SHUZI XINHAO
CHULI YUANLI JI YINGYONG

数字信号处理原理及应用

傅华明 主编

CUGP
中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

数字信号处理原理及应用

SHUZI XINHAO CHULI YUANLI JI YINGYONG

傅华明　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

内容简介

本书介绍了数字信号处理的基本原理、基本分析方法，简要介绍了离散时域信号与系统的时域分析和变换域分析方法，重点介绍了离散傅里叶变换及其快速算法、数字滤波器的基本概念、设计和实现方法。还介绍了随机信号的功率谱分析，并给出了数字信号处理在地学工程中几种典型应用的实例。

结合各章的内容，安排了丰富的例题和习题，使本书的结构合理，条理清晰，叙述深入浅出，以便学习和理解。

本书可以作为高等学校电子信息类专业和相近专业本科生的数字信号处理课程教材，也可供相关领域的科技工作者自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理原理及应用/傅华明主编. —武汉：中国地质大学出版社，2016.10

ISBN 978-7-5625-3906-3

Ⅰ.①数…

Ⅱ.①傅…

Ⅲ.①数字信号处理

Ⅳ.①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 253821 号

数字信号处理原理及应用 傅华明 **主编**

责任编辑：阎　娟　　责任校对：代　莹

出版发行：中国地质大学出版社有限责任公司（武汉市洪山区鲁磨路 388 号）　邮政编码：430074

电　　话：(027)67883511　　传真：67883580　　E-mail:cbb @ cug.edu.cn

经　　销：全国新华书店　　http://www.cugp.cug.edu.cn

开本：787 毫米×1092 毫米 1/16　　字数：327 千字　　印张：12.75

版次：2016 年 10 月第 1 版　　印次：2016 年 10 月第 1 次印刷

印刷：荆州市鸿盛印务有限公司　　印数：1—1000 册

ISBN 978-7-5625-3906-3　　定价：28.00 元

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

前　言

本书是在中国地质大学(武汉)机电学院和自动化学院开设的数字信号处理课程的基础上,总结作者多年在电子工程、通信工程、自动化和测控专业的课程教学实践经验编写而成。

数字信号处理是一门专业基础课,可作为电子信息类专业的必修课教材和相近专业本科生选修课教材。编写的目的是使学生能够掌握离散时间信号与系统的基础理论、基本分析方法以及 FFT 和数字滤波器等数字信号处理技术。本书选材注意精选内容、物理概念阐述清楚,叙述问题深入浅出,初学者易接受、易自学。

本书的先修课程是信号与系统、概率论与数理统计。全书共分 9 章:第 1 章绪论,第 2 章离散时间信号与系统的时域分析,第 3 章离散时间信号与系统的变换域分析,第 4 章离散傅里叶变换及其快速算法,第 5 章数字滤波器的基本结构,第 6 章无限长冲激响应数字滤波器设计,第 7 章有限长冲激响应数字滤波器设计,第 8 章数字谱分析,第 9 章数字信号处理在地学工程中的应用。

数字信号处理是一门理论与实践联系紧密的课程,为了帮助读者学习好这门课程,本书每章都附有大量的习题。本书教学时数为 56 学时,如果教学计划学时不够,可以省略第 8 章,把第 9 章作为阅读内容。

全书由傅华明主编,吴国平编写第 2 章和第 3 章,王青玲编写第 4 章,王晓丽编写第 5 章、第 6 章和第 7 章,傅华明编写第 1 章、第 8 章和第 9 章。研究生杨婷、胡航、望超、李俏亚以及本校 071141 班部分本科生同学协助完成文档编辑等相关工作。在本书编写过程中,湖南大学易波老师给予了关心和指导,中国地质大学(武汉)王典洪老师提供了许多宝贵的意见和建议,中国地质大学(武汉)机电学院和自动化学院的相关领导给予了大力支持,在此表示衷心的感谢!在本书的编写过程中,参阅了许多相关书籍和文献,这里向这些作者表示感谢!

由于作者水平有限,并且编写时间仓促,错误与不妥之处在所难免,衷心希望读者给予批评指正,不胜感谢!

