

控制理论基础

CONTROL THEORY FUNDAMENTALS

邹伯敏 编著



浙江大学出版社

内容简介

本书是“控制理论”系列教材之一，全书共分三卷。本书为第一卷，主要介绍控制理论的基本概念、基本概念、基本定理、基本方法、基本应用等。

控制理论基础

邹伯敏 编著

本书共分三卷，本书为第一卷，主要介绍控制理论的基本概念、基本概念、基本定理、基本方法、基本应用等。本书可作为高等院校自动化专业及相关专业的教材，也可供从事控制理论工作的工程技术人员参考。

本书共分三卷，本书为第一卷，主要介绍控制理论的基本概念、基本概念、基本定理、基本方法、基本应用等。



编著 邹伯敏

责任编辑 王 强

封面设计 陈 明

浙江工业大学出版社

杭州 311126

（内部发行）

ISBN 7-309-01151-2

定价 12.00元

（浙江工业大学出版社）

（杭州）

（浙江工业大学出版社）

（杭州）

（浙江工业大学出版社）

（杭州）

（浙江工业大学出版社）

（杭州）

（浙江工业大学出版社）

（杭州）

浙江工业大学出版社

(浙)新登字10号

内 容 简 介

本书较全面和系统地介绍了经典控制理论和现代控制理论的基础部分内容——状态空间分析法。全书共分十章，主要内容有：控制系统的数学模型、时域分析法、根轨迹法、频率响应法、离散控制系统、能控性和能观性、控制系统的校正及状态观测器、非线性控制系统、李雅普诺夫稳定性分析和最优控制原理。在叙述中考虑到现代控制理论与经典控制理论的适当结合。

本书理论联系实际，突出重点。在每章后面附有较多的习题，其中不少习题是选自于我国近年来各重点高校研究生的入学试题，并在第四章后的各章中，都附有典型例题分析。

本书可供工科高等院校的工业电气自动化、电机、电气、机械、电子、计算机、冶金等专业的教材和教学参考用书，同时也可供从事自动控制工作的工程技术人员作参考。

控制理论基础

邹伯敏 编 著

责任编辑 龚建勋

× × ×

浙江大学出版社出版

浙江良渚印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

× × ×

开本787×1092 1/16 印张32 字数819千

1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷

印数0001—1560

ISBN7-308-01171-2/TP·084

定价：8.50元

前 言

随着现代工业和科学技术的飞跃发展,自动控制技术不仅越来越广泛地应用于国防、工业等部门,而且它的一些基本概念和分析问题的方法,正迅速地向着政治、经济、管理、生物等各个领域渗透。掌握控制理论的基本概念和一般的分析及设计方法,已成为工科本科教学的一个基本教学要求。

虽然现代控制理论能解决比经典控制理论范围更广、难度更高的控制问题,但它在实际应用中,常常会遇到许多限制和困难。基于经典控制理论能卓有成效地解决现代工业控制系统中的许多实际的控制问题,考虑到大学本科教学的基本要求,因此本书在内容的安排上是偏重于经典控制理论。对于现代控制理论的基础内容——状态空间分析法和最优控制原理,也作了较为详细的阐述。由于经典控制理论与现代控制理论在某些内容上是有着一定的内在联系,因此本书在叙述时力求把两者有机地结合起来,旨在使读者能获得系统而又完整的概念。

为了在有限的学时内,使读者能系统地掌握控制理论中最基本的内容,本书在叙述上力求做到突出重点、理论联系实际,略去一些较为次要的内容。在控制策略和控制方法的叙述上,着重于概念的阐述,尽量避免冗长的教学推导或定理的证明。此外,考虑到数字计算机在控制系统中的应用日趋广泛,在内容上除了安排离散控制系统这一章外,还在有关的章节中介绍了用数字计算机求取系统的时域响应、绘制根轨迹和频率特性等内容。

全书共分十章,主要围绕以下4个问题展开讨论:

