

高等学校研究生教材

啮合原理

The Principle of Meshing

安子军 宜亚丽 主编



国防工业出版社

National Defense Industry Press

高等学校研究生教材

啮合原理

安子军 宜亚丽 主 编



国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本教材系统而简要地介绍了以齿轮啮合传动为代表的高副啮合基本原理。本教材共分3章及附录。第1章介绍平面啮合的基本原理,第2章介绍空间啮合的基本原理,第3章介绍平面二次包络弧面蜗杆传动,附录1介绍了矢量代数,附录2给出了啮合原理重要名词术语中英文对照表。

本教材可作为高等院校机械工程相关专业的研究生教材,也可供从事机械设计与制造等专业的工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

啮合原理 / 安子军, 宜亚丽主编. —北京: 国防工业出版社, 2017. 3

ISBN 978 - 7 - 118 - 11268 - 9

I. ①啮… II. ①安… ②宜… III. ①啮合 IV. ①TH132. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 065534 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 8 $\frac{3}{4}$ 字数 160 千字

2017 年 3 月第 1 版第 1 次印刷 定价 32.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

随着工业生产的迅速发展,各种新型齿轮和齿轮加工新工艺的应用也日益增加。渐开线齿轮由于其独特的优点,如传动平稳、制造容易、互换性好、易于变位、对制造与装配误差不敏感等,是目前应用最广泛的齿轮。但渐开线齿轮的强度低、最大齿数大使体积较大等缺点使其不能满足高速重载和小型化等方面的需要。各国的学者们一直尝试设计制造出性能更好的齿轮,各种新型齿形不断涌现。为了适应这种发展趋势,有必要研究齿轮啮合的一般理论,探讨其共性规律,为各种新型齿轮的研究和开发提供系统的理论指导。

第1章主要介绍平面齿轮啮合的基本原理,如:瞬心线、共轭齿廓及其求解方法,平面高副机构的运动关系及根切、过渡曲线、共轭齿廓的曲率关系和欧拉—沙瓦里公式等。

第2章主要介绍空间啮合的基本原理,如两构件空间相对运动关系、共轭曲面、螺旋面、两类界限点、二次啮合、诱导法曲率和曲率干涉等。

第3章主要介绍平面二次包络弧面蜗杆传动的齿面形成原理,如第一次包络蜗杆齿面和第二次包络蜗轮齿面等。

为了有利于研究生更好地掌握专业外语知识并加强相关外文资料的阅读和理解,本教材给出了啮合原理重要名词术语的中英文对照表。

本教材作者长期从事“啮合原理”课程的教学,积累了较丰富的教学经验。作者致力于机械传动领域特别是新型机械传动的理论和控制等方面的研究,完成和在研多项国家自然科学基金和河北省自然科学基金等项目的研究工作,在精密钢球传动和摆动活齿传动方面发表百余篇学术论文并获得多项发明专利。作者将多年的教学研究实践和经验积累充实到本教材中,以期对研究生课程学习和研究工作有所裨益。

本教材由安子军教授、宜亚丽副教授合作编写,安子军教授统稿。

本教材编写得到了燕山大学研究生院课程教材建设项目(JC 201502)、燕山大学机械工程学院课程教材建设项目和国家自然科学基金项目(51275440)的支持,作者在此表示深深的谢意。

本教材承曲继方教授主审,曲教授提出了许多宝贵意见和建议,在此表示诚挚的感谢。

作者感谢张文举、宋敬稳、冯绍富、张晓美、张贺、兰春雷、靳景川、曾庆峰、洪诚、孙鹏飞、邵苍、夏婧琪等二十余名研究生在文稿输入和图形绘制处理等工作付出的劳动。此外,还向本教材中参考和引用过的全部文献资料的作者表示谢意。

