文都教育®

2018

考研数学

15年真题解析与方法指导

Mathematics 数学三

文都考研数学命题研究组 策划　汤家凤 编著

- 名师解析透彻易懂　详尽归纳典型方法
- 方法点评开拓思路　抓住考点提高能力
- 2003–2017年共15年真题全收集

超值服务：全书免费网络邮箱答疑

Mathematics

中国原子能出版社

文都教育®

2018

考研数学

15年真题解析与方法指导

数学三

文都考研数学命题研究组 策划　汤家凤 编著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学15年真题解析与方法指导. 数学三 / 汤家凤编著. —北京 : 中国原子能出版社, 2016.3(2017.3重印)

ISBN 978-7-5022-7153-4

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第044691号

考研数学15年真题解析与方法指导. 数学三

出版发行 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑 张关铭
特约编辑 邱晓春 陈文峰
印　　刷 北京市兴城福利印刷厂
经　　销 全国新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 12.75 **字　数** 318千字
版　　次 2016年3月第1版 2017年3月第2次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5022-7153-4 **定　　价** 32.00元

网址:http://www.aep.com.cn **E-mail:atomep123@126.com**
发行电话:010-68452845

郑重声明

买正版图书　听精品课程

由文都考研数学命题研究组策划、汤家凤老师编著的《考研数学15年真题解析与方法指导·数学一》《考研数学15年真题解析与方法指导·数学二》《考研数学15年真题解析与方法指导·数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书，这类图书印制质量差，错误百出，不仅使考生蒙受金钱与精力的损失，而且误导考生，甚至毁掉考生的前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益，文都教育特发如下郑重声明：

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人，一经发现，文都教育将严厉追究其法律责任；

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的，立即取消其代理、合作资格，并依法追究其法律和相关经济责任；

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者，文都图书事业部将给予奖励；若举报者为参加考研的考生，文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷；

4. 全国各地举报电话：010－88820419，13488713672

电子邮箱：tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书，特提供网上增值服务，考生登录文都教育在线（www.wendu.com）可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师：北京市安诺律师事务所

刘　岩

2017年3月

前言 preface

全国硕士研究生招生考试经管类专业考生需要参加数学三的考试。数学课程因为其分值较高(总分 150 分)、难度较大而在整个研究生招生考试中起着举足轻重的作用。

数学复习经过上半年的基础复习和暑假的强化复习后,需要检查自己的复习效果,同时需要逐步增加考生的临场适应性。历年真题是最权威的练习材料,选择一本好的真题解析,通过适当的使用方法可以大幅度提高自己的临场适应性和考试成绩,可以明确自己的复习重点、发现自己的不足之处,使数学的复习日臻完善。

本书的解析部分是作者 20 余年考研数学辅导经验的总结。**具有以下特点:**

1. 真题跨年度较长

本书对 2003—2017 年共 15 年真题进行了详细解析。要达到理想的复习效果,真题练习的年份不能太少,15 年真题基本涵盖了所有的知识点、重要的题型、重要的方法,使考生更好地掌握考研数学的命题特点和考试重点及方法。

2. 对重点题型力求做到方法总结

本书解析部分力求对重要的题型和重要考点进行方法总结与点评,便于考生进行归纳总结,对重要方法和题型有更系统的理解和掌握。

3. 力求做到一题多解

真题的解析部分力求做到一题多解,同时很多题目给出了作者多年教学过程中总结出的通俗、简明的方法。

本书的使用方法如下:

1. 从 9 月中旬开始,每周争取练习两套真题,从 2003 年开始往后练习,不要在短时间内突击做完,那样复习效果不佳。

2. 每套必须在规定的时间(3 小时)内完成,对运算能力强的同学,最好在两个半小时内完成。

3. 每套真题完成后,首先检查结果的正确性,对做错的部分一定要找出原因,进行巩固复习,保证今后不再发生同样的错误。

冲刺阶段除练习真题外,大家还可以适当找一点模拟试题练习,有些模拟试题对考试趋势有一定的预测性,这样可以使得复习效果更好。本书在成书的过程中得到文都同仁的大力支持与鼓励,在此表示衷心感谢,限于作者水平有限,不足之处难免,欢迎广大读者批评指正。

