世界经典
科普读本

几何原本

Euclid's Elements

〔古希腊〕欧几里得◎著
李彩菊◎译

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世界经典
科普读本

几何原本

Euclid's Elements

〔古希腊〕欧几里得◎著

李彩菊◎译

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

几何原本 / (古希腊) 欧几里得著；李彩菊译. —北京：北京理工大学出版社, 2017.8

ISBN 978-7-5682-4184-7

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①欧… ②李… Ⅲ. ①欧氏几何 Ⅳ. ①O181

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第143241号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http: //www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市金元印装有限公司
开　　本 / 700 毫米 × 1000 毫米　1/16
印　　张 / 38.5
字　　数 / 434千字
版　　次 / 2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 65.00元

责任编辑 / 刘永兵
文案编辑 / 刘永兵
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

目录

Contents

第 1 卷　平面几何基础 ······001
第 2 卷　几何代数的基本原理······051
第 3 卷　与圆有关的平面几何······072
第 4 卷　与圆有关的直线图形的作法 ······117
第 5 卷　比例······138
第 6 卷　相似图形······169
第 7 卷　初等数论······213
第 8 卷　连比例 ······252
第 9 卷　数论的应用······280
第 10 卷　无理量 ······310
第 11 卷　简单立体几何 ······479
第 12 卷　立体几何中的比例问题 ······534
第 13 卷　正多面体 ······572

第 1 卷　平面几何基础

定 义

1. 点：点不可以再分割。

2. 线：线是无宽度的长度。

3. 线的两端是点。

4. 直线：直线是它上面的点一样地平铺的线。

5. 面：面只有长度和宽度。

6. 面的边是线。

7. 平面：平面是它上面的线一样地平铺的面。

8. 平面角：平面角是一个平面上的两条直线相交的倾斜度。

9. 平角：当含有角的两条线成一条直线时，这个角称为平角。

10. 直角与垂线: 一条直线与另一条直线相交所形成的两相邻的角相等，这两个角均称为直角，其中一条是另一条的垂线。

11. 钝角：当一个角大于直角时，该角为钝角。

12. 锐角：当一个角小于直角时，该角为锐角。

13. 边界：边界是物体的边缘。

14. 图形：图形可以是一个边界，也可以是几个边界所围成的。

15. 圆：圆是由一条线包围（称作圆周）的平面图形，该圆里特定的一点到线上所有点的距离相等。

16. 圆心：上述特定的一点称为圆心。

17. 直径：任意一条经过圆心、两端点在圆上的线段叫作圆的直径。每条直径都可以将圆平分成两半。

18. 半圆：半圆是由一条直径和被直径所切割的圆弧组成的图形。半圆的圆心和原圆心相同。

19. 直线形是由直线所围成的图形：三角形是由三条线围成的，四边形是由四条线围成的，多边形则是由四条以上的直线围成的。

20. 在三角形中，若三条边相等，则称作等边三角形；若只有两条边相等，则称作等腰三角形；若三条边都不相等，则称作不等边三角形。

21. 在三角形中，若有一个角是直角，该三角形是直角三角形；若有一个角为钝角，该三角形是钝角三角形；若三个角都是锐角，该三角形是锐角三角形。

22. 在四边形中，若四个角都是直角且四条边相等，该四边形是正方形；若只有四个角为直角，四条边不相等，该四边形是矩形；若四边相等，角非直角，该四边形为菱形；若两组对边、两组对角分别相等，角非直角，边不全相等，该四边形是平行四边形；其他四边形是梯形。