在编写过程中,限于作者的水平,教材中的疏漏之处在所难免,敬请读者不吝指正。

作者

2016年10月

目 录

第 1 章 平面啮合的基本原理	1
1.1 瞬心线	1
1.1.1 两构件的相对运动	1
1.1.2 齿轮机构的瞬心线	3
1.2 共轭齿廓	8
1.2.1 Willis 定理	8
1.2.2 共轭齿廓	9
1.3 坐标变换	12
1.3.1 齿轮与齿轮啮合	12
1.3.2 齿轮与齿条啮合	17
1.4 运动学法求解共轭齿廓	19
1.5 齿廓法线法求解共轭齿廓	23
1.5.1 齿轮与齿轮啮合	23
1.5.2 齿轮与齿条啮合	28
1.6 啮合线法求解共轭齿廓	30
1.6.1 齿轮与齿条啮合	30
1.6.2 齿轮与齿轮啮合	35
1.7 平面高副机构的运动关系	39
1.8 平面啮合中的根切	41
1.8.1 齿廓奇异点条件	41
1.8.2 刀具齿廓根切界限点	42
1.9 过渡曲线	49
1.9.1 齿条型刀具	49
1.9.2 齿轮型刀具	52
1.10 共轭齿廓的曲率关系	53
1.10.1 齿轮啮合的相对运动	54
1.10.2 欧拉—沙瓦里公式	56

1.11	平面啮合的两类界限点	59
1.11.1	啮合界限点	59
1.11.2	根切界限点	61
第2章	空间啮合基本原理	64
2.1	空间啮合的坐标系及其变换	64
2.2	两构件相对运动的速度	67
2.3	相对运动螺旋轴和瞬轴面	69
2.4	共轭曲面	73
2.4.1	啮合方程	73
2.4.2	共轭曲面的确定	75
2.5	螺旋面	78
2.5.1	螺旋面的形成	78
2.5.2	螺旋面的法线	80
2.5.3	几种常用的螺旋面	80
2.6	两类界限点	87
2.6.1	一类界限点	87
2.6.2	二类界限点	88
2.7	二次啮合	90
2.8	诱导法曲率	91
2.8.1	矢量函数的相对微分	91
2.8.2	沿任意切线方向的诱导法曲率	93
2.8.3	诱导主方向与诱导主曲率	98
2.8.4	沿相对速度方向的诱导法曲率	100
2.9	齿面啮合点的曲率干涉	101
第3章	平面二次包络弧面蜗杆传动	104
3.1	概述	104
3.2	第一次包络——包络蜗杆齿面 $\Sigma^{(1)}$	105
3.2.1	坐标系	105
3.2.2	啮合方程	107
3.2.3	刀具齿面 $\Sigma^{(2)}$ 上的瞬时接触线方程式	110
3.2.4	蜗杆齿面 $\Sigma^{(1)}$ 的方程式	111
3.2.5	二类界限曲线	112
3.2.6	一类界限曲线	113

3.2.7	相对速度方向和接触线方向的夹角	115
3.2.8	诱导法曲率	116
3.3	第二次包络——包络蜗轮齿面 $\Sigma^{(2)}$	117
3.3.1	啮合方程	117
3.3.2	双接触线	120
3.3.3	二类界限曲线	123
3.3.4	一类界限曲线	124
3.3.5	相对速度方向和接触线方向的夹角	125
3.3.6	诱导法曲率	126
附录 1	矢量代数简述	127
附录 2	啮合原理重要名词术语中英文对照表	129
参考文献	132

第1章 平面啮合的基本原理

在平面齿轮传动中,相啮合齿廓的相对运动一般是滚动兼滑动的,而两齿轮的节线是作纯滚动的。前者称为共轭曲线,后者称为瞬心线,在定传动比传动的齿轮中,其瞬心线为圆周(节圆),这种齿轮称为圆形齿轮。在变传动比传动的齿轮中,其瞬心线为非圆曲线,这种齿轮称为非圆齿轮。

1.1 瞬心线

在机械原理中指出:当两构件作平面运动时,在这两构件上相对速度为零的瞬时重合点称为瞬心。瞬心的位置是随两构件的连接运动而变动的。把每一构件上曾经作为瞬心的点连接起来,就得到一条瞬心点的轨迹,即瞬心线。因此,在求解瞬心线之前,必须先研究两构件的相对运动。

1.1.1 两构件的相对运动

如图1-1所示,设构件1以角速度矢 ω_1 绕 O_1 轴回转,构件2以角速度矢 ω_2 绕 O_2 轴回转,在任意接触点 M 处,构件1相对于构件2的相对速度矢可如下求出。

