普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材

复变函数与积分变换

张媛　伍君芬　程云龙　主编

大学出版社

普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材

复变函数与积分变换

张媛 伍君芬 程云龙 主编
潘显兵 普会祝 陈波 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要面向应用技术型本科院校，根据高等学校通信、电子、自动化等专业关于该课程的基本要求编写而成，主要介绍复变函数和积分变换的基本概念、理论与方法. 全书共分8章，主要内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、傅里叶变换、拉普拉斯变换和MATLAB在复变函数与积分变换中的应用. 每章后面给出了本章的小结，以便读者及时总结归纳，同时还设计了一定数量的习题，并附有习题答案或提示.

本书可作为高等学校理工科类相关专业的教材或参考书，也可供其他有关专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/张媛，伍君芬，程云龙主编. —北京：清华大学出版社，2017
（普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材）
ISBN 978-7-302-48064-8

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①张… ②伍… ③程… Ⅲ. ①复变函数－高等学校－教材 ②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第205814号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　　张**：11.25　　**字　　数**：226千字
版　　次：2017年8月第1版　　**印　　次**：2017年8月第1次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：25.00元

产品编号：076485-01

前言

在科学技术高度融合发展的今天，复变函数与积分变换已经广泛应用于自然科学的众多领域，如控制工程、理论物理、电子工程、流体力学等. 复变函数与积分变换是高等院校理工科学生必备的数学基础知识.

本书作者参照教育部关于普通应用型本科院校的基本要求，本着国家高等院校教育教学改革的精神，根据本科院校应用型人才培养需求的实际情况，特编写此书.

本书需要具备的基础知识是微积分，主要介绍复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、积分变换等. 笔者本着贯彻"以应用为目的，以够用为度"的原则，力求做到内容简洁，语言精练，逻辑严谨，突出思想与方法，深入浅出地化解概念，融会贯通地分析与说明，突出概念和计算. 本书配备典型例题，所设习题难度适中，每章适当小结以帮助读者掌握好重点和基本方法. 考虑到计算机的实现是一个重要目标，我们将复变函数与积分变换在 MATLAB 中的实现写入书中，并列举了涉及每章内容的例题.

本书由潘显兵提出思想和提纲，张媛、伍君芬、程云龙、普会祝、陈波等主要参与编写. 编写过程中，编者参阅了大量相关教材和资料并借鉴了其中部分内容. 另外，本书的出版得到清华大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心感谢！

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，请读者批评指正.

编　者

2017 年 4 月

目录

第 1 章　复数与复变函数

复变函数就是自变量与因变量均为复数的函数，在某种意义下可导的复变函数——解析函数，是本课程的重点研究对象．本章在回顾复数的基本概念与复数的四则运算的基础上，引入复数的几何表示、复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念，为后面研究解析函数奠定必要的理论基础．

1.1　复数及其四则运算

1.1.1　复数的概念

我们将形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数称为**复数**，其中 x 和 y 为实数，i 为**虚数单位**，并规定 $\mathrm{i}^2=-1$．实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

例如，对复数 $z=2-\mathrm{i}$，有

$$\mathrm{Re}(z)=2,\quad \mathrm{Im}(z)=-1.$$

虚部为零的复数就是实数，即 $x+\mathrm{i}\cdot 0=x$．因此，全体实数可看作全体复数的一部分．实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**．

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时 $z_1=z_2$，即两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等．因此，一个复数等于 0 当且仅当它的实部和虚部同时等于 0．

注意　一般情况下，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小．

我们把实部相同而虚部互为相反数的两个复数称为**共轭复数**．z 的共轭复数记作 $\bar{z}$．设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\bar{z}=x-\mathrm{i}y.$$

1.1.2　复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数，其四则运算规定如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0).$$

由上述规定,复数的加(减)法,可按实部与实部相加(减),虚部与虚部相加(减);复数的乘法,可按多项式的乘法法则进行,然后将结果中的 i^2 换成 -1;复数的除法,可把除式先写成分式的形式,然后分子分母同乘以分母的共轭复数,再进行化简. 显然,与实数的四则运算一样,复数的四则运算也满足下面性质:

(1) 交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$;

(2) 结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

(3) 分配律 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

容易验证,共轭复数具有如下性质:

(1) $\overline{\overline{z}} = z$;

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\, \overline{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;

(3) $z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = x^2 + y^2$(这里 $z = x + \mathrm{i}y$);

(4) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z), z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

例 1 设 $z_1 = 3 - 2\mathrm{i}, z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$,求 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} = \frac{(3-2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} = \frac{(6-6)+(-9-4)\mathrm{i}}{2^2+3^2} = -\mathrm{i}$.

