

普通理工教授写给青少年的有趣科普书

数学的魔法

π

卡夫曼奖得主、美国 Π 学会的经典著作
用趣事、故事讲透生活中隐藏的奇妙数学



生活中无处不在的数学智慧

Mathematical

刘炯朗 著

藏在洗牌魔术、体育赛事、概率事件背后的逻辑
将带你跨越数学的边界，培养受益一生的思维力

数学的 魔法

生活中无处不在的数学智慧



刘炯朗 著

Mathematical Magic



团结出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

数学的魔法: 生活中无处不在的数学智慧 / 刘炯朗
著. -- 北京: 团结出版社, 2017.4
ISBN 978-7-5126-4985-9

I. ①数… II. ①刘… III. ①数学-青少年读物
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 041256 号

中文简体版通过成都天鸢文化传播有限公司代理, 经由时报文化出版公司独家授权,
限在中国大陆地区发行。非经书面同意, 不得以任何形式任意复制、转载。

著作权合同登记号: 图字: 01-2017-0329

出 版: 团结出版社

(北京市东城区东皇城根南街 84 号 邮编: 100006)

电 话: (010) 65228880 65244790

网 址: www.tjpress.com

E-mail: 65244790@163.com

经 销: 全国新华书店

印 刷: 三河市兴达印务有限公司

开 本: 900×1270 1/32

印 张: 8

字 数: 169 千字

版 次: 2017 年 4 月 第 1 版

印 次: 2017 年 4 月 第 1 次印刷

书 号: 978-7-5126-4985-9

定 价: 32.80 元

(版权所有, 盗版必究)

前言：宝藏无限大，一切“从零讲起”

从2005年秋天起，我在新竹IC之音广播电台（FM97.5）主持一个独白式谈话节目《我爱谈天你爱笑》，其内容由时报出版公司整理出书，本书是这个系列的第9本。

关于节目内容的选择，我的的确确常常天马行空、随心所欲地找一些自己有兴趣的题目，尽量对之加以学习、探索和思考，并且以达到“敢站在学生面前大声讲”的理解程度为目标。

对于我的第9本书，可能有人会说：“这本书讲了很多数学，看起来似乎比较难懂。”我的“遁词”和我其他的书一样：我讲的都是有趣的故事，天文、物理、经济、法律、诗词、流行歌曲，一律兼收并蓄、细大不捐。

其实，数学里有许多观念都是靠直觉的，尤其在广播节目里，没有黑板，没有投影片，所以我也以“光听就能懂”为原则，书中的方程式和图片都是后来加上去的，为了让读者可以挖到最大的宝藏，我一切“从零讲起”，更清

楚地解释书中论述所及的内容。

无论节目或书的内容，都没有特定对象，不过我都尝试从“零”讲起，不预设任何门槛或背景。相信这些内容，从刚刚参加初中会考的“毛头小子”到“老妪老翁”都能够解读。

我曾经用一个譬喻来阐述教育的三个“面向”（容我强调是“面向”，不是“层次”）。

有一个宝藏，里面有许多美丽、珍贵的珠宝，老师牵着学生的手一步步向宝藏走去，这就是“灌输”（instruction）；老师也可以给学生一张地图，让他按着地图往宝藏走去，这就是“引导”（introduction）；又或者老师也可为学生描述这些珠宝如何美丽、珍贵，让学生自己去找方向，以自助旅行的方式，走到宝藏的所在，这就是“激发”（inspiration）。

我衷心希望这本书能“激发”出读者对数学里、数学外一些事物的兴趣。

日常生活中隐藏的数学

“茶壶原理”：用已知推算未知 002

01 从数学家的思维出发 02 用数列轻松倒推薪水、存款或预算数 03 从绵延不绝的兔宝宝到斐波那契数列 04 按高矮排列 05 谁是海盗船上的幸运儿？ 06 文学中的茶壶原理：顶真格