将 M 点看作构件1上的一点时,其速度矢 V_1 为

$$V_1 = \omega_1 \times r_1$$

式中: r_1 为构件1上 M 点的径矢。

将 M 点看作构件2上的一点时,其速度矢 V_2 为

$$V_2 = \omega_2 \times r_2$$

式中: r_2 为构件2上 M 点的径矢。

在 M 点处的相对速度矢 V_{12} 为

$$V_{12} = V_1 - V_2 = \omega_1 \times r_1 - \omega_2 \times r_2 \quad (1-1)$$

如果把中心距 O_1O_2 看作1矢量 a ,由图1-1可知

$$r_2 = r_1 - a$$

故 V_{12} 又可写成

$$\begin{aligned} V_{12} &= (\omega_1 - \omega_2) \times r_1 + \omega_2 \times a \\ &= \omega_{12} \times r_1 + \omega_2 \times a \end{aligned} \quad (1-2)$$

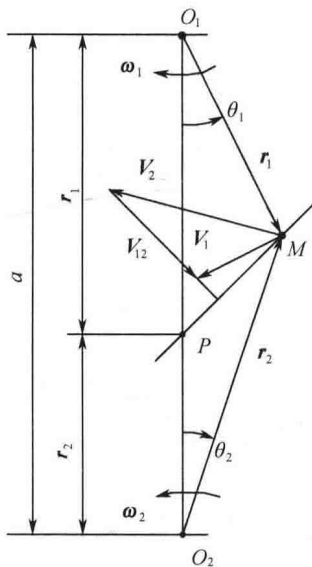


图 1-1

式中: $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$ 为相对角速度矢。

在两构件上, $V_1 = V_2$ 的重合点, 其相对速度 $V_{12} = 0$, 该点即为两构件相对运动的瞬心。在齿轮传动中, 将该点称为节点。显然, 瞬心应在两构件回转中心 O_1, O_2 的连心线上, 否则 V_1 和 V_2 的方向就不可能相同。如图 1-1 所示, 设 P 为瞬心时, 则有

$$\omega_1 \cdot \overline{O_1P} = \omega_2 \cdot \overline{O_2P}$$

所以两构件的瞬时传动比 i_{12} 为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}} \quad (1-3)$$

式中: ω_1, ω_2 为角速度矢 ω_1, ω_2 的模。

P 点为瞬心, 还可以用下法加以证明, 如图 1-1 所示。

$$r_1 = O_1P + PM = - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) O_2P + PM$$

$$r_2 = O_2P + PM$$

将以上两式代入式(1-1), 可得

$$V_{12} = V_1 - V_2 = \omega_1 \times \left[- \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) O_2P + PM \right] - \omega_2 \times (O_2P + PM)$$

由于 ω_1, ω_2 的指向相反(外啮合), 故有

$$- \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \omega_1 = \omega_2$$

最后可得

$$\mathbf{V}_{12} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{PM} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{PM} = \boldsymbol{\omega}_{12} \times \mathbf{PM} \quad (1-4)$$

上式表示,在任意点 M 处的相对速度矢 \mathbf{V}_{12} 就等于该点以相对角速度矢 $\boldsymbol{\omega}_{12}$ 绕 P 点转动的线速度。故 P 点就是两构件相对运动的瞬时中心,即相对瞬心。

瞬心 P 在构件 1,2 上的轨迹,分别为构件 1,2 的瞬心线,若两构件整周回转,则瞬心线为封闭曲线,否则为不封闭曲线。在齿轮传动中瞬心线称为节线。

两构件作定速比传动时,瞬心 P 在连心线上为一定点,故其瞬心线为圆,在齿轮传动中称之为节圆,所以将定传动比的齿轮称为圆形齿轮。

两构件作变速比传动时,瞬心 P 在连心线上不是一个定点,其位置随传动比的变化而变化,故瞬心线不再是圆而是非圆的曲线,所以将传递变速比的齿轮称为非圆齿轮。

1.1.2 齿轮机构的瞬心线

1. 瞬心线方程

1) 齿轮与齿轮啮合

如图 1-1 所示,设 $\overline{O_1P} = r_1$, $\overline{O_2P} = r_2$, 并设轮 1 为主动轮,轮 2 为从动轮,转角分别为 φ_1 和 φ_2 , 由于 φ_2 是 φ_1 的函数,则