- (1) 控制系统的数学模型和各种描述方法;
- (2) 各类控制系统的基本特性及其相关的各种分析方法;
- (3) 控制系统的校正;
- (4) 最优控制原理。

书中每章后面除附有数量较多的习题外,自第四章起,还附有典型例题分析。这些例题理论联系实际,难度较大,涉及的概念较多,将有助于读者加深对基本概念的理解和提高分析与综合问题的能力。

本书是在编者的同名教材基础上编写的。该教材在浙江大学混合班(尖子班)已使用过多次。经过几年来的教学实践,积累了经验,听取了各方面的意见,在此基础上,对原教材的内容作了增减和修改,编写成此书。在编写过程中,始终得到编者的老师王懋鏊、胡中樾两教授的热情支持和帮助;王懋鏊教授仔细审阅了全部书稿,提出了许多极为宝贵的建议和修改意见,在此对他们表示衷心地感谢。

由于水平有限,书内错误和不妥之处,恳请同行和读者指正。

编者

1991.11.1

目 录

第一章 自动控制系统的一般概念	(1)
1-1 自动控制系统	(1)
1-2 开环控制与闭环控制	(4)
1-3 自动控制系统的类型	(6)
1-4 对控制系统性能的要求	(7)
第二章 控制系统的数学模型	(9)
2-1 列写系统微分方程式的一般方法	(9)
2-2 非线性数学模型的线性化	(13)
2-3 传递函数	(15)
2-4 方块图	(20)
2-5 信号流图	(27)
2-6 状态变量描述	(32)
2-7 模式变换及其实现	(37)
2-8 线性变换	(50)
2-9 线性定常系统状态方程式的解	(61)
小结	(71)
习题	(71)
第三章 控制系统的时域分析	(77)
3-1 典型的试验信号	(77)
3-2 一阶系统的时域响应	(79)
3-3 二阶系统的时域响应	(80)
3-4 高阶系统的时域响应	(91)
3-5 用数字计算机求取系统的瞬态响应	(92)
3-6 线性定常系统的稳定性	(96)
3-7 劳斯稳定判据	(102)
3-8 控制系统的稳态误差	(106)
小结	(116)
习题	(116)
第四章 根轨迹法	(119)
4-1 根轨迹法的基本概念	(119)
4-2 绘制根轨迹的基本法则	(123)
4-3 几个参量根轨迹的绘制	(136)
4-4 非最小相位系统的根轨迹	(138)

4-5 应用计算机绘制根轨迹图	(146)
小结	(149)
典型例题分析	(150)
习题	(156)
第五章 频率响应法	(160)
5-1 引言	(160)
5-2 频率特性	(160)
5-3 对数坐标图	(165)
5-4 极坐标图	(180)
5-5 对数幅相图	(188)
5-6 奈魁斯特稳定判据	(188)
5-7 相对稳定性	(203)
5-8 用数字计算机绘制波德图并分析系统的稳定性	(210)
5-9 闭环频率响应	(213)
5-10 系统的时域响应与频域响应之间的关系	(220)
小结	(225)
典型例题分析	(225)
习题	(232)
第六章 离散控制系统	(238)
6-1 引言	(238)
6-2 连续信号的采样与复现	(240)
6-3 Z变换	(245)
6-4 脉冲传递函数	(254)
6-5 离散系统的时域描述	(263)
6-6 离散控制系统的性能分析	(274)
小结	(283)
典型例题分析	(283)
习题	(289)
第七章 线性系统的能控性和能观性	(292)
7-1 线性定常系统的能控性	(292)
7-2 线性定常系统的能观性	(301)
7-3 能控性和能观性判据的另一形式	(304)
7-4 对偶性原理	(310)
7-5 能控性和能观性与传递函数的关系	(311)
7-6 线性系统的结构分解	(315)
典型例题分析	(320)
习题	(328)
第八章 控制系统的校正	(332)