Sperner定理：最公平的分配法 016

01 从切蛋糕到世界和平 02 公平千百种，你选哪一种？ 03 满足的公平 04 没有妒忌的公平 05 各得其所的公平 06 Sperner定理 07 蛋糕切三段，首选各不同？

数字知道答案：预测群蝉乱舞的年份034

01 羽化登仙，遗世独立 02 冰河时期的气温巨变 03 被打乱的生命周期 04 在特定年份相撞的“质数蝉”

“寻找千里马”的量化法则 043

01 慧眼识“书豪” 02 从黄金比例挑俊男美女 03 美国运动员潜力的数据分析 04 寻找明日之星：打击手篇 05 寻找明日之星：投手篇 06 量化指标与MVP

《魔球》的启示：打破惯性，缔造传奇063

01 载浮载沉的球员比恩 02 总经理的新思维 03 来自计算机极客的分析 04 用统计数据缔造20连胜 延展阅读：数学与科技时代的压缩逻辑

魔术中的数学逻辑

魔术和数学

086

- 01 条条道路通罗马：克鲁斯卡算法 02 五子登科 03 狄布恩序列的另三种魔术 04 “三娘教子”与汉蒙洗牌 05 “模二值”与三套纸牌魔术

排列的秘密

113

- 01 皇家同花顺 02 五中取一

梅花间竹式洗牌法

118

- 01 吉尔布雷斯原则 02 诚实和谎言 03 五神 04 第47页

蒙日洗牌

129

- 01 同性相吸 02 Ace在哪里 03 庆祝妇女节 延伸阅读：股票红利魔术

识破博弈背后的数学规律

概率是什么？

138

主观的概率和客观的概率

从赔率算出的必胜赌盘

142

01 稳赚不赔的运动博彩下注法 02 赌马的数学必胜方程式 03 马场为何能稳赢不赔？

独立事件的概率

148

01 如何预测同事的服装搭配？ 02 算算飞机上有炸弹的概率 03 为什么赌客爱玩掷骰子游戏？ 04 预测黑白扑克牌的另一面 05 老二是男孩的概率有多大？ 06 何先生的三门猜奖习题

贝叶斯定律和事件先后的概率

160

01 互有影响的裤子衬衫搭配概率 02 用贝叶斯定律算林书豪被交易的概率 03 罹患乳癌的概率怎么算？ 04 看医生划不划算？ 05 电子邮件过滤器

看穿赌博的胜败规律

174

01 为什么赌客一定会破产？ 02 赌客的加码策略 03 靠算牌打败赌场 04 如何独得乐透彩？ 05 预测轮盘的赢钱数

练好数学基本功

数字之美：从零到无穷大 190

01 正整数与自然数 02 负整数 03 整数 04 有理数与无理数 05 代数数与超越数 06 实数和虚数 07 复数 08 规矩数 09 无穷大

丢番图方程式与邮票面额的配对 212

01 丢番图方程 02 弗罗贝尼乌斯数字 03 一个有趣的例子：水手分椰子 04 一个古老的例子：阿基米德的牛

勾股定理 222

01 毕氏三元组 02 费马无穷递降法 03 勾股定理的几何的观点 04 再谈无理数

费马最后的定理 231

01 丢失的费马奇妙证明 02 来自女数学家杰曼的启示 03 谷山丰、志村五郎的关键性猜想
04 时隔350年怀尔斯终于证明了费马定理

7

日常生活中隐藏的数学

P A R T

从绵延不绝的兔宝宝到斐波那契数列

谁是海盗船上的幸运儿

美国运动员潜力的数据分析

“茶壶原理”：用已知推算未知

在数学里，有个有用且常用的解题法——“茶壶原理”（Tea Kettle Principle），这和清末民初国学大师辜鸿铭先生的“茶壶理论”无任何关联。

话说有一位工程师和一位数学家，同时被要求解答下列问题。

问题A：在厨房地板上，有一个空的茶壶，请提供一个方法，煮一壶开水来泡茶。

工程师回答：把茶壶提起来，打开水龙头装满水，将茶壶放在炉子上，点燃炉火，静待水被烧开；数学家说：我的方法也一样。

接着，他们被要求解答下列问题：

问题B：炉子上放着一个茶壶，里面装满水，请提供一个方法，煮一壶开水来泡茶。

工程师回答说：点燃炉火，静待水被烧开；数学家说：把茶壶从炉子上提起来，把茶壶里的水倒光，再把空的茶壶放在厨房地板上，于是，问题B就化成已经知道怎样解答的问题A了。