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复数的点表示

因为复数 $z = x + y\mathrm{i}$ 可以由有序实数对 (x, y) 唯一确定,而有序实数对与坐标平面上的点一一对应,所以全体复数与坐标平面上的全体点构成一一对应关系,从而复数 $z = x + y\mathrm{i}$ 可以用坐标平面上的点 $P(x, y)$ 表示,反之亦然(图 1.1).

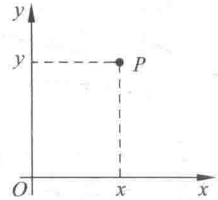

图 1.1

由于 x 轴上的点对应着全体实数,故 x 轴称为**实轴**;y 轴上除去原点的点对应着全体纯虚数,故 y 轴称为**虚轴**;两轴所在的平面称为**复平面**或 **z 平面**.

引进复平面之后,我们在"数"和"点"之间建立了联系. 为了方便起见,今后我们不再区分"数"和"点"、"数集"和"点集",说到"点"可以指它所

代表的“数”，说到“数”也可以指它所代表的“点”. 例如，把复数 $1-\mathrm{i}$ 称为点 $1-\mathrm{i}$，把点 $2+3\mathrm{i}$ 称为复数 $2+3\mathrm{i}$.

1.2.2 复数的向量表示

由于复数与坐标平面上的点一一对应，而坐标平面上的点与起点为原点的向量一一对应，因此，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 也可用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示(图 1.2).

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的**模**或**绝对值**，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然，复数的模满足如下关系式：

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|,$$

$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|=x^2+y^2.$$

当 $z\neq0$ 时，以正实轴为始边，以复数 z 所对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角称为复数 z 的**辐角**(图 1.3)，记作 $\mathrm{Arg}z$. 并规定逆时针方向为正，顺时针方向为负.

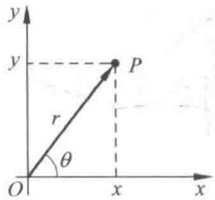

图 1.2

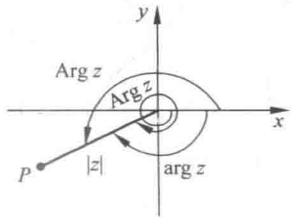

图 1.3

显然，一个非零复数 z 有无穷多个辐角，且任意两个值相差 2π 的整数倍. 而把落在 $(-\pi,\pi]$ 区间的那个特定辐角称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，或称为 z 的**主辐角**，记作 $\arg z$. 即 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，且

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

当 $z\neq0$ 时，复数有唯一的模和辐角主值，$\arg z$ 与 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下关系(图 1.4)：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,y\in\mathbf{R}\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y>0.\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0\end{cases}$$

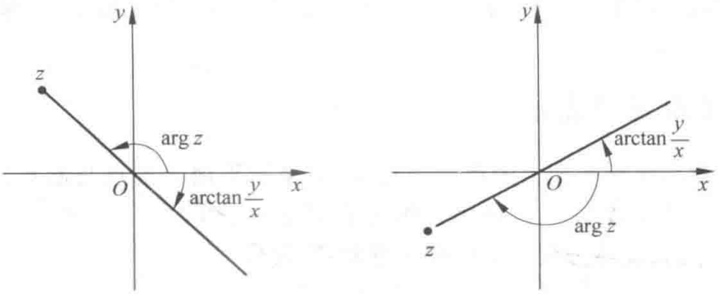

图 1.4

当 $z=0$ 时，规定 $|z|=0$，辐角无意义.

例 1 求下列复数的模与辐角：

(1) $-2\mathrm{i}$； (2) $2-3\mathrm{i}$； (3) $-1-\mathrm{i}$.