8-1	引言	(332)
8-2	常用的校正网络	(334)
8-3	时域中的串联校正	(338)
8-4	频域中的串联校正	(345)
8-5	反馈校正	(352)
8-6	状态变量反馈	(355)
8-7	状态观测器及其应用	(359)
8-8	数字控制器的设计	(365)
	小结	(371)
	典型例题分析	(371)
	习题	(380)
第九章	非线性控制系统	(383)
9-1	引言	(383)
9-2	描述函数法	(386)
9-3	用描述函数分析非线性系统	(393)
9-4	相平面法的基本概念	(396)
9-5	相轨迹的绘制	(397)
9-6	奇点与极限环	(404)
9-7	非线性系统的相平面分析	(411)
9-8	李雅普诺夫稳定性分析	(416)
	小结	(427)
	典型例题分析	(427)
	习题	(436)
第十章	最优控制原理	(439)
10-1	最优控制问题的叙述	(439)
10-2	用变分法求解最优控制问题	(441)
10-3	极小值原理	(460)
10-4	快速最优控制	(465)
10-5	线性二次型最优控制问题——线性状态调节器	(468)
10-6	动态规划	(482)
	典型例题分析	(490)
	习题	(499)

第一章 自动控制系统的一般概念

1-1 自动控制系统

自动控制就是在没有人直接参与的情况下，利用控制器使被控制对象（如机器、设备和生产过程）的某一物理量（或工作状态）能自动地按照预定的规律去运行（或变化）。例如地面天线自动地跟踪同步卫星；人造卫星按预定的轨道运行并返回地面；电网的电压和频率自动地维持不变；金属切削机床的速度，在电网电压和负载发生变化时，能自动地保持近似不变。以上这些，都是自动控制的结果。

现代数字计算机的发展，为自动控制技术的应用提供了广阔的前景。使它不仅大量应用于空间技术、科技、工业、交通管理、环境卫生等领域，而且它的概念和分析问题的方法正迅速地与其它领域渗透，例如政治、经济、教学等领域中的各种体系，人体的各种功能，自然界的各种生物学系统，都可视为是一种控制系统。

由于自动控制技术的应用，不仅能使生产设备或其过程实现自动化，极大地提高了劳动生产率和产品的质量，改善了劳动条件，而且在人类征服大自然、探索新能源、发展空间技术和改善人民生活等方面都能起着极其重要的作用。由此可见，自动控制是我国实现四个现代化过程中必不可少的一门科学技术。

自动控制是一门理论性很强的科学技术，一般称之为自动控制技术。实现自动控制技术的理论叫做“控制理论”。把实现自动控制所必须的各个部件组合起来，去完成预定的控制任务，这个组合体称为自动控制系统。

自动控制系统的种类较多，被控制的物理量有各种各样，如温度、压力、流量、电压、转速、位移和力等。这些控制系统的组成元件虽然有较大的差异，但是系统的基本组成结构却相类同，并且一般都是通过机械、电气、液压等方法来代替人工控制。为了了解自动控制系统的结构，首先让我们分析一下图1-1所示的液面控制系统，人若参与该系统的控制，应起那些作用？

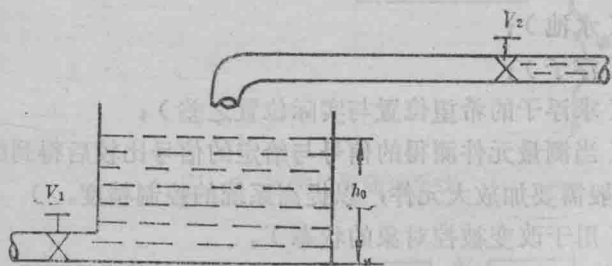


图1-1 水池液面控制系统

图1-1中的 V_1 为放水阀， V_2 为进水阀，控制要求使液面的高度等于 h_0 。当人参与控制时，就要不断地将实际液面的高度和希望液面的高度作比较。根据比较的结果，决定进水阀 V_2 开