傅华明

2016 年 6 月 26 日　武昌南望山

目　录

第 1 章　绪　论 …… (1)

1.1　信息、信号和系统 …… (1)

1.2　信号处理 …… (2)

1.3　数字信号处理 …… (4)

第 2 章　离散时间信号与系统的时域分析 …… (6)

2.1　离散时间信号-序列 …… (6)

2.2　常用序列及基本运算 …… (8)

2.3　离散时间系统 …… (12)

2.4　离散时间系统的时域响应 …… (16)

第 3 章　离散时间信号与系统的变换域分析 …… (19)

3.1　离散时间序列的傅里叶变换 …… (19)

3.2　离散信号的 z 变换分析 …… (21)

3.3　z 变换与拉普拉斯变换的关系 …… (31)

3.4　离散系统响应的 z 域分析 …… (35)

3.5　离散系统的频率响应 …… (36)

第 4 章　离散傅里叶变换及其快速算法 …… (44)

4.1　离散傅里叶级数及性质 …… (44)

4.2　离散傅里叶变换 …… (50)

4.3　离散傅里叶变换的特性 …… (52)

4.4　频率域采样 …… (56)

4.5　离散傅里叶变换的应用 …… (58)

4.6　快速傅里叶变换 …… (61)

4.7　利用 FFT 进行信号的频谱分析 …… (73)

第 5 章　数字滤波器的基本结构 …………………………………………………… (82)

5.1　概述………………………………………………………………………………… (82)

5.2　IIR 数字滤波器的基本结构 ……………………………………………………… (83)

5.3　FIR 数字滤波器的基本结构……………………………………………………… (88)

5.4　最小相位网络和全通网络………………………………………………………… (92)

第 6 章　无限长冲激响应数字滤波器设计 ……………………………………………… (96)

6.1　数字滤波器设计概述……………………………………………………………… (96)

6.2　IIR 数字滤波器设计的一般方法及原型 ………………………………………… (98)

6.3　冲激响应不变法 ………………………………………………………………… (108)

6.4　双线性变换 ……………………………………………………………………… (111)

6.5　数字高通、带通及带阻滤波器的设计…………………………………………… (115)

第 7 章　有限长冲激响应数字滤波器设计………………………………………………… (121)

7.1　FIR 数字滤波器的基本概念 …………………………………………………… (121)

7.2　窗函数法设计 FIR 滤波器 ……………………………………………………… (128)

7.3　频率采样法 ……………………………………………………………………… (137)

7.4　FIR 数字滤波器与 IIR 数字滤波器的比较 …………………………………… (141)

第 8 章　数字谱分析……………………………………………………………………… (143)

8.1　随机信号的数学描述 …………………………………………………………… (143)

8.2　功率谱估计 ……………………………………………………………………… (148)

8.3　功率谱估计的自相关函数法 …………………………………………………… (150)

8.4　谱估计的周期图法 ……………………………………………………………… (153)

8.5　离散随机信号通过线性时不变系统 …………………………………………… (161)

第 9 章　数字信号处理在地学工程中的应用…………………………………………… (167)

9.1　广义 s 变换在探地雷达层位识别中的应用 …………………………………… (167)

9.2　自动钻进系统的钻具振动去噪技术 …………………………………………… (172)

9.3　随钻测量泥浆信号的噪声处理 ………………………………………………… (177)

主要参考文献……………………………………………………………………………… (186)

部分参考答案……………………………………………………………………………… (188)

第1章 绪 论

数字信号处理是利用数字计算机或专用数字处理设备,采用数字计算的方法,对信号进行处理的一门学科,它包含对信号的分析、变换、滤波、综合、增强、压缩、估计与识别等工作内容。随着计算机和信息科学的发展,数字信号处理已经形成一门非常重要的独立学科体系。

目前,数字信号处理在医学工程、农业工程、地矿工程、机械工程、动力工程、自动化工程、建筑工程、水利工程、环境工程、交通运输工程以及天体探测和天气预报等方面有着越来越广泛的应用,对许多学科的发展起到了重大的推动作用。可以预言,数字信号处理还将拓展更多新的应用领域。

1.1 信息、信号和系统

1.1.1 信息

在人们的社会生活中,彼此之间时刻传递着各类消息。如果某个消息传递到某一接受者,而这个接受者此前已从其他途径得知这个消息,那么,这个消息就只是一个已知消息,没有包含新鲜的内容;如果接受者事前没有得到这个消息而此时得到这个消息,他就获得了一些新鲜内容,此时这个消息就是信息。

同样一个消息,对于第一个接受者可能仅仅是一个消息,他可能事前知道;对于第二个接受者可能是信息,此前他对此一无所知;对于第三个接受者可能是极为重要的信息,因为这一信息对于他极为有用。对于不同的人群,同一消息中所包含的信息量是不一样的。

信息是需要交流的,交流需要以一定的形式表现出来,而这些信息的表现要借助于信号,信号可以有多种物理形式,可以是电信号、磁信号、光信号、声信号,也可以是符号、文字、图像、表情、手势等。

信号是信息的表现形式,信息是信号的表现内容。在众多的信号类型中,电磁光信号的检测传输和变换等相对方便一些,因此,在实际工程中,这类信号的实际应用相对多一些,但本书只讨论电信号的处理问题。

1.1.2 信号

信号通常定义为携带信息的函数,其自变量可以是时间,可以是空间坐标,也可以是其他物理量。如果信号只有一个自变量,则称为一维信号;如果信号有多个自变量,则称为多维信号。语音信号是一维信号,静止图像信号是二维信号,电视信号可以看作是一个二维信号的时间序列。本书只讨论一维信号的处理问题。