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1/dt}{d\varphi_2/dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1} = f(\varphi_1) \quad (1-5)$$

而中心距为

$$a = r_2 \pm r_1$$

式中,上边的符号用于外啮合,下边的符号用于内啮合,并假定 $r_2 > r_1$ 。

由于 $i_{12} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a \mp r_1}{r_1}$, 故轮 1 的瞬心线方程为

$$r_1 = \frac{a}{i_{12} \pm 1} = \frac{a}{f(\varphi_1) \pm 1} \quad (1-6)$$

轮 2 的瞬心线方程为

$$r_2 = a \mp r_1 = a \left(1 \mp \frac{1}{i_{12} \pm 1} \right) = a \frac{i_{12}}{i_{12} \pm 1} = a \frac{f(\varphi_1)}{f(\varphi_1) \pm 1} \quad (1-7a)$$

而由 $i_{12} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$ 得 $d\varphi_2 = \frac{1}{i_{12}} d\varphi_1$, 则轮 2 的转角为

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{f(\varphi_1)}$$

瞬心线方程的自变量转角也称极角 θ , 和齿轮的转角 φ 大小相等, 但应按相反的方向来计量, $\theta_1 = -\varphi_1$, $\theta_2 = -\varphi_2$, 如图 1-1 所示。

若 $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = f(\varphi_1) = \text{常数}$, 则 r_1, r_2 为常数, 即瞬心线分别为半径为 r_1, r_2 的圆。

若 $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = f(\varphi_1) \neq \text{常数}$, 则 r_1, r_2 为变量, 即瞬心线分别为封闭曲线。

2) 齿轮与齿条啮合

当齿轮与齿条啮合时, 如图 1-2 所示, 设齿轮 1 为主动件, 其角速度为 $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ 。齿条 2 为从动件, 作平移运动, 其移动速度 $V_2 = \frac{ds_2}{dt}$, 根据三心定理, 瞬心 P 的位置应在垂直于齿条移动方向的直线 O_1n 上, 可如下求得:

$$\overline{O_1P} = \frac{V_2}{\omega_1} = \frac{ds_2/dt}{d\varphi_1/dt} = \psi(\varphi_1) \quad (1-7b)$$

即瞬心 P 与轮 1 轴心 O_1 的距离等于移动速度 V_2 与轮 1 角速度 ω_1 的比值。

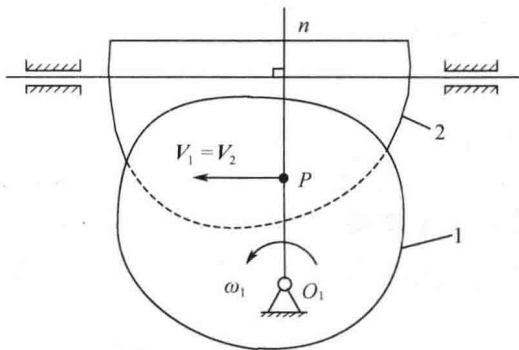


图 1-2

当定传动比时, $\psi(\varphi_1) = \text{常数}$, 在这种情况下, 齿轮 1 的瞬心线是半径为 $r_1 = \overline{O_1P} = \frac{V_2}{\omega_1} = \psi(\varphi_1) = C$ 的圆, 即节圆。而齿条的瞬心线是一条与此圆相切的直线, 即节线。

当非圆齿轮与齿条传动时, 如图 1-3 所示, 为变速比传动, $\psi(\varphi_1) \neq \text{常数}$, 齿轮瞬心线方程为

$$r_1 = \overline{O_1P} = \psi(\varphi_1) \quad (1-8)$$

在机械原理中指出: 一对齿轮的传动可以看为两瞬心线在一起作无滑动的滚动。根据这一原理, 可知齿条的微位移为 $\Delta x = r_1 \Delta\varphi_1$, 故在直角坐标系中, 齿条的瞬心线方程的 x, y 为

$$\begin{cases} x = \int_0^{\varphi_1} r_1 d\varphi_1 \\ y = r_1 \end{cases} \quad (1-9)$$