度的增大还是减小，以达到维持液面高度不变的目的。图1-2为人参与该系统控制的方块图。由该图可知，人在参与控制中起了以下三方面的作用：

- 1) 测量实际液面的高度 h_1 （用眼睛）；
- 2) 将测得的实际液面的高度 h_1 与希望液面的高度 h_0 相比较（用脑）；
- 3) 根据比较的结果，即偏差的正负去决定控制动作（用手）。



图1-2 液面人工控制系统的方块图

由此可见，若用自动控制代替人工控制，那末在自动控制系统中必须具有上述三种职能机构，即测量机构、比较机构和执行机构。显然，用人工控制既不能保证系统的控制精度，也不能减轻人的劳动强度。如果将图1-1的系统改为自控系统如图1-3所示，就可以实现不论放水阀 V_1 输出的流量如何变化，系统总能自动地维持其液面高度在允许的偏差范围之内。假设当液面的高度因 V_1 阀开度的增大而稍有降低时，则系统立即产生一个误差电压 e ，该电压经放大器放大后供电给进水阀 V_2 的拖动电机，使阀 V_2 的开度相应增大，从而使水池的液面恢复到所期望的高度。

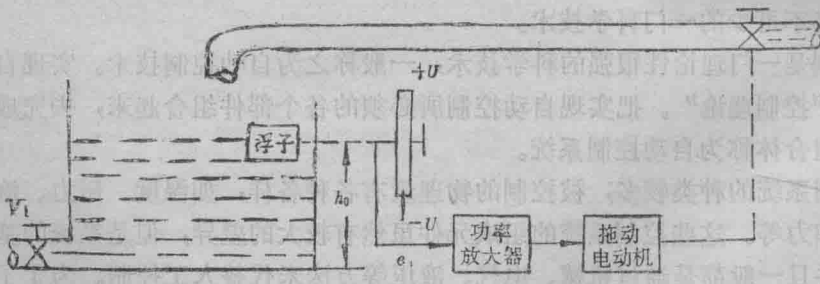


图1-3 水池液面自动控制系统

由图1-3可见，该系统是由以下5个部分所组成：

- 1) 被控对象（水池）；
- 2) 测量机构（浮子）；
- 3) 比较机构（求浮子的希望位置与实际位置之差）；
- 4) 放大机构（当测量元件测得的信号与给定的信号比较后得到的误差信号不足以使执行机构动作时，一般需要加放大元件，以提高系统的控制精度。）
- 5) 执行机构（用于改变被控对象的状态）。

为了使控制系统的表示既简单又明了，在控制工程中一般都采用方块图表示系统中的各个组成部件，并在每个方块中填入它所表示的部件名称或其功能函数表达式，不必画出其具体结构。信号在系统中的传递方向用箭头的指向表示，符号 $\begin{matrix} a & c \\ \rightarrow \otimes \rightarrow & \\ \uparrow & \\ b & \end{matrix}$ 表示信号 a 和 b 相比较，

“+”号表示信号 $c = a + b$ ，“-”号表示信号 $c = a - b$ 。据此，图1-3所示的液面自动控制系统就可以简捷地用图1-4所示的方块图表示。这里，我们只在每个方块中注明该部件的名称，至于描述它们输入信号与输出信号间的动静态关系的数学表达式，将在下一章中给予阐述。