关于信号的分类,除了一维信号和多维信号以外,还有确定信号与随机信号,周期信号和

非周期信号,功率信号和能量信号等分类方式。

在实际工程中,通常可以根据信号的自变量取值和幅度取值是连续或是离散,将信号分为4种类型。

如果信号的自变量时间取值是连续的,而幅度取值可以是连续或者离散,则这种信号称为连续时间信号(以下简称连续信号);如果信号的自变量时间和幅度取值都是连续的,则这种信号称为模拟信号;如果信号的自变量时间取值是离散的,而幅度取值可以是连续或者离散,则这种信号称为离散时间信号(以下简称离散信号);信号的自变量时间取值和幅度取值都是离散的,则这种信号称为数字信号。为了讨论问题的方便,本书将连续信号记为 $x(t)$,将离散信号记为 $x(n)$。

离散信号的一些理论和处理方法同样适用于数字信号。因此,本书只讨论一维离散信号的分析和处理等相关内容。

1.1.3 系统

在实际工程中,将具有实现信号处理功能的集合体称为信号处理系统。这类系统可以是简单的硬件装置,也可以是软件组合,但这里讨论的系统应该是具有一定规模的、硬件软件相结合的物理装置,它是实现各类信号处理的必备平台。

根据处理信号的种类不同,系统可以分为4种类型:如果系统的输入和输出均为连续信号,则该系统为连续时间系统(以下简称连续系统);如果系统的输入和输出均为离散信号,则该系统为离散时间系统(以下简称离散系统);如果系统的输入和输出均为模拟信号,则该系统为模拟系统;如果系统的输入和输出均为数字信号,则该系统为数字系统。

一般来说,系统实现信号传输、信号处理和信号存储等基本功能,信号与系统之间有着紧密的联系,离开了信号,系统将失去意义。在实际工程中,系统有两个方面的任务:一是系统设计,即根据已知信号形式、传输与处理的要求,设计系统的结构和参数,使系统满足信号传输和处理要求;二是系统分析,即分析一个给定的系统,它具有怎样的时域特性和频域特性,当一个信号通过该系统时,这个系统对通过的信号具有怎样的处理加工能力。

在研究系统问题时,通常需要注意几个问题:一是系统的因果性和非因果性,这涉及到系统能否实现的问题;二是系统的线性和时不变性,这涉及到系统计算处理的复杂性问题;三是系统的稳定性,这涉及到系统能否工作的问题。

一个系统可以是线性也可以是非线性的,可以是时(移)不变也可以是时(移)变的,如果一个系统同时具有线性和时(移)不变特性,则这类系统称为线性时(移)不变系统。本书只讨论线性时(移)不变离散系统。

1.2 信号处理

1.2.1 信号处理的概念

在实际工程中,人们通过各种方法所获得的信号都是能够反映出各种物理系统的工作状态。由于周边条件的影响和获得信号手段方面的局限,使得信号中除了包含反映物理系统工作状态的有用信息以外,同时也包含各类干扰和噪声。因此,除去干扰和噪声影响,提取有用

信息，就需要采用一定的方法对信号进行相关的加工处理，这就是信号处理的基本工作内容。

信号处理是根据一定的理论，构造出一定的硬件软件系统，对含有信息的信号进行加工，从而获得人们希望的信号，达到提取信息并加以利用，或者是对信号进行必要的变换，使之便于信号识别、信号传输或者信号存储。

1.2.2 模拟信号处理与数字信号处理

在信号处理的发展过程中，信号处理经历了模拟处理方式和数字处理方式两个阶段。在早期的信号处理工作中，多数采用模拟处理。自然界和实际工程中多数信号是模拟信号，信号处理的任务相对单一，利用早期的模拟器件可以实现信号的放大、变换和滤波等处理，满足当时模拟信号的传输和处理的需要。

随着社会的进步，通信及相关领域技术的提升，微电子技术以及信号处理的研究成果的不断进步，现在的信号处理多采用数字方式。

在自然界和实际工程中，常见的信号多为模拟信号[记为 $x_a(t)$]。为了对模拟信号进行数字处理，首先利用 A/D 转换器将模拟信号转换成数字信号[记为 $x(n)$]，得到处理后的数字信号[记为 $y(n)$]用 D/A 转换器将处理结果还原成模拟信号[记为 $y_a(t)$]。实现模拟信号数字处理的一般过程如图 1.2－1 所示。

