



普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材

复变函数与 积分变换

张媛 伍君芬 程云龙 主编





普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材

复变函数与 积分变换



张媛 伍君芬 程云龙 主 编
潘显兵 普会祝 陈波 副主编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书主要面向应用技术型本科院校,根据高等学校通信、电子、自动化等专业关于该课程的基本要求编写而成,主要介绍复变函数和积分变换的基本概念、理论与方法。全书共分8章,主要内容包括:复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、傅里叶变换、拉普拉斯变换和MATLAB在复变函数与积分变换中的应用。每章后面给出了本章的小结,以便读者及时总结归纳,同时还设计了一定数量的习题,并附有习题答案或提示。

本书可作为高等学校理工科类相关专业的教材或参考书,也可供其他有关专业选用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/张媛,伍君芬,程云龙主编. —北京:清华大学出版社,2017

(普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材)

ISBN 978-7-302-48064-8

I. ①复… II. ①张… ②伍… ③程… III. ①复变函数—高等学校—教材 ②积分变换—高等学校—教材 IV. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 205814 号

责任编辑:陈 明

封面设计:傅瑞学

责任校对:王淑云

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市少明印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×230mm 印 张:11.25

字 数:226 千字

版 次:2017 年 8 月第 1 版

印 次:2017 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~2500

定 价:25.00 元

产品编号:076485-01

前言

在科学技术高度融合发展的今天,复变函数与积分变换已经广泛应用于自然科学的众多领域,如控制工程、理论物理、电子工程、流体力学等.复变函数与积分变换是高等院校理工科学生必备的数学基础知识.

本书作者参照教育部关于普通应用型本科院校的基本要求,本着国家高等院校教育教学改革的精神,根据本科院校应用型人才培养需求的实际情况,特编写此书.

本书需要具备的基础知识是微积分,主要介绍复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、积分变换等.笔者本着贯彻“以应用为目的,以够用为度”的原则,力求做到内容简洁,语言精练,逻辑严谨,突出思想与方法,深入浅出地化解概念,融会贯通地分析与说明,突出概念和计算.本书配备典型例题,所设习题难度适中,每章适当小结以帮助读者掌握好重点和基本方法.考虑到计算机的实现是一个重要目标,我们将复变函数与积分变换在 MATLAB 中的实现写入书中,并列出了涉及每章内容的例题.

本书由潘显兵提出思想和提纲,张媛、伍君芬、程云龙、普会祝、陈波等主要参与编写.编写过程中,编者参阅了大量相关教材和资料并借鉴了其中部分内容.另外,本书的出版得到清华大学出版社的大力支持,在此一并表示衷心感谢!

由于作者水平有限,书中难免有不妥之处,请读者批评指正.

编 者

2017 年 4 月

目 录

第 1 章 复数与复变函数	1
1.1 复数及其四则运算	1
1.1.1 复数的概念	1
1.1.2 复数的四则运算	1
1.2 复数的几何表示	2
1.2.1 复数的点表示	2
1.2.2 复数的向量表示	3
1.2.3 复数的三角表示与指数表示	4
1.3 复数的乘幂与方根	6
1.3.1 复数的乘积与商	6
1.3.2 复数的乘幂与方根	8
1.4 平面点集的一般概念	10
1.4.1 平面点集	10
1.4.2 平面曲线	11
1.5 复变函数的概念、极限与连续性	12
1.5.1 复变函数的定义	12
1.5.2 复变函数的极限	14
1.5.3 复变函数的连续性	16
1.6 复球面与无穷远点	17
小结	18
习题一	19
第 2 章 解析函数	22
2.1 解析函数的概念	22
2.1.1 复变函数的导数	22
2.1.2 解析函数的概念	24
2.2 函数解析的充要条件	25

2.3 初等函数	28
2.3.1 指数函数	29
2.3.2 对数函数	30
2.3.3 幂函数	32
2.3.4 三角函数	33
* 2.3.5 反三角函数	34
小结	35
习题二	36
第3章 复变函数的积分	39
3.1 复变函数积分的概念与性质	39
3.1.1 有向曲线	39
3.1.2 复变函数积分的概念	39
3.1.3 复变函数积分存在条件	40
3.1.4 复变函数积分的计算——参数方程法	41
3.1.5 复变函数积分的基本性质	43
3.2 柯西-古萨定理与复合闭路定理	44
3.2.1 柯西-古萨定理	44
3.2.2 复合闭路定理	46
3.3 原函数与不定积分	49
3.3.1 变上限积分	49
3.3.2 原函数与不定积分	51
3.4 柯西积分公式	53
3.5 解析函数的高阶导数	55
3.6 解析函数与调和函数的关系	58
小结	61
习题三	63
第4章 级数	66
4.1 复数项级数	66
4.1.1 复数列的极限	66
4.1.2 复数项级数	67
4.2 幂级数	69
4.2.1 函数项级数与幂级数的概念	69
4.2.2 收敛圆和收敛半径	70