23. 平行线：在同一平面内，两条直线向两端无限延伸而无法相交，这两条直线是平行线。

公 设

公设 1：过任意两点可以作一条直线。

公设 2：一条有限直线可以继续延长。

公设 3：以任意点为圆心，任意长为半径，可以画圆。

公设 4：所有的直角都彼此相等。

公设 5：同平面内一条直线和另外两条直线相交，若直线同侧的两个内角之和小于两直角和，则这两条直线经无限延长后，在这一侧相交。

公 理

公理 1：等于同量的量彼此相等。

公理 2：等量加等量，其和仍相等。

公理 3：等量减等量，其差仍相等。

公理 4：彼此能够重合的物体是全等的。

公理 5：整体大于部分。

命　题

命题 1

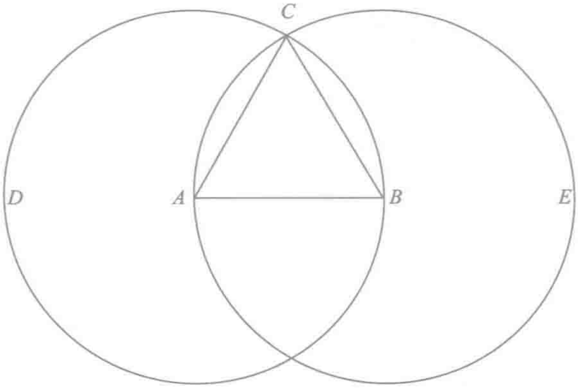
在一个已知有限直线（即线段——译者注）上作一个等边三角形。

已知给定的线段是 AB。

在线段 AB 上作等边三角形。

以 A 为圆心，并以 AB 为半径作圆 BCD【公设 3】；再以 B 为圆心，

并以 BA 为半径作圆 ACE【公设 3】；从两圆的交点 C 分别到 A 和 B，连接 CA 和 CB【公设 1】。



因为点 A 是圆 CDB 的圆心，AC 等于 AB【定义 1.15】。又，点 B 是圆 CAE 的圆心，BC 等于 BA【定义 1.15】。但 CA 和 CB 都等于 AB。而等于同量的量彼此相等【公理 1】。所以，CA 等于 CB。因此，三条线段 CA、AB 和 BC 彼此相等。

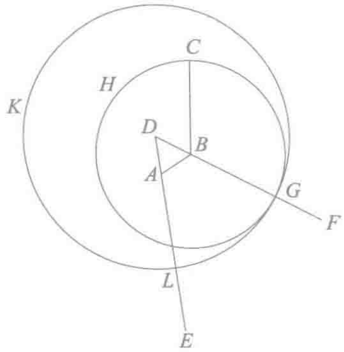
因此，三角形 ABC 是等边的，且在给定线段 AB 上作出了这个三角形。这就是命题 1 的结论。

命题 2[①]

由一个已知点（作为端点）作一条线段等于已知线段。

设 A 为已知点，BC 为已知线段。要求以 A 为端点，作长度与 BC 相等的线段。（由 A 点作一条线段等于已知线段 BC。——译者注）

① 该命题根据点 A 与线段 BC 相对位置的不同，存在不同情况。在这种情况下，欧几里得总是只考虑一种情况——通常情况，是最难的一种情况——其他情况就留给读者来当作练习。



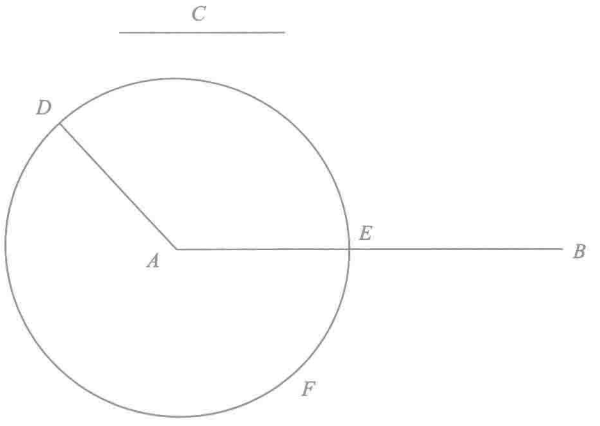
连接 AB，得到直线 AB【公设 1】，在 AB 上作等边三角形 DAB【命题 1.1】。分别延长 DA，DB 成直线 AE，BF【公设 2】。以 B 为圆心，以 BC 为半径，作圆 CGH【公设 3】（点 G 是圆与直线 DF 的交点——译者注），再以 D 为圆心，以 DG 为半径，作圆 GKL【公设 3】。

因为 B 是圆 CGH 的圆心，所以 BC 等于 BG【定义 1.15】。同理，因为 D 是圆 GKL 的圆心，所以 DL 等于 DG【定义 1.15】。又 DA 等于 DB。所以余量 AL 等于余量 BG【公理 3】。已证明 BC 等于 BG，所以 AL 和 BC 都等于 BG。又因为等于同量的量彼此相等【公理 1】。所以，AL 等于 BC。