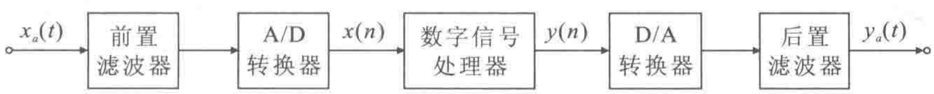


图 1.2－1 模拟信号数字处理简单框图

在上述过程中，前置滤波器的主要作用是防止由于取样可能带来的频率混叠失真，工程上通常将这种滤波器称为反混叠滤波器；后置滤波器的主要作用是平滑 D/A 转换器输出信号的阶梯效果，因此又称为平滑滤波器。

A/D 转换器一般包括对模拟信号的采样、量化及转换。其中，采样速率应当满足采样定理的条件，即满足不失真重建信号的需要。量化限幅电平通常必须与输入信号的动态范围相适应，量化字长应该满足离散振幅的精度或分辨率的要求。D/A 转换器的选择要考虑与数字信号处理器的位数、与 A/D 转换器的采样速率因素相适应。

数字信号处理器是整个系统的核心部分，它可以是一台通用计算机，也可以是由数字信号处理器芯片和相关外围电路组成的数字信号处理的专用平台，在软件的作用下，对输入的数字信号 $x(n)$ 按照预定要求进行处理加工得到输出数字信号 $y(n)$。

在信号处理的具体实现中，也有一些信号处理的特例情况，并不需要上述信号处理框图中的所有单元。有的处理结果只需数字输出，可以打印、显示或存储，则不需要后面的 D/A 转换器和平滑滤波器；有的输入就是数字信号，就不需要前置滤波器和 A/D 转换单元；如果仅进行纯数字信号的处理，就不需要前后两个变换过程，此时这个系统是一个软件系统。

对比传统的信号模拟处理方法，信号的数字处理具有精度高、灵活性高、可靠性强、便于大规模集成与时分复用、可以获得高性能指标好和可以实施二维与多维信号处理等特点，因此，信号的数字处理将是今后信号处理的主流形式。

1.3 数字信号处理

1.3.1 数字信号处理的实现方法

在目前的实际工程中,数字信号处理的实现方法可以分为 3 种。

(1)软件实现法:在通用计算机上,通过软件编程对数字信号进行处理。由于目前一般通用计算机具有较高的性价比,在数字信号非实时处理方面,软件实现法应用得越来越多。

(2)硬件实现法:选用基本的数字硬件组成专用的处理机,可以实现对信号进行实时处理,但由于专用的处理机或芯片的内部结构固定,只能完成某一具体的加工处理,而不能完成其他类的加工处理,因此,这种方法虽具有较高的速率,但灵活性不够,只能用在某些专门的信号处理设备中。

(3)用通用的数字信号处理器芯片实现法:目前,世界上有许多芯片制造商研发各种类型数字信号处理的通用芯片,如美国的 TI 公司研发的 TMS320 系列芯片,这些芯片具有高速硬件乘法器和流水线等硬件结构,又配有强大的信号处理指令集,利用这类芯片构造出的数字信号处理平台,既具有硬件实现的实时性,又具有软件实现的灵活性,是今后数字信号处理系统实现的一种重要的选择方法。

1.3.2 数字信号处理的基本内容

数字信号处理实际上包含以下几个方面的基本内容。

(1)利用前置单元的反混叠滤波,滤除输入信号中的无用频率成分和噪声,避免采样后发生频率混叠;利用后置单元的平滑滤波,平滑 D/A 转换器输出信号的阶梯效果,实现处理后模拟信号的生成。

(2)根据采样定理,选择合适的 A/D 和 D/A 转换芯片,实现模拟信号的时域采样与恢复,使量化误差最小,且输出信号的杂波分量最低。

(3)进行离散信号与系统的时域分析、频域分析和 z 域分析,这里包括离散信号的时域表示与运算,离散信号的傅里叶变换、离散傅里叶变换和 z 变换,以及离散系统的时域、频域和 z 域的基本描述和响应分析。

(4)研究数字信号处理中的快速算法等。

(5)研究数字滤波器的分析、设计和实现。

1.3.3 数字信号处理的工程应用

数字信号处理的技术应用非常广泛,在工农业生产、国防、科学技术、人类生活等方面有着众多的应用成果。

在工业方面,通过采集生产过程中的各类信号,抑制其中的干扰和噪声,提取有用信息,根据既定的算法,实现信号处理,其输出信号可以用于生产过程的闭环控制,提高工业生产的现代化水平;通过振动信息的检测和处理实现机械系统的故障诊断;利用各类先进的传感器完成电力系统输电线的在线检测,实现能源分配和调度;工业探伤设备,汽车电子设备等都包含了信息处理的相关成果。在农业方面,通过各类传感器,采集土壤土质、温度湿度和其他相关信

息,实现农作物的生长期预测,实现数字化灌溉、指导抗旱抗涝等。

在国防和科学技术方面,雷达、声呐、导航、全球定位、航天航空测试、高性能武器,以及电子对抗、战场侦察、保密通信、卫星遥感、红外成像等技术中,无不包含现代信号处理的研究成果。