4.2.3 收敛半径的求法	71
4.2.4 幂级数的运算及性质	73
4.3 泰勒级数	74
4.3.1 泰勒定理	74
4.3.2 将函数展开成泰勒级数	76
4.4 洛朗级数	79
4.4.1 双边幂级数	79
4.4.2 解析函数的洛朗展开式	80
4.4.3 将函数展开成洛朗级数	82
小结	86
习题四	87
第5章 留数	90
5.1 孤立奇点	90
5.1.1 孤立奇点的定义及其分类	90
5.1.2 孤立奇点的判定	91
5.1.3 无穷远点	94
5.2 留数	95
5.2.1 留数的概念	95
5.2.2 留数的计算	98
5.2.3 函数在无穷远点处的留数	101
5.3 留数在积分上的应用	103
5.3.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ 的积分	103
5.3.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ 的积分	104
5.3.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{aix} dx (a > 0)$ 的积分	106
小结	109
习题五	112
第6章 傅里叶变换	114
6.1 傅里叶变换的概念	114
6.1.1 傅里叶级数	114
6.1.2 傅里叶级数的指数形式	115
6.1.3 傅里叶积分公式与傅里叶变换	116

6.2 单位脉冲函数及其傅里叶变换	120
6.2.1 单位脉冲函数的概念	120
6.2.2 单位脉冲函数的性质	121
6.3 傅里叶变换的性质	124
6.3.1 基本性质	124
6.3.2 卷积	128
小结	130
习题六	132
第7章 拉普拉斯变换	134
7.1 拉普拉斯变换的概念	134
7.1.1 拉普拉斯变换的定义	134
7.1.2 拉普拉斯变换的性质	136
7.2 拉普拉斯逆变换	141
7.3 拉普拉斯变换的应用	145
7.3.1 解常微分方程	145
7.3.2 解常微分方程组	146
7.3.3 综合应用	146
小结	147
习题七	149
第8章 MATLAB 在复变函数与积分变换中的应用	151
8.1 复数及其矩阵生成的命令	151
8.2 复数的运算	152
8.3 复变函数的积分	155
8.4 泰勒级数展开	157
8.5 留数计算	157
8.6 傅里叶变换及其逆变换	158
8.7 拉普拉斯变换及其逆变换	160
习题答案	163
参考文献	171



第1章 复数与复变函数

复变函数就是自变量与因变量均为复数的函数,在某种意义下可导的复变函数——解析函数,是本课程的重点研究对象.本章在回顾复数的基本概念与复数的四则运算的基础上,引入复数的几何表示、复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念,为后面研究解析函数奠定必要的理论基础.

1.1 复数及其四则运算

1.1.1 复数的概念

我们将形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 的数称为复数,其中 x 和 y 为实数, i 为虚数单位,并规定 $i^2=-1$.实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部,记为

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

例如,对复数 $z=2-i$,有

$$\operatorname{Re}(z) = 2, \quad \operatorname{Im}(z) = -1.$$

虚部为零的复数就是实数,即 $x+i \cdot 0=x$.因此,全体实数可看作全体复数的一部分.实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数.

设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$,当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$ 时 $z_1=z_2$,即两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等.因此,一个复数等于0当且仅当它的实部和虚部同时等于0.

注意 一般情况下,两个复数只能说相等或不相等,而不能比较大小.

我们把实部相同而虚部互为相反数的两个复数称为共轭复数. z 的共轭复数记作 $\bar{z}$.设 $z=x+iy$,则

$$\bar{z} = x - iy.$$

1.1.2 复数的四则运算

设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 是两个复数,其四则运算规定如下:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0). \end{aligned}$$

由上述规定,复数的加(减)法,可按实部与实部相加(减),虚部与虚部相加(减);复数的乘法,可按多项式的乘法法则进行,然后将结果中的 i^2 换成 -1 ;复数的除法,可把除式先写成分式的形式,然后分子分母同乘以分母的共轭复数,再进行化简.显然,与实数的四则运算一样,复数的四则运算也满足下面性质:

- (1) 交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- (2) 结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;
- (3) 分配律 $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

容易验证,共轭复数具有如下性质:

- (1) $\overline{\overline{z}} = z$;
- (2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;
- (3) $z \overline{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2 = x^2 + y^2$ (这里 $z = x + iy$);
- (4) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z), z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.