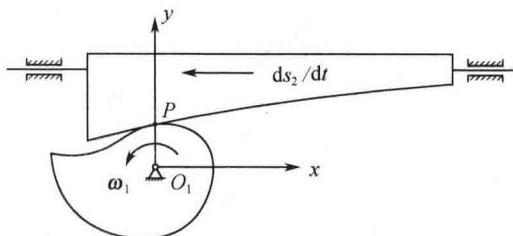


图 1-3

[例 1-1] 已知齿轮与齿条啮合传动, 模数为 m , 齿轮齿数为 z_1 , 转角为 φ_1 , 齿条位移为 s_2 , a 为齿轮轴心至齿条轴线的距离, 设齿轮与齿条之间的运动关系为

$$s_2 = \frac{mz_1}{2}\varphi_1 + a\sin\varphi_1$$

试求其瞬心线。

[解] 根据式(1-7b)

$$\overline{O_1P} = \frac{V_2}{\omega_2} = \psi(\varphi_1) = \frac{ds_2}{dt} / \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{mz_1}{z} + a\cos\varphi_1$$

根据式(1-8), 齿轮 1 的瞬心线方程为

$$r_1 = \overline{O_1P} = \psi(\varphi_1) = \frac{mz_1}{z} + a\cos\varphi_1$$

利用式(1-9), 齿条 2 的瞬心线方程为

$$x = \int_0^{\varphi_1} r_1 d\varphi_1 = s_2 = \frac{mz_1}{2}\varphi_1 + a\sin\varphi_1$$

$$y = r_1 = \frac{mz_1}{z} + a\cos\varphi_1$$

2. 齿轮瞬心线封闭的条件

在设计齿轮时, 一般是根据运动的要求, 先给定传动比 $i_{12} = f(\varphi_1)$ 及齿轮 1 的转角范围 $\varphi_{1\min}$ 与 $\varphi_{1\max}$, 然后按式(1-6)决定轮 1 的瞬心线, 按式(1-7)决定轮 2 的转角范围 $\varphi_{2\min}$ 与 $\varphi_{2\max}$ 。

用上法求出的瞬心线, 可能不是封闭的, 如图 1-4 所示, 它只能作往复运动, 而不能作连续回转。如果要求齿轮能作连续传动, 则相啮合的两轮的瞬心线必须是封闭的。

现在来讨论瞬心线为封闭曲线的条件(以下仅讨论外啮合)。

齿轮 1 的瞬心线方程式为

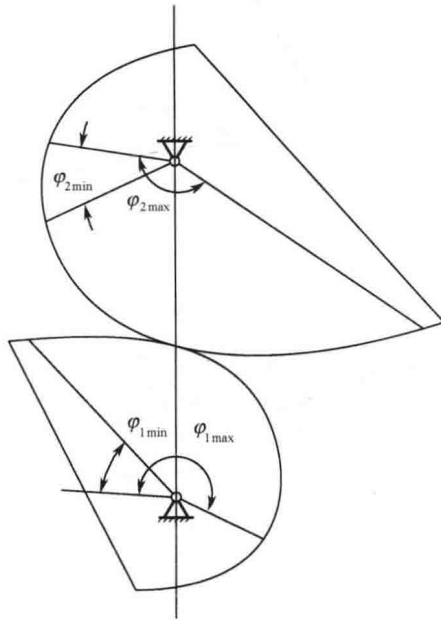


图 1-4

$$r_1 = \frac{a}{1 + i_{12}}, \quad \text{或} \quad i_{12} = \frac{a - r_1}{r_1}$$

式中:中心距 a 为常数,故 r_1 随着 i_{12} 而变,当 i_{12} 变化一周期时, r_1 也变化一周。要使轮 1 的瞬心线封闭,必须使 $\varphi_1 = 0$ 及 $\varphi_1 = 2\pi$ 时, r_1 具有相同的值, φ_1 为 i_{12} 每变化一个周期轮 1 的转角。即在 $\varphi_1 = 0 \sim 2\pi$ 的范围内, i_{12} 的变化周期数 n_1 为一整数,否则当 $\varphi_1 = 0$ 时所对应的 r_1 与 $\varphi_1 = 2\pi$ 时所对应的 r_1 将具有不同的值,这两个 r_1 不能重合,瞬心线就不能封闭。