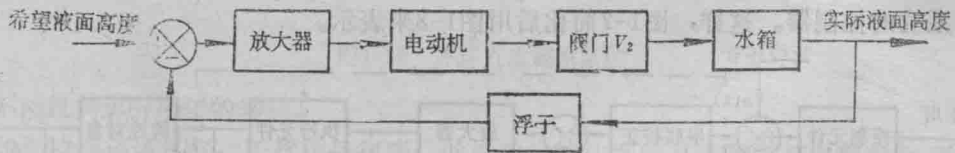


图1-4 图1-3所示系统的方块图

图1-5是一个直流位置随动系统，它的方块图用图1-6表示。该系统是用一对电位器作为系统位置的检测元件，它们分别把系统的输入与输出的位置信号转换成与之成比例的电信号，并进行比较。当发送电位器和接收电位器动臂的转角相等时，则有 $u_r = u_c$ ，电动机处于静止状态。如使发送电位器的动臂按逆时针方向增加一个角度 $\Delta\theta_r$ ，则 u_r 大于 u_c 而产生一个偏差电压 u_e ，此电压经放大器放大后，供电给电动机，使它带动负载旋转，一直到 $\theta_o = \theta_r$ 为止。虽然这个系统与图1-4所示的液面恒值控制系统所完成的控制任务不同，系统中所用的部件也有较大的差异，但它们的自动控制都采用了负反馈的控制原理。相同的控制原理决定了它们必然有相类似的结构形式。

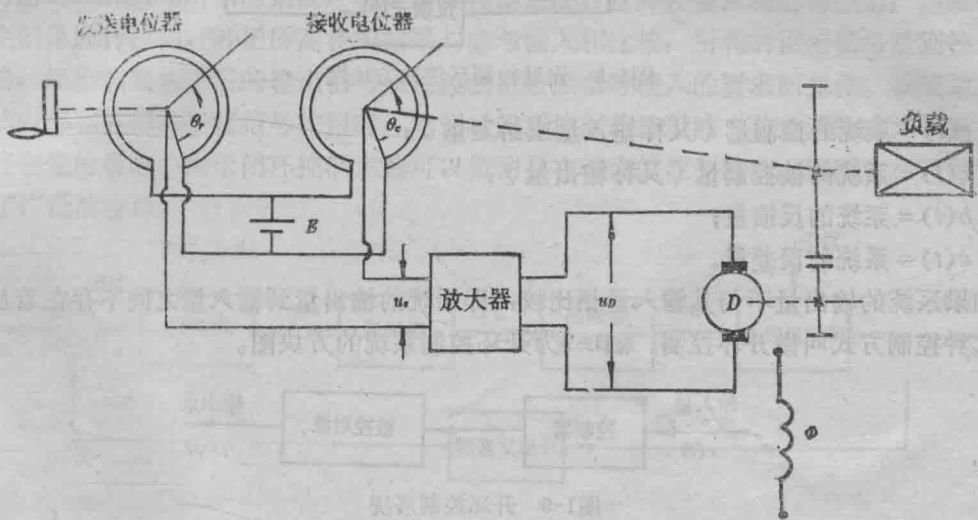


图1-5 直流位置随动系统

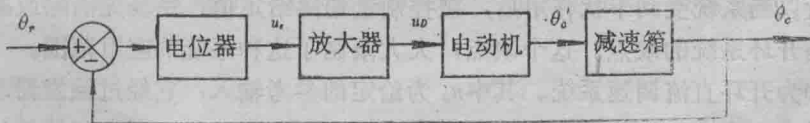


图1-6 图1-5所示系统的方块图

1-2 开环控制与闭环控制

自动控制系统的用途与结构虽各有不同，但参照上节所举的例题，可以画出它的一般形式的方块图，如图1-7所示。图中串联和并联校正装置是用于改善系统的动态特性，虚线方框部分表示系统的控制器。这样，图1-7简化后用图1-8来表示。