例 1 设 $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 2 + 3i$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{2+3i} = \frac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(6-6) + (-9-4)i}{2^2 + 3^2} = -i$.

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复数的点表示

因为复数 $z = x + yi$ 可以由有序实数对 (x, y) 唯一确定,而有序实数对与坐标平面上的点一一对应,所以全体复数与坐标平面上的全体点构成一一对应关系,从而复数 $z = x + yi$ 可以用坐标平面上的点 $P(x, y)$ 表示,反之亦然(图 1.1).

由于 x 轴上的点对应着全体实数,故 x 轴称为实轴; y 轴上除去原点的点对应着全体纯虚数,故 y 轴称为虚轴;两轴所在的平面称为复平面或 z 平面.

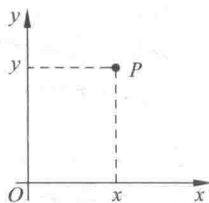


图 1.1

引进复平面之后,我们在“数”和“点”之间建立了联系,为了方便起见,今后我们不再区分“数”和“点”、“数集”和“点集”,说到“点”可以指它所

代表的“数”，说到“数”也可以指它所代表的“点”. 例如，把复数 $1-i$ 称为点 $1-i$ ，把点 $2+3i$ 称为复数 $2+3i$.

1.2.2 复数的向量表示

由于复数与坐标平面上的点一一对应，而坐标平面上的点与起点为原点的向量一一对应，因此，复数 $z=x+yi$ 也可用向量 $\vec{OP}$ 表示(图 1.2).

向量 $\vec{OP}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值，记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

显然，复数的模满足如下关系式：

$$|x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|, \quad |z| \leq |x| + |y|,$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = |z^2| = x^2 + y^2.$$

当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以复数 z 所对应的向量 $\vec{OP}$ 为终边的角称为复数 z 的辐角(图 1.3)，记作 $\text{Arg}z$. 并规定逆时针方向为正，顺时针方向为负.

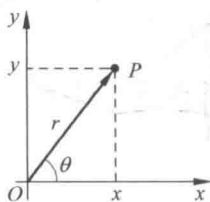


图 1.2

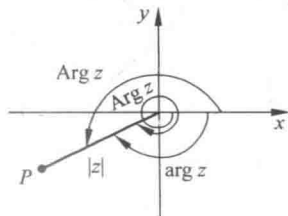


图 1.3

显然，一个非零复数 z 有无穷多个辐角，且任意两个值相差 2π 的整数倍. 而把落在 $(-\pi, \pi]$ 区间的那个特定辐角称为 $\text{Arg}z$ 的主值，或称为 z 的主辐角，记作 $\arg z$. 即 $-\pi < \arg z \leq \pi$ ，且

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

当 $z \neq 0$ 时，复数有唯一的模和辐角主值， $\arg z$ 与 $\arctan \frac{y}{x}$ 有如下关系(图 1.4)：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y \in \mathbf{R} \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y > 0. \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

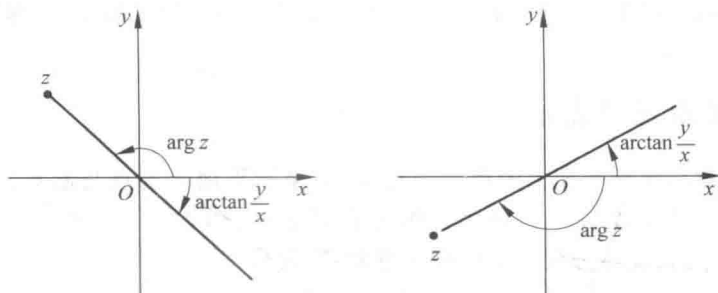


图 1.4

当 $z=0$ 时, 规定 $|z|=0$, 辐角无意义.

例 1 求下列复数的模与辐角:

(1) $-2i$; (2) $2-3i$; (3) $-1-i$.