解 (1) $r=2$. 由于 $-2\mathrm{i}$ 在 y 轴负半轴上，所以

$$\arg(-2\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Arg}(-2\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

(2) $r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$. 由于 $2-3\mathrm{i}$ 位于第四象限，所以 $\arg(2-3\mathrm{i})=\arctan\frac{-3}{2}=-\arctan\frac{3}{2}$，

$$\operatorname{Arg}(2-3\mathrm{i})=\arg(2-3\mathrm{i})+2k\pi=-\arctan\frac{3}{2}+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

(3) $r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. 由于 $-1-\mathrm{i}$ 位于第三象限，所以

$$\arg(-1-\mathrm{i})=\arctan\frac{-1}{-1}-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4},$$

$$\operatorname{Arg}(-1-\mathrm{i})=\arg(-1-\mathrm{i})+2k\pi=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

1.2.3 复数的三角表示与指数表示

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 为非零复数，r 为 z 的模，θ 为 z 的一辐角，则

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}.$$

于是复数 z 可表示成如下形式：

$$z=x+\mathrm{i}y=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \tag{1.1}$$

此式称为复数 z 的**三角表示式**.

又由欧拉(Euler)公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，(1.1)式可改写成

$$z=re^{i\theta},\tag{1.2}$$

此式称为复数 z 的**指数表示式**.

复数的各种表示方法可相互转化，以适应讨论不同问题时的需要，且使用起来各有其便.

例 2 将下列复数化为三角表示式.

(1) $1-\sqrt{3}i$；　　(2) $\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}$.

解 (1) 因为 $|1-\sqrt{3}i|=2$，$\arg(1-\sqrt{3}i)=\arctan\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\frac{\pi}{3}$. 所以 $1-\sqrt{3}i$ 的三角表示式可写成

$$1-\sqrt{3}i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

(2) 因为 $|z|=1$，且

$$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{2\pi}{5},$$

所以 $\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}$ 的三角表示式可写成

$$\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

复数的向量表示使得许多关于复数的“量”有着清晰的“形”的表露. 例如：复数 z_1+z_2 所对应的向量，就是复数 z_1 所对应的向量与复数 z_2 所对应的向量的和向量(图 1.5)；复数 z_1-z_2 所对应的向量，就是从 z_2 到 z_1 的向量(图 1.6)，从而 $|z_1-z_2|$ 可看作是复平面上点 z_1 到点 z_2 的距离，这是一个很有用的结果. 由此可知，复平面上以 z_0 为中心，以 r 为半径的圆盘，可用不等式 $|z-z_0|<r$ 来表示.

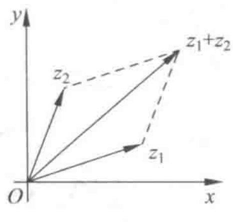

图 1.5

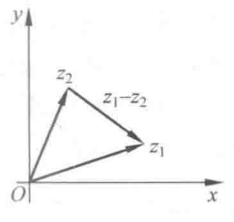

图 1.6

根据图 1.5 与图 1.6，可得到有关复数模的三角不等式

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|;$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

1.3 复数的乘幂与方根

1.3.1 复数的乘积与商

在 1.2 节中我们已经指出，复数的加、减法与向量的加、减法相一致，然而复数的乘法与向量的数量积和向量积都不相同. 不过，利用复数的三角表示可对复数的乘法与除法作出新的解释.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

于是，我们有如下定理.

定理 1.1 两个复数乘积的模等于各个复数模的乘积，两个复数乘积的辐角等于各个复数辐角的和. 即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2. \tag{1.4}$$

关于定理 1.1 需注意以下几点：

(1) 要正确理解等式(1.4). 因为复数的辐角具有无穷多个，所以等式(1.4)表示左右两端可取值的全体是相同的，即对于 $\mathrm{Arg}z_1$ 的任意一个取定的值与 $\mathrm{Arg}z_2$ 的任意一个取定的值的和，必有 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的某一个值与之相等. 反之亦然. 但在一般情况下，$\arg(z_1z_2)\neq\arg z_1+\arg z_2$. 例如，设 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=-1$，则 $z_1z_2=-\mathrm{i}$，$\arg z_1=\frac{\pi}{2}$，$\arg z_2=\pi$，$\arg(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}$，显然 $\arg(z_1z_2)\neq\arg z_1+\arg z_2$.

(2) 定理 1.1 给出了复数乘法的几何意义：相当于一次旋转，一次伸缩. 例如，向量 z_1z_2 可看作是先将向量 z_1 绕逆时针旋转 $\mathrm{Arg}z_2$，再伸长(缩短) $|z_2|$ 倍而得到，如图 1.7 所示. 特别地，当 $|z_2|=1$ 时，相当于仅是旋转；当 $\arg z_2=0$ 时，相当于仅是伸长(缩短). 例如：$-\mathrm{i}z$ 相当于将 z 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，$-z$ 相当于将 z 逆时针旋转 π，$2z$ 相当于将 z 伸长 2 倍.