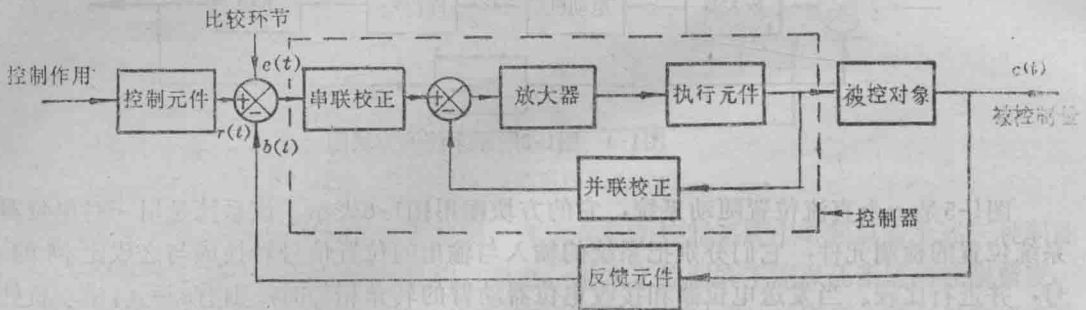


图1-7 自动控制系统的方块图

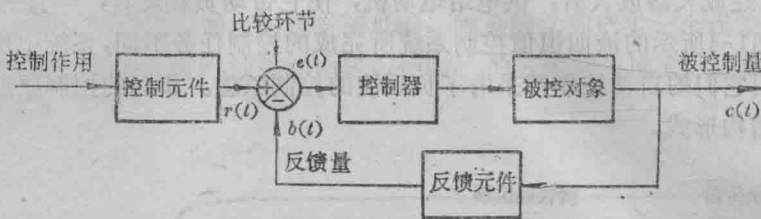


图1-8 自动控制系统的方块图

其中 $r(t)$ = 系统的控制量（又称输入量或给定量）；
 $c(t)$ = 系统的被控制量（又称输出量）；
 $b(t)$ = 系统的反馈量；
 $e(t)$ = 系统的误差量。

如果系统的输出量不与其输入量相比较，即系统的输出量到输入量之间不存在着反馈回路，这种控制方式叫做开环控制。图1-9为开环控制系统的方块图。



图1-9 开环控制系统

由上图可见，开环控制系统的特点是结构简单，所用的元器件少，成本低，系统工作一般也较容易稳定。但由于在这种系统中没有对它的被控制量进行检测，也不与系统的给定值相比较，所以当系统受到干扰作用后，被控制量偏离给定值，系统无消除或减小误差的调节功能，这是开环系统的缺点。这个缺点，大大限制了这种系统的应用范围。

图1-10为开环直流调速系统。其中 u_g 为给定的参考输入，它经过触发器和晶闸管整流装置加工后转变为直流电压 u_d 供电给直流电动机，使之产生一个 u_g 所期望的转速 n 。但是，当电动机的负载、交流电网电压以及电动机的激磁稍有变化时，电动机的转速就要随之而变



图1-10 开环直流调速系统

化，不能维持 u_D 所期望的转速。

如果控制环境良好，干扰信号很弱，并采取措施使系统具有限制其内部参数变化的功能，则开环控制也能得到较为满意的控制效果。图1-11所示的是数控机床中广泛应用的定位系统。这是一个开环系统，工作台的位移是该系统的被控制量，它是跟随控制信号（控制脉冲）而变化的。显然，这个系统对于干扰信号是没有纠正偏差功能的。

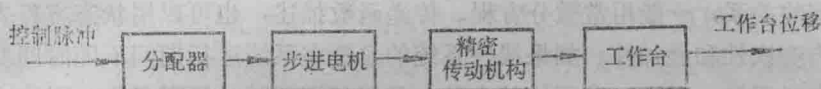


图1-11 开环定位控制系统方块图

如果系统的被控制量反馈到其输入端，并与参考输入相比较，这种控制方式叫闭环控制。由于这种控制系统都具有反馈回路，因此闭环控制又名反馈控制。在前一节中我们所讨论的图1-4和图1-6所示的系统，都是闭环控制系统。这种控制系统的特点是：连续不断地对被控制量进行检测，并把所测得的结果与参考输入相比较，所得的误差信号送到控制器的输入端，经控制器加工后的输出信号使被控制量按照参考输入的要求而变化。系统如果受到来自其内部和外部的干扰信号作用时，它通过闭环控制的作用能自动地消除或减小干扰信号对被控制量的影响。由于闭环控制系统可以做到具有较高的控制精度，因而它在控制工程中得到了广泛的应用。