在环境工程方面,利用各类传感器,采集土壤信息、监测地下水、大气和工业排污、指导废水处理、土质改善和环境治理;在交通工程方面,利用传感器,采集交通信息、监测交通流量、报告城市的现实路况,实现现代化城市的智能交通管理;在地矿工程方面,野外地貌的三维成像设备、地质工程中的探地雷达、井下矿工的数字化头盔以及救灾现场的生命探测装置等都是信息处理技术成果的体现。

在医学方面,通过对患者的心电信号、脑电信号以及肌电信号的采集和处理,提取信号的数字特征,用以诊断病情。如CT断层扫描和核磁共振专用设备就是数字信号处理在医学方面的标志性成果。

在人类生活方面,高清晰度电视、数码照相机、数码摄像机、数字音频视频、音乐合成、电子玩具和游戏丰富了人们的休闲生活;多功能智能手机改善和丰富了人们的通信方式;智能穿戴设备提高了个人健康状态的自我检测;智能居家系统提高了人们居住的智能化水平。

简而言之,在各个工程领域,都能看到数字信号处理技术的应用,都会从数字信号处理研究成果中得到相应的技术支持。可以预言,随着信息时代和数字世界的不断发展与进步,数字信号处理的应用会越来越广泛,数字信号处理是一门极具生命力的发展学科。

第 2 章　离散时间信号与系统的时域分析

离散时间信号与系统的基本知识是学习数字信号处理的重要基础。在实际的应用中，许多离散信号或数字信号来自于对连续信号的采样，因而离散时间信号与系统的分析方法和连续时间信号及系统的分析方法均有相似之处。在学习离散时间信号与系统的时域分析方法时，应同连续时间信号与系统的时域分析方法联系起来，比较其异同，只有这样，才能更好地掌握离散信号与系统的某些独特性能。

本章是全书的理论基础，主要学习离散时间信号与系统的时域分析方法。

2.1　离散时间信号-序列

2.1.1　离散时间信号的定义

离散时间信号（以下简称离散信号）又称序列，用 $x(nT)$ 表示，它是离散时间系统的处理对象。序列是一个数组，定义在离散的时间点 nT（n 为任意整数，T 为采样间隔）上。这里设 $T=1$，序列 $x(n)$ 可以表示为

$$x=\{x(n)\}\quad -\infty<n<+\infty \tag{2.1-1}$$

离散信号 $x(n)$ 可以是自然产生的，也可以是连续信号的抽样。离散信号的时间函数只在某些不连续的时间值上给定函数值。$x(nT)$ 一般写作 $x(n)$，这样做不仅仅是为了书写方便，而且可以使分析方法具有更普遍的意义，可以同时表示不同取样间隔下的信号，而且离散变量可不限于时间变量。图 2.1-1 表示一个有限长序列 $x(n)$ 的表示形式。

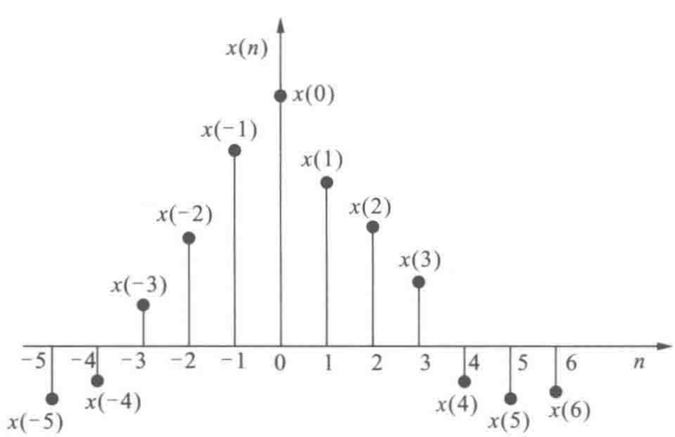


图 2.1-1　有限长序列的一般表示

离散信号 $x(n)$ 可以用数学解析式、图形形式和序列形式等方式描述。如

$$x(n)=\begin{cases} n & 0\leqslant n\leqslant 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

是它的解析式，其图形形式如图 2.1－2 所示。其序列形式为 $x(n)=[\underset{\uparrow}{0},1,2,3,4]$，有“↑”表示起点 $n=0$。若序列任一边有无限大的范围，则用省略号“…”表示。如 $x(n)=n(n>0)$，可写为 $x(n)=[\underset{\uparrow}{0},1,2,3,4,\cdots]$。