所以，以 A 为端点作出线段 AL 等于已知线段 BC。这就是命题 2 的结论。

命题 3

两条不相等的线段，在长的线段上可以截取一条线段使它等于另一条线段。



设线段 AB 和 C 是两条不相等的线段，且 AB 长于 C。要求从 AB 上截取一条线段，使其等于线段 C。

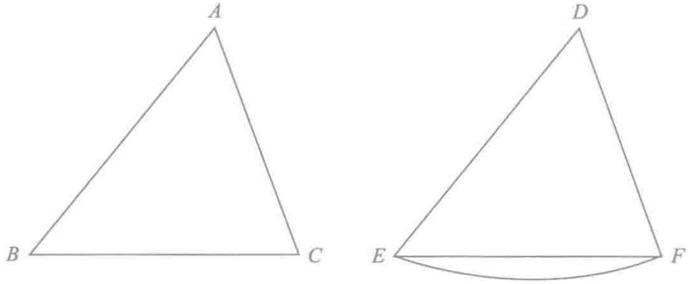
由 A 作 AD 等于线段 C【命题 1.2】，以 A 为圆心，以 AD 为半径画圆 DEF【公设 3】。

因为 A 是圆 DEF 的圆心，所以 AE 等于 AD【定义 1.15】。又因为线段 C 等于 AD，所以 AE 和 C 都等于 AD。所以 AE 等于 C【公理 1】。

因此，两条已知不相等的线段 AB 和 C，从 AB 上截取的线段 AE 等于线段 C。这就是命题 3 的结论。

命题 4

如果两个三角形中，一个的两边分别等于另一个的两边，且相等线段所夹的角相等，那么，它们的底边相等，两个三角形全等，且其余的角也分别等于相应的角，即等边所对的角。



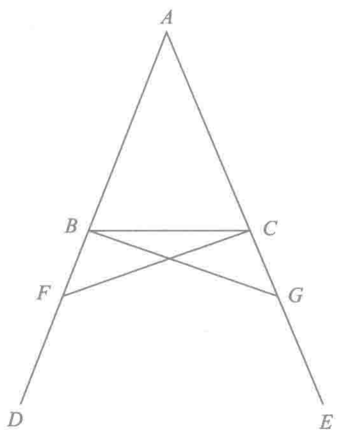
设在三角形 ABC 和三角形 DEF 中，AB 等于 DE，AC 等于 DF，且角 BAC 等于角 EDF。那么，就认为底边 BC 等于 EF，三角形 ABC 全等于三角形 DEF，并且这两个三角形中相等边所对的另外两个角也相等。（也就是）角 ABC 等于角 DEF，角 ACB 等于角 DFE。

如果把三角形 ABC 移动到三角形 DEF 上，若点 A 落在点 D 上，直线 AB 放在 DE 上，因为 AB 等于 DE，所以点 B 和点 E 重合。又角 BAC 等于角 EDF，线段 AB 与 DE 重合，所以 AC 与 DF 重合。又因为 AC 等于 DF，所以点 C 与点 F 重合。点 B 已经确定与点 E 重合，所以底 BC 与底 EF 重合。如若 B 与 E 重合，C 与 F 重合，底 BC 不与底 EF 重合，两条直线会围成一块有长有宽的区域，这是不可能的【公设 1】。因此，底 BC 与底 EF 重合，且 BC 等于 EF【公理 4】。所以整个三角形 ABC 与整个三角形 DEF 重合，于是它们全等【公理 4】。且其余的角也与其余的角重合，于是它们都相等【公理 4】，即角 ABC 等于角 DEF，角 ACB 等于角 DFE【公理 4】。

综上，如果两个三角形中，一个的两边分别等于另一个的两边，且相等线段所夹的角相等，那么，它们的底边相等，两个三角形全等，且其余的角也分别等于相应的角，即等边所对的角。这就是命题 4 的结论。

命题 5

在等腰三角形中，两底角彼此相等，若向下延长两腰，则在底边下面的两个角也彼此相等。



已知在等腰三角形 *ABC* 中，边 *AB* 等于边 *AC*，分别延长 *AB*、*AC* 成直线 *BD*、*CE*【公设 2】。可证角 *ABC* 等于角 *ACB*，且角 *CBD* 等于角 *BCE*。