作者微博

汤家凤

2017 年 3 月于南京

目　录

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 1

2003 年数学(三)真题解析 ······ 5

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 11

2004 年数学(三)真题解析 ······ 15

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 25

2005 年数学(三)真题解析 ······ 29

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 37

2006 年数学(三)真题解析 ······ 41

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 48

2007 年数学(三)真题解析 ······ 52

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 62

2008 年数学(三)真题解析 ······ 66

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 74

2009 年数学(三)真题解析 ······ 78

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 86

2010 年数学(三)真题解析 ······ 90

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 98

2011 年数学(三)真题解析 ······ 102

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 109

2012 年数学(三)真题解析 ······ 113

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ······ 121

2013 年数学(三)真题解析 ······ 125

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 ········· 133
2014 年数学(三)真题解析 ········· 137
2015 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题 ········· 148
2015 年数学(三)真题解析 ········· 153
2016 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题 ········· 161
2016 年数学(三)真题解析 ········· 165
2017 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题 ········· 176
2017 年数学(三)真题解析 ········· 180

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(三)试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 请将答案写在题中横线上)

(1)设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是________.

(2)已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ ________.

(3)设 $a>0, f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 而 D 表示全平面,则

$I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(4)设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$, $a<0$;$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $a=$________.

(5)设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为________.

(6)设总体 X 服从参数为 2 的指数分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则当 $n\to\infty$ 时,$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于________.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1)设 $f(x)$为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　).

(A)在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B)有跳跃间断点 $x=0$

(C)在 $x=0$ 处右极限不存在　　(D)有可去间断点 $x=0$

(2)设可微函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极小值,则下列结论正确的是(　　).

(A)$f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数等于零　　(B)$f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数大于零

(C)$f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数小于零　　(D)$f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数不存在

(3)设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$, $q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$, $n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

(4)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1,则必有(　　).

(A)$a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B)$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

(C)$a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D)$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量,下列结论不正确的是(　　).

(A)若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关

(6)将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件(　　).

(A)A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B)A_2,A_3,A_4 相互独立

(C)A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D)A_2,A_3,A_4 两两独立

三、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$, $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$. 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

四、(本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$,

求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$.

六、(本题满分 9 分)

求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}\ (|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：

$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x)$，且 $f(0)=0,\ f(x)+g(x)=2e^x$.

(1)求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(2)求出 $F(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

九、(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组 $\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \vdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(1)方程组仅有零解；

(2)方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 13 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\,(b>0)$，其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1)求 a,b 的值；

(2)利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若\ x\in[1,8],\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 是 X 的分布函数，求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

十二、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

2003 年数学(三)真题解析

一、填空题

(1)**【答案】** $(2,+\infty)$.

【解】 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}$；

当 $x=0$ 时，由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}$ 存在，得 $\lambda>1$ 且 $f'(0)=0$，

于是 $f'(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$，所以 $\lambda>2$.

(2)**【答案】** $4a^6$.

【解】 设切点为 $(x_0,0)$，令 $y'=3x^2-3a^2=0$，得 $x_0^2=a^2$，

由 $0=x_0^3-3a^2x_0+b$，得 $b=x_0(3a^2-x_0^2)=2a^2x_0$，故 $b^2=4a^6$.

(3)**【答案】** a^2.

【解】 令 $D_0=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y-x\leqslant 1\}$，

则 $I=\iint\limits_{D}f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\iint\limits_{D_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+1}\mathrm{d}y=a^2$.

(4)**【答案】** -1.

【解】 由 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}+(\dfrac{1}{a}-1)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$

$$=\boldsymbol{E}+(\frac{1}{a}-1)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-2a\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+(\frac{1}{a}-1-2a)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

得 $\dfrac{1}{a}-1-2a=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$，因为 $a<0$，所以 $a=-1$.

(5)**【答案】** 0.9.

【解】
$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0.9,$$

由 $\operatorname{cov}(Y,Z)=\operatorname{cov}(Y,X-0.4)=\operatorname{cov}(Y,X)=\operatorname{cov}(X,Y)$，且 $D(Z)=D(X)$，得

$$\rho_{YZ}=\frac{\operatorname{cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0.9.$$

(6)**【答案】** $\dfrac{1}{2}$.