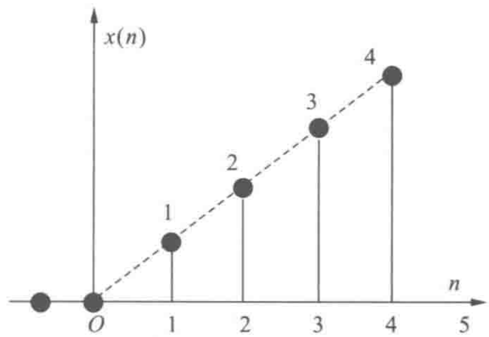
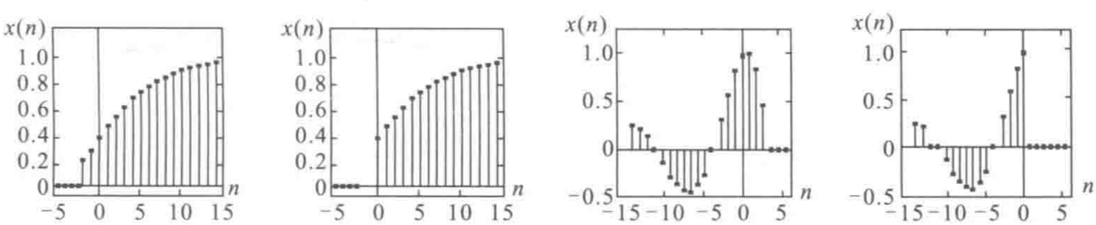


图 2.1－2　离散信号的图形形式

2.1.2　离散信号的分类

当 $n<M$ 时 $x(n)=0$，则离散信号称为右边序列；当 $n>M$ 时 $x(n)=0$，则离散信号称为左边序列；当 $n<0$ 时 $x(n)=0$，则离散信号称为因果序列，因果信号是右边序列的特殊情况；当 $n>0$ 时 $x(n)=0$，则离散信号称为反因果序列，反因果信号是左边序列信号的特殊情况；每隔 N 个采样点重复一次，即有 $x(n)=x(n\pm mN)$，$(m=1,2,3,\cdots)$，N 为一个整数，是周期序列的最小周期。右边序列、因果序列、左边序列、反因果序列和周期序列都是无限长序列，分别如图 2.1－3(a)、(b)、(c)、(d)和图 2.1－4 所示。

$x(n)$ 定义在 $a<n<b$ 之间，其中 a、b 为整数，当 n 为其他值时，$x(n)=0$，这种离散信号称为有限长序列，如图 2.1－5 所示。



(a) 右边序列　(b) 因果序列　(c) 左边序列　(d) 反因果序列

图 2.1－3　右边序列、因果序列、左边序列和反因果序列

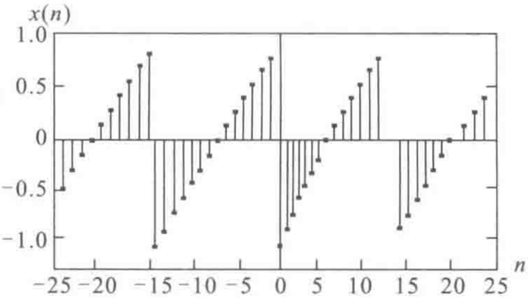


图 2.1－4　周期序列

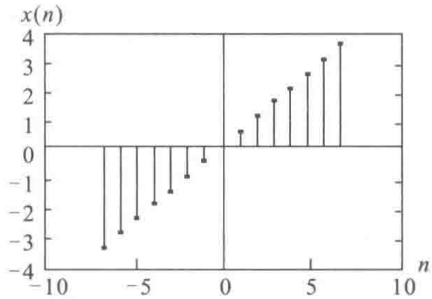


图 2.1－5　有限长序列

2.1.3 离散信号的能量与功率计算

与连续信号类似，离散信号的能量定义为信号电压（或电流）消耗在 1Ω 电阻上的能量 E 为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{2.1-2}$$

离散信号的功率定义为信号电压（或电流）在时间区间$(-\infty, +\infty)$内消耗在 1Ω 电阻上的平均功率 P 为

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \tag{2.1-3}$$

信号总能量为有限值而信号平均功率为零的信号即为能量信号，信号平均功率为有限值而信号总能量为无限大的信号即为功率信号。直观上不难理解，在时间间隔无限趋大的情况下，周期信号都是功率信号；只存在于有限时间内的信号是能量信号；存在于无限时间内的非周期信号可以是能量信号，也可以是功率信号，这要根据具体信号而定。

例题 2.1-1 计算下列离散信号的能量或功率。

(1) $x(n) = 3\,(0.5)^n, n \geqslant 0$

(2) $x(n) = 6\mathrm{e}^{\frac{j2\pi n}{4}}$

解 (1) 该离散信号为衰减的指数信号，其信号能量为

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |3\,(0.5)^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 9\,(0.25)^n \\ &= \frac{9}{1-0.25}\mathrm{J} = 12\mathrm{J} \end{aligned}$$