在 *BD* 上任取一点 *F*，在较大的 *AE* 上截取一段 *AG*，使 *AG* 等于 *AF*【命题 1.3】。

连接 *FC* 和 *GB*【公设 1】。

因为 *AF* 等于 *AG*，*AB* 等于 *AC*，两边 *FA* 和 *AC* 分别与边 *GA* 和 *AB* 相等，且它们有一个公共角 *FAG*。所以，底 *FC* 等于底 *GB*，三角形 *AFC* 与三角形 *AGB* 全等，剩下的相等的边所对的角也分别相等（即等边对等角——译者注），即角 *ACF* 等于角 *ABG*，角 *AFC* 等于角 *AGB*【命题 1.4】。

又因为整体 *AF* 等于整体 *AG*，它们中的 *AB* 等于 *AC*，剩下的 *BF* 等于

剩下的 CG。【公理 3】

但已经证明 FC 与 GB 相等，所以边 BF、FC 分别与边 CG、GB 相等，且角 BFC 等于角 CGB。底边 BC 为公共边，所以，三角形 BFC 全等于三角形 CGB。等边对应的角也分别相等【命题 1.4】。

所以角 FBC 等于角 GCB，角 BCF 等于角 CBG。已经证明整个角 ABG 等于整个角 ACF，且角 CBG 等于角 BCF，剩下的角 ABC 等于剩下的角 ACB【公理 3】。

又它们在三角形 ABC 的底边以上。已经证明角 FBC 也等于角 GCB。它们在三角形的底边下。

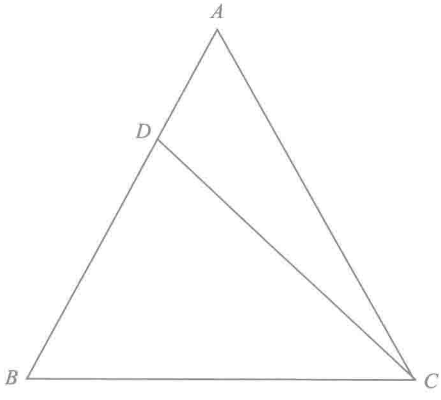
综上，在等腰三角形中，两底角彼此相等，且如果沿两腰作延长线，延长线与底边所成的角也彼此相等。这就是命题 5 的结论。

命题 6

在一个三角形里，如果有两个角彼此相等，那么这两个角所对的边也彼此相等。

已知在三角形 ABC 中，角 ABC 等于角 ACB，可证边 AB 等于边 AC。

假设 AB 不等于 AC，且 AB 大于 AC。在线段 AB 上作 DB 等于 AC【命题 1.3】。连接 DC【公设 1】。



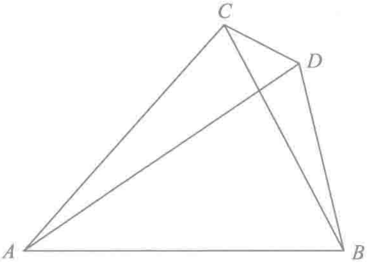
因为 DB 等于 AC，BC 是公共边，两边 DB、BC 分别与边 AC、CB 相等，且角 DBC 等于角 ACB，所以底边 DC 等于底边 AB，三角形 DBC 与三角形 ACB 全等【命题 1.4】，即小的等于大的。假设不正确【公理 5】。所以 AB 等于 AC。

综上，如果在一个三角形中，有两个角彼此相等，那么这两个等角对应的边也相等。这就是命题 6 的结论。

命题 7

过线段两端点引出的两条线段交于一点，则不可能在该线段（从它的两个端点）的同侧作出相交于另一点的另两条线段，分别等于前两条线段。

设线段 AC、CB 分别等于 AD、DB，且它们的端点都在线段 AB 上，AC、CB 相交于点 C，AD、DB 相交于点 D，C、D 在（线段 AB 的）同一侧。所以 CA 等于 DA，有公共点 A，CB 等于



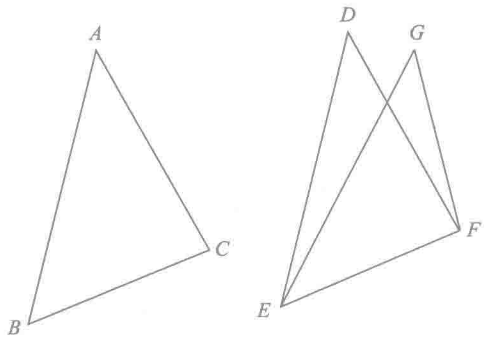
DB，有公共点 *B*。连接 *CD*【公设 1】。

因为 *AC* 等于 *AD*，所以角 *ACD* 等于角 *ADC*【命题 1.5】。所以，角 *ADC* 大于角 *DCB*【公理 5】。进而角 *CDB* 大于角 *DCB*【公理 5】。又因为 *CB* 等于 *DB*，所以角 *CDB* 等于角 *DCB*【命题 1.5】。但是前面得出前者大于后者，所以矛盾，假设不对。