解 (1) $r=2$. 由于 $-2i$ 在 y 轴负半轴上, 所以

$$\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{Arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(2) r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}. \text{ 由于 } 2-3i \text{ 位于第四象限, 所以 } \arg(2-3i) = \arctan \frac{-3}{2} = -\arctan \frac{3}{2},$$

$$\text{Arg}(2-3i) = \arg(2-3i) + 2k\pi = -\arctan \frac{3}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(3) $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. 由于 $-1-i$ 位于第三象限, 所以

$$\arg(-1-i) = \arctan \frac{-1}{-1} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4},$$

$$\text{Arg}(-1-i) = \arg(-1-i) + 2k\pi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.2.3 复数的三角表示与指数表示

设 $z=x+iy$ 为非零复数, r 为 z 的模, θ 为 z 的一辐角, 则

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

于是复数 z 可表示成如下形式:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

即

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad (1.1)$$

此式称为复数 z 的三角表示式.

又由欧拉(Euler)公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, (1.1)式可改写成

$$z = re^{i\theta}, \quad (1.2)$$

此式称为复数 z 的指数表示式.

复数的各种表示方法可相互转化, 以适应讨论不同问题时的需要, 且使用起来各有其便.

例 2 将下列复数化为三角表示式.

(1) $1 - \sqrt{3}i$;

(2) $\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}$.

解 (1) 因为 $|1 - \sqrt{3}i| = 2$, $\arg(1 - \sqrt{3}i) = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$. 所以 $1 - \sqrt{3}i$ 的三角表示式可写成

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

(2) 因为 $|z| = 1$, 且

$$\sin \frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \cos \frac{2\pi}{5},$$

$$\cos \frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin \frac{2\pi}{5},$$

所以 $\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}$ 的三角表示式可写成

$$\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

复数的向量表示使得许多关于复数的“量”有着清晰的“形”的表露. 例如: 复数 $z_1 + z_2$ 所对应的向量, 就是复数 z_1 所对应的向量与复数 z_2 所对应的向量的和向量(图 1.5); 复数 $z_1 - z_2$ 所对应的向量, 就是从 z_2 到 z_1 的向量(图 1.6), 从而 $|z_1 - z_2|$ 可看作是复平面上点 z_1 到点 z_2 的距离, 这是一个很有用的结果. 由此可知, 复平面上以 z_0 为中心, 以 r 为半径的圆盘, 可用不等式 $|z - z_0| < r$ 来表示.

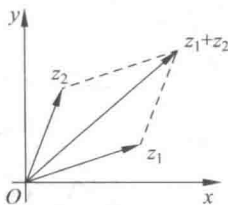


图 1.5

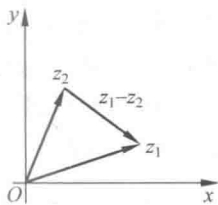


图 1.6

根据图 1.5 与图 1.6, 可得到有关复数模的三角不等式

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.3 复数的乘幂与方根

1.3.1 复数的乘积与商

在 1.2 节中我们已经指出,复数的加、减法与向量的加、减法相一致,然而复数的乘法与向量的数量积和向量积都不相同.不过,利用复数的三角表示可对复数的乘法与除法作出新的解释.

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, 则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

于是,我们有如下定理.

定理 1.1 两个复数乘积的模等于各个复数模的乘积,两个复数乘积的辐角等于各个复数辐角的和,即

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \quad (1.4)$$

关于定理 1.1 需注意以下几点:

(1) 要正确理解等式(1.4). 因为复数的辐角具有无穷多个,所以等式(1.4)表示左右两端可取值的全体是相同的,即对于 $\operatorname{Arg} z_1$ 的任意一个取定的值与 $\operatorname{Arg} z_2$ 的任意一个取定的值的和,必有 $\operatorname{Arg}(z_1 z_2)$ 的某一个值与之相等. 反之亦然. 但在一般情况下, $\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$. 例如, 设 $z_1 = i$, $z_2 = -1$, 则 $z_1 z_2 = -i$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{2}$, $\arg z_2 = \pi$, $\arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2}$, 显然 $\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$.

(2) 定理 1.1 给出了复数乘法的几何意义: 相当于一次旋转, 一次伸缩. 例如, 向量 $z_1 z_2$ 可看作是先将向量 z_1 绕逆时针旋转 $\operatorname{Arg} z_2$, 再伸长(缩短) $|z_2|$ 倍而得到, 如图 1.7 所示. 特别地, 当 $|z_2| = 1$ 时, 相当于仅是旋转; 当 $\arg z_2 = 0$ 时, 相当于仅是伸长(缩短). 例如: $-iz$ 相当于将 z 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$, $-z$ 相当于将 z 逆时针旋转 π , $2z$ 相当于将 z 伸长 2 倍.