这虽然是一个笑话，但是把待解答的问题化成已经解答的问题，却是在数学、科学里，甚至在生活里，有用而且常用的方法。

这就是“茶壶原理”。

01 从数学家的思维出发

让我再多说一点，和上述笑话类似的例子还有很多。

比如，林先生有一位从香港来的朋友，打电话问林先生怎样从台北火车站到101大楼。林先生详细地一步一步为他说明如何坐捷运、转公交车、再走路；果然一切顺利。第二天，香港朋友又打电话问他如何从东区诚品到101大楼。

林先生说您就坐出租车从东区诚品到台北火车站，在台北火车站再按照我昨天告诉您那条路线走就对了。

这就是把一道待解答的问题，化成一道已经知道如何解答的问题。关于个中奥妙，我就不再多费唇舌了，这就是“茶壶原理”。

有人问老先生：“您今年贵庚？”老先生说：“我40岁时，我的小儿子出生。”那人继续问：“那么您小儿子今年几岁？”老先生答：“他比邻居的张博士小5岁。”“那么张博士今年几岁了？”老先生答：“张先生属狗，刚从美国拿了博士学位回来。”

假设今年是2012年，属狗的是78、66、54、42、30、18或者6岁，所以，张博士应该是30岁，老先生的小儿子是25岁，老先生是 $25 + 40 = 65$ 岁。

在这个问题当中，我们先把老先生是几岁的问题，化成他小儿子是几岁的问题，再把他小儿子是几岁的问题，化成张博士是几岁的问题。当我们找出张博士是几岁，就可以解答小儿子是几岁，然后就可解答老先生是几岁了。

上述例子指出应用“茶壶原理”的两个要点：第一，我们先把一道待解答的问题，化成另一道待解答的问题；第二，最终我们要把一道待解答的问题，化成另一道已经知道如何解答的问题。

这两个要点也可以用两句成语来描述：第一，前事不

忘，后事之师；第二，饮水思源。可不是贴切得当吗？

让我再讲一个故事。有位美国数学家想在中文期刊发表一篇他用英文写的论文，因此，他请好友高教授帮忙将论文翻成中文。高教授把论文翻译完成后，这位美国数学家觉得应该在论文里加一个脚注：作者要感谢高教授的帮忙——把这篇论文翻译成中文。但是，他又不懂得怎样用中文写这个脚注，只好先用英文把脚注写好，再请高教授翻成中文。高教授把脚注翻成中文后，这位非常严谨的数学家觉得应该再加一个脚注：感谢高教授帮忙将脚注翻成中文。但他还是只能用英文把这个脚注写下来，拿去请高教授翻译成了中文。这么一来，问题来了，他还是必须再度感谢高教授帮忙翻译这个脚注吗？这岂不是没完没了吗？

对一个通晓“茶壶原理”的数学家来说，小事一桩，他会先请高教授翻译“作者要感谢高教授的帮忙，把这篇论文翻译成中文”这句话。再请高教授翻译“作者要感谢高教授的帮忙，把前面的脚注翻成中文”这句话。最后，自己把这句话的中文翻译“作者要感谢高教授的帮忙，把前面的脚注翻成中文”抄一次，就可以把他要表达感谢之意全部说清楚了。

02 用数列轻松倒推薪水、存款或预算数

故事讲完了，让我讲一点数学。有一连串数字， a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 …… a_{n-1} 、 a_n ……，假设每一个数字都等于它前面那个数字加3，也就是 $a_n = a_{n-1} + 3$ 。换句话说，如果我们要决定第 n 个数字是多少，我们只要知道第 $n-1$ 个数字是多少，就可以把第 n 个数字算出来了。这不正是“茶壶原理”的应用吗？