根据式(1-7),轮 2 的瞬心线方程为

$$r_2 = a \frac{i_{12}}{1 + i_{12}}, \quad \text{或} \quad i_{12} = \frac{r_2}{a - r_2}$$

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}}$$

式中: a 为常数; i_{12} 每变化一周期,设轮 2 的转角为 $\varphi_2 = \frac{2\pi}{n_2}$, n_2 为轮 2 在 $\varphi_2 = 0 \sim 2\pi$ 时, i_{12} 的变化周期数, φ_2 为 i_{12} 每变化一个周期轮 2 的转角。由于轮 1 的转角 $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ 与轮 2 的转角 $\varphi_2 = \frac{2\pi}{n_2}$ 是在 i_{12} 的同一周期内所转过的角度,它们是同时完成的,

$$\text{即} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = i_{12}, \quad \varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{i_{12}} d\varphi_1。$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{\varphi_1 = \frac{2\pi}{n_1}} \frac{d\varphi_1}{i_{12}} = \int_0^{\varphi_1 = \frac{2\pi}{n_1}} \frac{r_1(\varphi_1)}{a - r_1(\varphi_1)} d\varphi_1 \quad (1-10)$$

和轮 1 相同,要轮 2 的瞬心线为封闭的,式中 n_2 必须为整数。

故得到齿轮瞬心线封闭条件:齿轮转角 φ 在 $0 \sim 2\pi$ 内, i_{12} 的变化周期 n_1 和 n_2 为整数,或在 i_{12} 变化一周期时瞬心线在起始和终止点处的矢量相等。

[例 1-2] 设在非圆齿轮机构中,已知齿轮 1 的瞬心线为椭圆,其回转中心在椭圆的焦点之一 O_1 上(图 1-5),齿轮 1 的椭圆瞬心线的参数如下:长轴为 $2a_1$,短轴为 $2b$,焦距为 $2c$,通过椭圆的焦点 O_1 而垂直于椭圆长轴的弦长为 $2F$,椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a_1}$, a_1 与 F 的关系为 $F = a_1(1 - e^2)$,椭圆瞬心线方程式的极坐标形式为

$$r_1(\varphi_1) = \frac{F}{1 + e\cos\varphi_1}$$

证明:与齿轮 1 啮合的齿轮 2 的瞬心线也为椭圆。

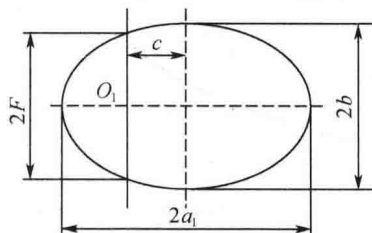


图 1-5

[解] 当设计与此椭圆齿轮相啮合的齿轮时,必须首先确定两齿轮的中心距 a ,以便使所求的瞬心线为封闭的,为此要解方程式(1-10)。在本例中 $\cos\varphi_1$ 的变化周期为 2π ,齿轮 1 转一圈, r_1 变化一个周期, $n_1 = 1$,因此函数 $r_1(\varphi_1)$ 的周期和传动比函数 i_{12} 的周期均等于主动齿轮的回转周期。显然在这种情况下, n_2 等于从动轮转一周时,主动轮的转数 n_1 。

将 $r_1(\varphi_1)$ 的表达式代入式(1-10)中,可得

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{2\pi} \frac{F}{a - F + ae\cos\varphi_1} d\varphi_1 = \frac{2\pi F}{\sqrt{(a - F)^2 - a^2 e^2}}$$

$$a^2 = \frac{F^2(n_2^2 - 1) + 2aF}{1 - e^2}$$

整理得

$$a = \frac{F}{1 - e^2} [1 + \sqrt{1 + (n_2^2 - 1)(1 - e^2)}]$$

当 $n_2 = 1$ 时,也就是主动齿轮转一周时,从动齿轮也转过一周,则

$$a = \frac{2F}{1 - e^2} = 2a_1$$

两轮的轴心距等于齿轮 1 的长轴直径, 齿轮 2 的瞬心线也是椭圆, $r_2 = a - r_1 = \frac{F}{1 - e \cos \varphi_2}$, 形状和齿轮 1 的瞬心线完全相同, 极轴方向相差 180° 。

