n = 1$ 时, 定义一阶行列式 $|a| = a$, 注意不要与绝对值的记号相混淆. 另外, $n (n \geq 2)$ 阶行列式是 $n!$ 项的代数和, 它是一个数.

例 6 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 根据行列式的定义, D 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 现考虑不为零的项. 在一般项中 a_{1j_1} 取自第 1 行, 但只有 $a_{11} \neq 0$, 故当 $j_1 = 1$ 时此项才可能非零; a_{2j_2} 取自第 2 行, 只有 a_{21}, a_{22} 非零, 而行列式的每一项是取自不同行不同列元素的乘积, 因此只有当 $j_2 = 2$ 时此项才可能非零; 同理, 当 $j_3 = 3, \cdots, j_n = n$ 时, 此项才可能非零. 一般项可能不为零的只有一项: $(-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. 从而有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad \blacksquare$$

主对角线上方的元素都为 0 的行列式称为下三角形行列式. 例 6 中的行列式为下三角形行列式. 主对角线下方的元素都为 0 的行列式称为上三角形行列

式. 同理可得, 上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**对角行列式**, 显然, 对角行列式等于主对角线上元素的乘积. 于是, 不论是上(下)三角形行列式还是对角行列式, 都等于主对角线上元素的乘积.

例 7 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 根据行列式的定义, 一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$, 由于 D 中零元素比较多, 只考虑不为零的项. 只有当 $j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 2, j_4 = 4$ 时, 一般项才不为零, 故

$$D = (-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} = (-1)^{0+1+0+0} 1 \times 2 \times 3 \times 4 = -24. \quad \blacksquare$$

例 8 若 $-a_{12}a_{2i}a_{34}a_{4j}a_{51}$ 是 5 阶行列式 D 的一项, 试确定 i, j 的值.

解 由行列式的定义知, $a_{12}, a_{2i}, a_{34}, a_{4j}, a_{51}$ 是取自不同行不同列的元素, 所以 $i = 3, j = 5$ 或 $i = 5, j = 3$. 而 $\tau(23451) = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4$, $\tau(25431) = 1 + 3 + 2 + 1 + 0 = 7$, 由 $a_{12}a_{2i}a_{34}a_{4j}a_{51}$ 的前面是负号, 可知 $i = 5, j = 3$. $\blacksquare$

下面给出 n 阶行列式的另一种定义形式:

定理 3
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

其中 $\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

证略.

习题 1.1

1. 计算下列二阶、三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix};$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix};$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix};$

(6) $\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}.$

2. 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

3. 当 x, y 满足什么条件时, $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & x & -5 \\ x & -y & 3 \end{vmatrix} = 0.$

4. 求下列排列的逆序数:

(1) 2341;

(2) 45132;

(3) 2467315.

5. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{33}$ 的项.

6. 用行列式的定义计算下列行列式:

(1) $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$

(2) $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix}.$

§1.2 行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知, 当 $n(n > 3)$ 较大时, 用定义计算行列式往往很困难. 为了简化行列式的计算, 先介绍行列式的性质.

设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 中的行与列互换后所得的 n 阶行列式