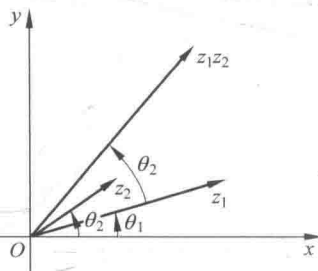


图 1.7

(3) 定理 1.1 可推广到 n 个复数相乘的情况, 设

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

则

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)].$$

例 1 用三角表示计算 $(1 + \sqrt{3}i)(-\sqrt{3} - i)$.

解 因为

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{3}i &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \\ -\sqrt{3} - i &= 2 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right]. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i)(-\sqrt{3} - i) &= 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \right] \\ &= 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = -4i. \end{aligned}$$

例 2 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 与 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

解 如图 1.8 所示, 将 $z_2 - z_1$ 所表示的向量绕逆时针(或顺时针)方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后得到另一个向量 $z_3 - z_1$ (或 $z'_3 - z_1$), 它的终点 z_3 (或 z'_3) 即为所求的顶点. 因此, 根据复数乘法的几何意义, 有

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (z_2 - z_1) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (1 + i) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i; \end{aligned}$$

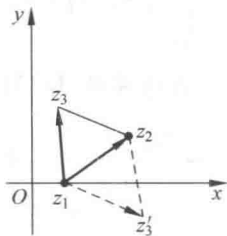


图 1.8

所以

$$z_3 = z_1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i = 1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i.$$

同理可得

$$z'_3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i.$$

下面来看看复数商的情况. 根据复数商的定义, 当 $z_1 \neq 0$ 时, 有

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1,$$

于是

$$|z_2| = \left| \frac{z_2}{z_1} z_1 \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| |z_1|, \quad \text{Arg} z_2 = \text{Arg} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) + \text{Arg} z_1.$$

从而得



$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1.$$

因此,如下定理成立:

定理 1.2 两个复数商的模等于各个复数模的商,两个复数商的辐角等于各个复数辐角的差.

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \neq 0$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, 则

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}[(\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1))].$$

例 3 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 求 $\frac{1}{z}$ 的三角表示式.

解 $\frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)].$

1.3.2 复数的乘幂与方根

定义 1.1 n 个相同复数 z 的乘积称为复数 z 的 n 次幂, 记作 z^n .

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \quad (1.5)$$

特别地, 当 $r=1$, 即 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ 时, 则

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \quad (1.6)$$

这就是棣莫弗(De Moivre)公式.

若定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, 则由定理 1.2 和公式(1.5)有

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)].$$

即公式(1.5)对任意的整数 n 都成立.

定义 1.2 称满足方程 $\omega^n = z$ 的所有 ω 为 z 的 n 次方根, 记作

$$\omega = \sqrt[n]{z}.$$

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\omega = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, 则

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

于是

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

从而

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

所以

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

当 $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ 时, 上式得到 n 个互不相同的根. 当 k 取其他整数时, 这些根将重复出现. 例如 $k=n$ 时,

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2n\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2n\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \right) \right] \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) = \omega_0.\end{aligned}$$

因此, 对非零复数 z 开 n 次方根有且仅有 n 个不同的根, 即

$$\begin{aligned}\omega_k &= \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.\end{aligned} \quad (1.7)$$

在几何上, 这 n 个根是以原点为圆心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点, 其中一个顶点的辐角等于 $\frac{\theta}{n}$.

例 4 计算 $(1 + \sqrt{3}i)^3$.

$$\text{解} \quad (1 + \sqrt{3}i)^3 = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^3 = 8(\cos \pi + i \sin \pi) = -8.$$

例 5 计算 $\sqrt[4]{-2 + 2i}$.

解 因为 $-2 + 2i = \sqrt{8} \left[\cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right]$, 所以

$$\begin{aligned}\omega_k &= \sqrt[4]{-2 + 2i} = \sqrt[4]{\sqrt{8} \left[\cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right]} \\ &= \sqrt[8]{8} \left[\cos \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4} \right] \\ &= \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{3\pi + 8k\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi + 8k\pi}{16} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16} \right), \\ \omega_1 &= \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16} \right), \\ \omega_2 &= \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16} \right), \\ \omega_3 &= \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{27\pi}{16} + i \sin \frac{27\pi}{16} \right).\end{aligned}$$

这四个根是以原点为圆心, $\sqrt[8]{8}$ 为半径的圆的内接正四边形的四个顶点, ω_0 的辐角主值为 $\frac{3\pi}{16}$.