1.2 共轭齿廓

由上述可知, 两构件的运动可以看作两条瞬心线在一起作无滑动的滚动。从理论上说, 若将这两条瞬心线的外形做成一对摩擦轮就可以用来传递运动, 可分成两种情况。

(1) 由非圆瞬心线所构成的摩擦轮传动(图 1-6), 不可能作整周的连续传动, 当轮 1 为主动时, 在图示位置两轮将脱离接触, 传动被迫终止。

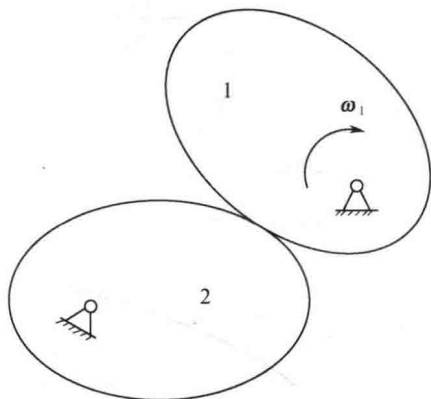


图 1-6

(2) 由圆形瞬心线所构成的摩擦轮传动, 虽无上述缺点, 但两摩擦轮之间所能传递的扭矩与摩擦轮上所加的正压力成正比, 这样当传递大的扭矩时, 就使轴承上受到巨大的载荷。为此, 在两构件的瞬心线上固联一对齿廓, 靠该对齿廓的连续接触来进行传动, 这样, 就用齿轮传动代替了摩擦轮传动。

要使两齿轮能够实现预定的传动比, 两轮的齿廓必须满足一定的几何条件, 即必须满足齿廓啮合的基本定律(Willis 定理)。

1.2.1 Willis 定理

如图 1-7 所示, 设 I、II 为两齿轮的瞬心线, 在某一瞬时它们相切于 P 点, 而 Γ_1 、 Γ_2 为相啮合的一对齿廓, 它们在啮合点 M 处相切。要使两齿廓既不相互脱离, 又不相互嵌入, 而能连续地相切传动, 则两齿廓在接触点 M 的公法线 nn 方向上必

须没有相对速度,即两齿廓在接触点 M 处的相对滑动速度 V_{12} 在公法线 n 上的投影必须为零。

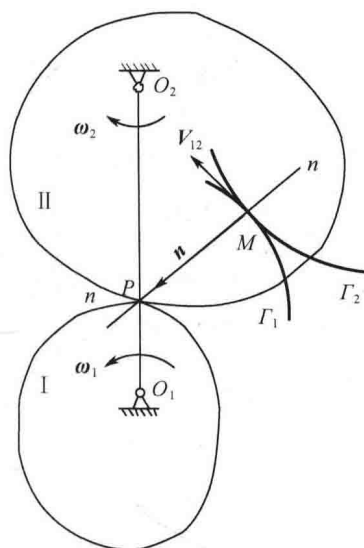


图 1-7

用矢量式表示,则有

$$V_{12} \cdot n = 0 \quad (1-11)$$

上式称为啮合方程式。

在上一节中,已证明了 V_{12} 垂直于 PM , 要满足 $V_{12} \cdot n = 0$ 的关系, 瞬时回转半径 PM 的方向必须与两齿廓在接触点 M 处的公法线 n 的方向重合。也就是说公法线 n 必定通过瞬心(节点) P 。故 Willis 定理可表述如下: 相互啮合的两齿廓, 在其接触点处的公法线必须通过啮合点 P 。

由于 P 点是在连心线 O_1O_2 上, 且

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}$$

故当传动比 $i_{12} = \text{常数}$ 时, P 点在连心线 O_1O_2 上的位置是固定的, 即 P 为一定点。当传动比 i_{12} 为变量时, P 点在连心线上的位置不是固定的, 而是按一定的规律变化。不论对于定传动比的平面啮合, 还是对于变传动比的平面啮合, Willis 定理都是适用的。

1.2.2 共轭齿廓

凡能实现预定的传动比规律而相互啮合的一对齿廓称为共轭齿廓。齿轮传动的传动质量取决于共轭齿廓, 研究齿轮啮合原理的主要任务之一, 就是寻求最佳的