综上，过线段端点引出两条线段交于一点，则不可能过同一线段两端且在同侧作出相交于另一点的两条线段，使其分别等于前两条线段。这就是命题 7 的结论。

命题 8

如果一个三角形的三条边与另外一个三角形的三条边都相等，那么等边所夹的角也都相等。



设 *ABC* 和 *DEF* 是两个三角形，边 *AB*、*AC* 分别与边 *DE*、*DF* 相等。即 *AB* 等于 *DE*，*AC* 等于 *DF*。且底边 *BC* 等于底边 *EF*。可证角 *BAC* 等于角 *EDF*。

如果将三角形 *ABC* 移至三角形 *DEF* 上，让点 *B* 落在点 *E* 上，线段 *BC*

放在 EF 上，那么，因为 BC 等于 EF，所以点 C 与点 F 重合。因为 BC 和 EF 重合，所以 BA、CA 分别和 ED、DF 重合。假设 BC 和 EF 重合，AB、AC 不与 ED、DF 重合，而是落在旁边的 EG、GF 处（如图所示），那么过线段（EF）两端点引出的两条线段（DE、DF）交于一点，从该线段（EF）的两个端点的同侧作出相交于另一点（G）的两条线段（GE、GF），分别等于前两条线段（DE、DF）。而这样的两条线段是不存在的【命题 1.7】。所以当底边 BC 与 EF 重合时，边 BA、AC 分别与 ED、DF 重合。所以角 BAC 与角 EDF 重合，即角 BAC 与角 EDF 彼此相等【公理 4】。

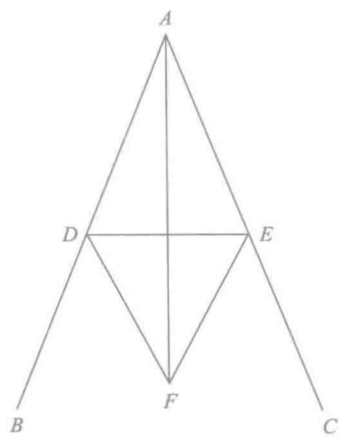
综上，如果两个三角形的两条边彼此分别相等，且底边相等，那么等边所夹的角也相等。这就是命题 8 的结论。

命题 9

二等分一个已知直线角。

已知角 BAC 是一个直线角，作二等分角。

在 AB 上任取一点 D，并在 AC 上作 AE，使 AE 等于 AD【命题 1.3】，连接 DE。以 DE 为边，作等边三角形 DEF【命题 1.1】，连接 AF。可证 AF 二等分角 BAC。



因为 AD 等于 AE，AF 为公共边，（线段）DA、AF 分别等于（线段）EA、AF，且底边 DF 等于 EF。所以角 DAF 等于角 EAF【命题 1.8】

综上，直线角 BAC 被 AF 二等分。这就是命题 9 的结论。

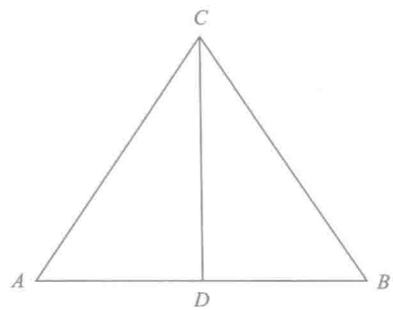
命题 10

二等分已知线段。

已知线段 AB，作二等分线段。

以 AB 为一边，作等边三角形 ABC【命题 1.1】，作直线 CD 二等分角 ACB【命题 1.9】。可证线段 AB 被点 D 二等分，点 D 为等分点。

因为 AC 等于 CB，CD 为公共边，边 AC、CD 分别等于边 BC、CD，且角 ACD 等于角 BCD。所以底边 AD 等于底边 BD【命题 1.4】。



综上，线段 AB 二等分于点 D。这就是命题 10 的结论。

命题 11

由给定的直线上一已知点作一直线和给定的直线成直角。