【解】 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立且同分布，所以 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 独立同分布，

由 $X\sim E(2)$，得 $E(X)=\dfrac{1}{2}$，$D(X)=\dfrac{1}{4}$，

于是 $E(X_1^2)=E(X_2^2)=\cdots=E(X_n^2)=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{1}{2}$，

由辛钦大数定理，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X^2)$，

故 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\dfrac{1}{2}$.

方法点评：本题考查大数定律. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，若 $E(X_i^k)$ $(i=1,2,\cdots)$ 存在，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=E(X^k)$.

二、选择题

(1)【答案】 (D).

【解】 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，

于是 $$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

故 $x=0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点，应选(D).

方法点评：本题考查函数间断点及其类型.

注意如下知识点：

(1)若 $f(x)$ 可导且为奇函数，则 $f(0)=0$ 且 $f'(x)$ 为偶函数；

(2)若 $f(x)$ 可导且为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数且 $f'(0)=0$.

(2)【答案】 (A).

【解】 因为 $f(x,y)$ 可微且在 (x_0,y_0) 处取极小值，

所以 $f'_x(x_0,y_0)=0$，　$f'_y(x_0,y_0)=0$，

而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\big|_{y=y_0}=f'_y(x_0,y_0)$，所以应选(A).

(3)【答案】 (B).

【解】 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，

因为 $0\leqslant\frac{|a_n|+a_n}{2}\leqslant|a_n|$，　$0\leqslant\frac{|a_n|-a_n}{2}\leqslant|a_n|$，

所以由正项级数的比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+a_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|-a_n}{2}$ 都收敛，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $-\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛，应选(B).

事实上，若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+a_n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|-a_n}{2}$ 都发散.

(4)【答案】 (C).

【解】 由 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，得 $r(\boldsymbol{A})=2<3$，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=(a+2b)(a-b)^2=0$，得 $a+2b=0$ 或 $a=b$.

而当 $a=b$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，故 $a+2b=0$，应选(C).

方法点评：本题考查矩阵与其伴随矩阵的秩之间的关系.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$

本题因为 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，显然(A)，(B)不对；因为 $a+2b\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $r(\boldsymbol{A})=3$，(D)不对.

(5)【答案】 (B).

【解】 方法一 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则至少存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，但并非对任意一组不为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，(B)不正确，应选(B).

方法二 若对任意一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，皆有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$，即齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 一定线性无关，(A)是正确的；

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 s，反之，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 s，则其极大线性无关组所含向量的个数为 s，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，(C)正确；

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则其任一部分向量组也线性无关，从而任意两个向量线性无关，故任两个向量不成比例，(D)正确，应选(B).

(6)【答案】 (C).

【解】 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$， $P(A_3)=C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$P(A_4)=C_2^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$， $P(A_1A_2)=\dfrac{1}{4}$，$P(A_1A_3)=\dfrac{1}{4}$，

$P(A_2A_3)=\dfrac{1}{4}$， $P(A_1A_2A_3)=0$，

因为 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$， $P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，

$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$， $P(A_2A_4)\neq P(A_2)P(A_4)$，

又 $P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，

故 A_1,A_2,A_3 两两独立但不相互独立，且 A_2,A_3,A_4 两两不独立，应选(C).

三、【解】
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\sin\pi(1-x)}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\overset{\pi(1-x)=t}{=\!=\!=}\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^+}\frac{t-\sin t}{t\sin t}=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^+}\frac{t-\sin t}{t^2}=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{2t}=\frac{1}{\pi},\end{aligned}$$

补充定义 $f(1)=\dfrac{1}{\pi}$，则 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

方法点评：本题考查函数的极限与连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 内每点都连续；(2) $f(a)=f(a+0)$，$f(b)=f(b-0)$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在时，只要补充定义，令 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$f(b)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$，则补充定义后 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

四、【解】 由复合函数求偏导的法则，得
$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v},$$

于是 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\left(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial v}+x\left(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

$$= y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x(x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})-\frac{\partial f}{\partial v}-y(x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}-y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

代入 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，得 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$.