(2)该离散信号为复指数信号，其信号功率为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} |6\mathrm{e}^{\frac{j2\pi n}{4}}|^2 \\ &= \frac{1}{4}(36+36+36+36)\mathrm{W} = 36\mathrm{W} \end{aligned}$$

2.2 常用序列及基本运算

2.2.1 常见序列的时域描述

2.2.1.1 单位函数

单位函数，也称为单位样值序列，用 $\delta(n)$ 表示，其波形如图 2.2-1(a)所示，定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{2.2-1}$$

由上式可知 $\delta(n)$ 仅在 $n=0$ 处取值为 1，在其余各点均为零。延时的单位冲激序列表示为

$$\delta(n-i) = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases} \tag{2.2-2}$$

其波形如图 2.2-1(b)所示。任意离散信号 $x(n)$ 表示为一系列延时单位函数的加权和，即

$$x(n)=\cdots x(-2)\delta(n+2)+x(1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+$$
$$x(1)\delta(n-1)+x(2)\delta(n-2)\cdots=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)\delta(n-i)$$

整理后，可知

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)\delta(n-i)=x(n) \tag{2.2-3}$$

式(2.2-3)表明，任意离散信号 $x(n)$ 可以分解为无穷多个不同幅值的单位函数之和。

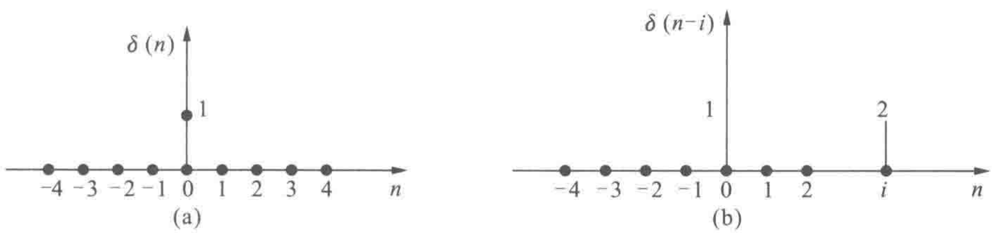


图 2.2-1　$\delta(n)$与$\delta(n-i)$的波形

2.2.1.2　单位阶跃序列

单位阶跃序列 $u(n)$ 定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{2.2-4}$$

其波形如图 2.2-2 所示。类似于连续时间系统中的单位阶跃信号 $u(t)$ 。但应注意 $u(t)$ 在 $t=0$ 点发生跳变，往往不予定义(或定义为 $\frac{1}{2}$)，而 $u(n)$ 在 $n=0$ 点明确规定为 $u(0)=1$。

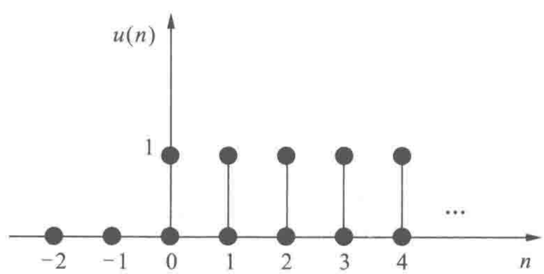


图 2.2-2　$u(n)$的波形

比较 $\delta(n)$ 与 $u(n)$ 的定义式，可得到下面的关系

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{2.2-5}$$

$$u(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}\delta(i)=\sum_{i=0}^{n}\delta(n-i) \tag{2.2-6}$$

2.2.1.3　矩形序列

矩形序列可以定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & n<0 \text{ 或 } n>N\end{cases} \tag{2.2-7}$$

$R_N(n)$ 的波形如图 2.2-3 所示。类似于连续时间系统中的矩形脉冲。如果矩形序列取值为 1 的范围是从 $n=m$ 到 $n=m+N-1$ 。则这种序列应该记为 $R_N(n-m)$。

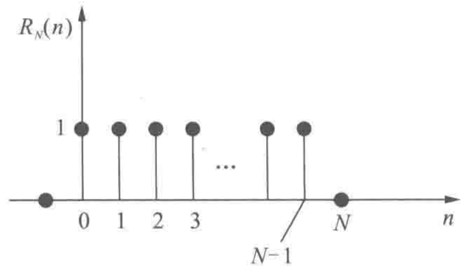


图 2.2-3　矩形序列

2.2.1.4　单边指数序列

单边指数序列的表达式为

$$a^n u(n)=\begin{cases}a^n & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{2.2-8}$$