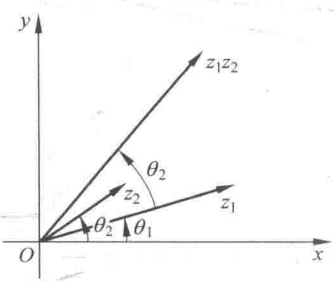

图 1.7

(3) 定理 1.1 可推广到 n 个复数相乘的情况，设

$$z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k),\quad k=1,2,\cdots,n,$$

则

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$$

例 1 用三角表示计算$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$.

解 因为

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$-\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

所以

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})&=4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\\&=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-4\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 2 已知正三角形的两个顶点为$z_1=1$与$z_2=2+\mathrm{i}$,求它的另一个顶点.

解 如图 1.8 所示,将z_2-z_1所表示的向量绕逆时针(或顺时针)方向旋转$\frac{\pi}{3}$后得到另一个向量z_3-z_1(或$z_3'-z_1$),它的终点z_3(或z_3')即为所求的顶点.因此,根据复数乘法的几何意义,有

$$\begin{aligned}z_3-z_1&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_2-z_1)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})\\&=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

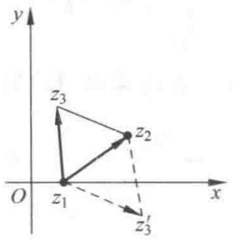

图 1.8

所以

$$z_3=z_1+\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1+\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

同理可得

$$z_3'=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

下面来看看复数商的情况.根据复数商的定义,当$z_1\neq 0$时,有

$$z_2=\frac{z_2}{z_1}z_1,$$

于是

$$|z_2|=\left|\frac{z_2}{z_1}z_1\right|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1|,\quad \mathrm{Arg}z_2=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\mathrm{Arg}z_1.$$

从而得

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|},\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\operatorname{Arg}z_2-\operatorname{Arg}z_1.$$

因此,如下定理成立:

定理 1.2 两个复数商的模等于各个复数模的商,两个复数商的辐角等于各个复数辐角的差.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\neq0, z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$,则

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}[(\cos(\theta_2-\theta_1)+\mathrm{i}\sin(\theta_2-\theta_1)].$$

例 3 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,求$\dfrac{1}{z}$的三角表示式.

解 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\cos0+\mathrm{i}\sin0}{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\dfrac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)].$

1.3.2 复数的乘幂与方根

定义 1.1 n 个相同复数 z 的乘积称为复数 z 的 n **次幂**,记作 z^n.

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).\tag{1.5}$$

特别地,当 $r=1$,即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时,则

$$z^n=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.\tag{1.6}$$

这就是**棣莫弗(De Moivre)公式.**

若定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$,则由定理 1.2 和公式(1.5)有

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\frac{\cos0+\mathrm{i}\sin0}{r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)}=r^{-n}[\cos(-n\theta)+\mathrm{i}\sin(-n\theta)].$$

即公式(1.5)对任意的整数 n 都成立.

定义 1.2 称满足方程 $\omega^n=z$ 的所有 ω 为 z 的 n **次方根**,记作

$$\omega=\sqrt[n]{z}.$$

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\omega=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$,则

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

于是

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

从而

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

所以

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,上式得到 n 个互不相同的根.当 k 取其他整数时,这些根将重复出现.例如 $k=n$ 时,

$$\omega_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)\right]$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)=\omega_0.$$

因此,对非零复数 z 开 n 次方根有且仅有 n 个不同的根,即

$$\omega_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{1.7}$$

在几何上,这 n 个根是以原点为圆心,$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点,其中一个顶点的辐角等于 $\frac{\theta}{n}$.

例 4 计算 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3$.

解 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3=8(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-8.$

例 5 计算 $\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}}$.

解 因为 $-2+2\mathrm{i}=\sqrt{8}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$,所以

$$\omega_k=\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}}=\sqrt[4]{\sqrt{8}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]}$$
$$=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi+8k\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi+8k\pi}{16}\right),\quad k=0,1,2,3,$$

即

$$\omega_0=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{16}\right),$$
$$\omega_1=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{16}\right),$$
$$\omega_2=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{19\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{16}\right),$$
$$\omega_3=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{27\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{27\pi}{16}\right).$$

这四个根是以原点为圆心,$\sqrt[8]{8}$ 为半径的圆的内接正四边形的四个顶点,ω_0 的辐角主值为 $\frac{3\pi}{16}$.