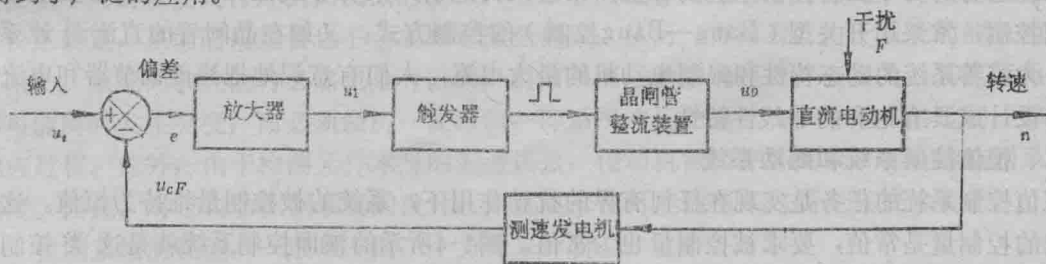


图1-12 闭环直流调速系统

如果把图1-10所示的开环调速系统改为图1-12所示的闭环调速系统，则系统就具有自动抗干扰的功能。例如当负载增大时，流经电动机电枢中的电流增大，根据直流他激电动机的转速公式

$$n = \frac{u_D - ir}{C_e \phi}$$

可知电动机的转速要降低，而转速的降低使测速发电机的输出电压 u_{cF} 随之减小，偏差电压

e 作相应的增大。该电压经放大器放大,使触发脉冲前移,晶闸管的整流电压 u_d 增大,以补偿由负载的增大而造成在电动机电枢电阻上的压降,从而实现电动机的速度近似不变。

1-3 自动控制系统的类型

自动控制系统可以从不同的角度进行分类。例如根据信号传递的路径,可以分为开环控制系统和闭环控制系统;根据系统控制信号的特征来分类,有恒值控制系统和随动系统;按照分析和设计的方法可分为线性控制系统和非线性控制系统,时变系统和非时变系统;根据控制系统中信号的性质,可分为连续控制系统和离散控制系统。下面介绍三种分类系统的有关特点。

一、线性控制系统和非线性控制系统

若组成控制系统的元件都具有线性特性,则称这种系统为线性控制系统。这种系统的输入和输出之间的关系,一般用常微分方程、传递函数描述,也可以用状态方程表示。它的主要特点是具有齐次性和叠加性。如果线性系统的参数在系统运行期间不随时间变化,这种系统称为线性定常系统。反之,若系统的参数在其运行期间随时间而变化,则称这种系统为线性时变系统。

在控制系统中,若有一个以上的元件具有非线性特性,则称该系统为非线性控制系统。非线性系统的状态及其性能,要用非线性微分方程式描述。易知,这种系统不具有齐次性和叠加性,并且系统的响应和稳定性与其初始状态有很大的关系。

严格地说,绝对的线性控制系统(或元件)是不存在的,因为所有的物理系统在不同的程度上都具有非线性特性。为了便于对系统的分析和设计,在一定的条件下,人们常对某些非线性特性作线性化处理。这样,非线性系统就近似地视为线性系统,因而可以用线性系统的数学模型近似地描述它的运动规律。

工程上有时为了改善控制系统的性能,常常人为地引入某种非线性元件。如为了实现最短时间控制,常采用开关型(Bang—Bang控制)的控制方式;又如在晶闸管的直流调速系统中,为改善系统的动态特性和限制电动机的最大电流,人们有意识地把速度调节器和电流调节器设计成具有饱和的非线性特性。

二、恒值控制系统和随动系统

恒值控制系统的任务是实现在任何有界的扰动作用下,系统的被控制量维持为恒值。这种系统的控制量是常值,要求被控制量也为常值。图1-4所示的液面控制系统就是这类控制系统。由于这种系统能自动地克服各种扰动对被控制量的影响,因而恒值控制系统又名为自镇定系统。