其波形如图 2.2-4 所示。图 2.2-4(a)和(b)分别画出了 $0<a<1$ 和 $a>1$ 时的单边指数序列的波形。

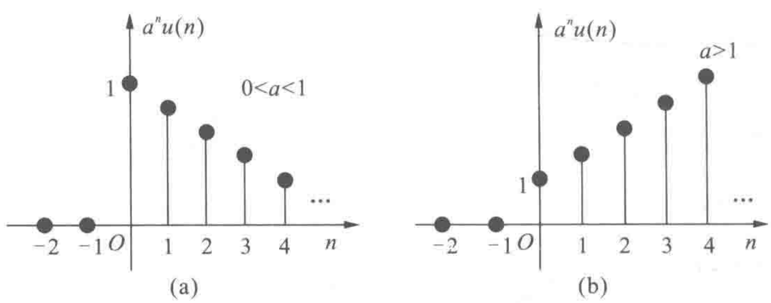


图 2.2-4　单边实指数序列的波形

2.2.1.5　正弦序列

正弦序列包括正弦序列和余弦序列，这里以正弦序列为例。正弦序列定义为

$$x(n)=A\sin(\omega n+\varphi) \tag{2.2-9}$$

波形如图 2.2-5 所示，式中 ω 称为正弦序列的角频率。根据正弦序列的周期性，若

$$x(n+N)=A\sin(\omega(n+N)+\varphi)=A\sin(\omega n+\varphi)=x(n) \tag{2.2-10}$$

成立，正弦序列即为周期序列。此时 $N\omega=2\pi m$（m 为任意整数），即 $N=\frac{2\pi}{\omega}m$ 。易知，当 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为整数或有理数时，均能使 N 为整数，而 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为无理数时，N 无法取得满足式(2.2-9)的整数。从而可得到如下结论：①若 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为整数，则正弦序列为周期序列，其最小周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$；②若 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为有理数，则正弦序列仍为周期序列，其周期是使 $\frac{2\pi}{\omega}m$ 为最小正整数的值；③若 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为无理数，此时正弦序列不是周期序列。

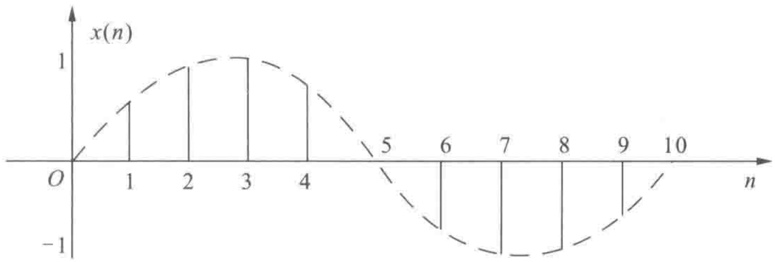


图 2.2-5　正弦序列 $\sin(\frac{\pi}{5}n)$

2.2.1.6　复指数序列

复指数序列可以表示为

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n) \tag{2.2-11}$$

类似于正弦序列，复指数序列若是一个周期序列，则$\frac{2\pi}{\omega}$应为整数或有理数，否则不是周期序列。

例题 2.2-1　判断下列离散信号是否为周期信号，如果是，确定其周期。

(1) $x(n) = A\sin\frac{1}{6}n + B\cos\frac{\pi}{3}n$

(2) $x(n) = e^{j0.2n\pi} + e^{-j0.3n\pi}$

解　(1) $x(n)$ 的每个分量周期分别为 $N_1 = \frac{2\pi}{1/6} = 12\pi, N_2 = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ 。因此，无法找出公共周期，故 $x(n)$ 是非周期的。

(2) $x(n)$ 的每个分量周期分别为 $N_1 = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10, N_2 = \frac{2\pi}{0.3\pi}m = \frac{20}{3}m$，当 $m = 3$ 时，$N_2 = 20$。所以，它的公共周期为 $N = 20$ ，故 $x(n)$ 是周期 $N = 20$ 的周期信号。

2.2.2　序列的基本运算与波形变换

序列的基本运算包括相加、相乘、累加，分别如式(2.2-12)、式(2.2-13)和式(2.2-14)所示。而前向差分和后向差分如式(2.2-15a)和式(2.2-15b)所示。

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \tag{2.2-12}$$

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \tag{2.2-13}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \tag{2.2-14}$$

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \tag{2.2-15a}$$

$$\Delta x(n) = x(n) - x(n-1) \tag{2.2-15b}$$

序列的波形变换有波形反褶、平移和展缩等几种形式。其中，序列的反褶表示将信号 $x(n)$ 的自变量 n 换成 $-n$ ；其信号 $x(-n)$ 的波形由原 $x(n)$ 的波形以纵轴为对称轴反褶得到。如图 2.2-6 所示。

序列的移位是将原序列 $x(n)$ 逐项沿 n 轴左移或右移 m 位得到的新序列，设 $x(n)$ 的波形如图 2.2-7(a) 所示，$x(n-1)$ 是原序列 $x(n)$ 逐项沿 n 轴右移 1 位得到的序列，$x(n+1)$ 是