五、**【解】** 作极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{\pi})$，

则 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=e^{\pi}\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=e^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}re^{-r^2}\sin r^2\mathrm{d}r=\pi e^{\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}e^{-r^2}\sin r^2\mathrm{d}(r^2)=\pi e^{\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t,$$

令 $\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t=I_1$，由分部积分法得

$$I_1=\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi}e^{-t}\mathrm{d}(\cos t)=-e^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi}e^{-t}\cos t\mathrm{d}t=e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi}e^{-t}\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=e^{-\pi}+1-e^{-t}\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t=e^{-\pi}+1-I_1,$$

所以 $I_1=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$，

故 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi e^{\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)=\frac{\pi}{2}(e^{\pi}+1)$.

六、**【解】** 令 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}=f(x)$，　$f(0)=1$，

由 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=-\frac{x}{1+x^2}$，得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

由 $f'(x)=-\frac{x}{1+x^2}=0$，得 $x=0$.

因为当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(0)=1$.

七、**【解】** (1)由 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=f^2(x)+g^2(x)$

$$=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)=(2e^x)^2-2F(x),$$

得 $F(x)$ 满足的一阶微分方程为 $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$.

(2)由 $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$，得

$$F(x)=\left[\int 4e^{2x}\cdot e^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]e^{-\int 2\mathrm{d}x}=Ce^{-2x}+e^{2x},$$

由 $F(0)=f(0)g(0)=0$，得 $C=-1$，故 $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.

八、**【证明】** 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

于是 $3m \leqslant f(0)+f(1)+f(2) \leqslant 3M$，即 $m \leqslant 1 \leqslant M$.

由介值定理，存在 $c \in [0,2]$，使得 $f(c)=1$.

因为 $f(c)=f(3)=1$，所以由罗尔定理，存在 $\xi \in (c,3) \subset (0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

方法点评： 本题考查介值定理及罗尔定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，注意如下技巧：

(1) 若出现几个函数值之和时，一般对 $f(x)$ 使用介值定理；

(2) 若出现 ξ 的命题且 $\xi \in [a,b]$，一般使用介值定理.

九、【解】

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^{n} a_i+b)b^{n-1}.$$

(1)当 $b \neq 0$ 且 $b \neq -\sum_{i=1}^{n} a_i$ 时，因为 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，所以方程组只有零解；

(2)当 $b=0$ 或 $b=-\sum_{i=1}^{n} a_i$ 时，方程组有非零解.

当 $b=0$ 时，方程组的同解方程组为 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$，不妨设 $a_1 \neq 0$，则方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+C_{n-1}\begin{pmatrix} -\frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$（其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 为任意常数）；

当 $b=-\sum_{i=1}^{n} a_i$ 时，

$$\text{由 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-\sum_{i=1}^{n} a_i & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-\sum_{i=1}^{n} a_i & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\sum_{i=1}^{n} a_i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

得 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，因为 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 0，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

十、【解】 令 $A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f=X^{T}AX$.

(1)由 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(A),\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=1,\\ -12=-2(2a+b^2),\end{cases}$ 得 $a=1,b=2$.

(2)由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=0$，得 $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-3$ 时，由 $(-3E-A)X=0$ 即 $(3E+A)X=0$，得 $\xi_1=(1,0,-2)^{T}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，由 $(2E-A)X=0$，得 $\xi_2=(2,0,1)^{T}$，$\xi_3=(0,1,0)^{T}$，

因为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 两两正交，所以单位化得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad \gamma_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

取 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}&0\\0&0&1\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\end{pmatrix}$，

$Q^{T}AQ=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，二次型在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为

$$f=X^{T}AX\xlongequal{X=QY}-3y_1^2+2y_2^2+2y_3^2.$$

十一、【解】 当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；当 $x>8$ 时，$F(x)=1$.

当 $1\leqslant x\leqslant 8$ 时，$F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\mathrm{d}u=\sqrt[3]{x}-1$.

$Y=F(X)$ 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}$，

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{F(X)\leqslant y\}=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant (y+1)^3\}$
$=F[(y+1)^3]=y$，

于是 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0,&y<0,\\ y,&0\leqslant y<1,\\ 1,&y\geqslant 1,\end{cases}$ 即 $Y\sim U(0,1)$.

十二、【解】 $F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{X+Y\leqslant u\}$
$=P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant u\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{X+Y\leqslant u\mid X=2\}$
$=0.3P\{Y\leqslant u-1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\}=0.3F(u-1)+0.7F(u-2)$，

于是 $g(u)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$.