那么接下去，第 $n-1$ 个数字是多少呢？我们只要知道第 $n-2$ 个数字是多少就可以了，这又是“茶壶原理”的应用。

一路倒推下去，第二个数字是多少呢？是第一个数字加3，因此，只要知道第一个数字 a_1 ，如果 $a_1 = 19$ ，那么就可以知道 $a_2 = 19 + 3$ ，以此类推 a_3 、 a_4 …… a_{n-1} ，最后可得出： $a_n = a_{n-1} + 3$ 。

举例来说，一个员工的薪水，每个月加500元，您想知道他9月的薪水吗？只要看8月的薪水单加500元就行，如果您要知道8月的薪水，那只要看7月的薪水单加500元就行。这样倒推下去，只要有某一个月的薪水单，一切问题就都解决了。这就是“等差级数”，或者叫做“算术级数”，就是在以前我们学过的一连串数字 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 …… a_{n-1} 、 a_n 后面加上 d ：

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d \cdots a_n = a_{n-1} + d。$$

那时，我们一步一步往前推，现在我们学会了“茶壶原理”，就可一步一步往后推， $a_n = a_{n-1} + d$ ， $a_{n-1} = a_{n-2} + d \cdots \cdots a_2 = a_1 + d$ ，往前推、往后推都是同一回事，如果您懒得往前推、往后推，简化成一个公式就是：

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

让我趁这个机会也提一下大家也都学过的：有一连串数字 $a_1, a_2 \cdots \cdots a_{n-1}, a_n$ ，另外 r 是一个常数， $a_n = r \times a_{n-1}$ ， $a_{n-1} = r \times a_{n-2} \cdots \cdots a_2 = r \times a_1$ 。要算出 a_n ，可以一步一步往后推到 a_1 ，这我们在中学也学过，叫做“等比级数”或者“几何级数”，那时是一步一步往前推， $a_2 = r \times a_1$ ， $a_3 = r \times a_2 \cdots \cdots a_n = r \times a_{n-1}$ ，往后推、往前推都是同样一回事，简化成一个公式就是：

$$a_n = r^{n-1} \times a_1$$

大家还记得如何用复利计算银行的存款吗？

如果利率是每月 3%，那么第 12 个月的存款总数是 1.03 乘第 11 个月的存款总数，也就是 $a_{12} = 1.03 \times a_{11}$ ，接下来， $a_{11} = 1.03 \times a_{10}$ ， $a_{10} = 1.03 \times a_9$ ，这正是依照“茶壶原理”来算。当然直接来算也可以：

$$a_{12} = 1.03^{11} \times a_1$$

有一个政府机关编预算，每年的预算是去年预算的 65% 加上前年预算的 45%，所以，我们可以用 $a_n =$

$0.65 \times a_{n-1} + 0.45 \times a_{n-2}$ 这么一个公式来表达。换句话说，如果我们要知道今年的预算是多少，只要知道去年的预算和前年的预算，就可以算出今年的预算。那么去年的预算是多少呢？只要知道前年和大前年的预算就可以算出来。这正是“茶壶原理”的推广，把一道要解答的问题，化成两道已经知道如何解答的问题，这样倒推回去，我们只要知道最开始第一年和第二年的预算，接下来每年的预算就可以一一算出来了。

03 从绵延不绝的兔宝宝到斐波那契数列

让我再举一个例子，讲一道数学上古老有名的题目：一对刚出生的兔子，一个月后就发育成熟，发育成熟的兔子，每个月会生一对兔子，源源不绝。请问 n 个月有多少对兔子？

让我们从头开始算起：

第1个月，有一对兔子刚出生；

第2个月，这对兔子发育成熟了；

第3个月，上个月发育成熟的兔子，生下一对兔子，因此一共有2对兔子；

第4个月，上个月发育成熟的兔子，生下一对