随动系统的任务是在各种情况下,能使系统的被控制量以一定的精度跟随着参考输入的变化而变化。图1-6所示的是一个简单的位置随动系统。此外,如实验室中的 X - Y 函数记录仪,汽轮机厂的仿形铣床控制系统都属于这类系统。

三、连续控制系统和离散控制系统

控制系统中各部分的信号若都是时间 t 的连续函数,则称这类系统为连续控制系统。在1-1节中所举的液面自动控制系统和随动系统都属这类控制系统。

如果在控制系统中的一处或数处的信号是时间的离散信号，则称这种系统为离散控制系统。离散信号的特征是只在采样瞬时才有数值，而在两采样点之间是没有信息的。显然，脉冲信号和数码信号都属于离散信号。在这种系统中，常使用采样开关把连续信号转变为离散的脉冲序列信号。因此，对这种系统的分析就不同于连续控制系统，有关这方面的详细内容，将在第六章中讨论。

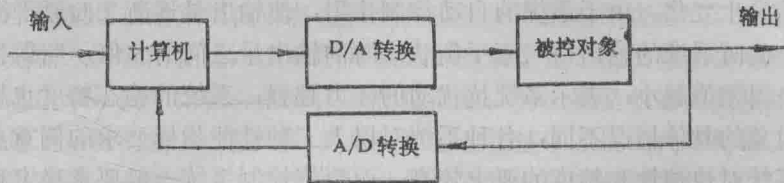


图1-13 计算机控制系统

图1-13所示的计算机控制系统也是一种离散控制系统。将数字计算机引入控制系统有许多优点。例如，可以自动检测系统的运行状态，并能用软件方便地实现对系统不同的运行阶段使用不同的控制规律，以满足系统的动态性能和稳态精度的要求；可以计算和存贮系统在各种状态下的变量和最优设定值（系统输入信号）；可以对参数、变量进行检测、显示、打印和报警，从而大大提高了系统综合自动化的程度。

1-4 对控制系统性能的要求

如前所述，恒值控制系统的任务是使系统的被控制量不受干扰的影响，并始终等于系统输入信号所要求的期望值；随动系统的任务是使其输出量能准确、迅速地复现系统输入量的变化。实际上，这些并不能百分之百地办到，而只能近似地实现。原因是系统中总存在着一些性质不同的储能元件，例如机械的惯性，电路中的电容与电感等。因此，即使在系统中加了校正装置，系统的偏差量也不会立即被完全消除。从另一方面看，由于系统的能源功率是有限的，系统的放大能力必然也是有限的，因而系统运动的加速度不会很大，其速度和位移不可能瞬时发生突变，而必须经历一段时间，即系统的运动必然有一个渐变的过程，即瞬态响应过程。此外，由于检测元件本身的制造误差，传动机械间隙等因素，都会影响到系统的精度。因此，对于自动控制系统的的设计，只是要求在可能的范围内满足其技术要求。

控制系统的性能，一般从下面三个方面来评价。

一、稳定性

稳定性是对控制系统的基本要求。所谓系统稳定，粗略地说，就是当系统的输入，初始条件或其内部参数有微小的变化时，都不会使系统的输出产生过大的变化。显然，不稳定的系统是不能正常工作的。考虑到系统在运行过程中的环境和参数的变化，因此在设计系统时，不仅要保证其稳定，而且还要留有一定的稳定裕量。

二、响应速度

控制系统不仅要稳定，而且还要求系统的响应具有一定的快速性，这对于某些设备或系统来说，它是十分重要的一个性能指标。例如，上面所述的直流调速系统，当它在突加负载

作用下，要求系统的被控制量——转速以较短的时间恢复到原有的数值。至于表示系统瞬态响应速度的定量的性能指标，将在第三章中予以阐述。

三、稳态精度

系统的控制精度通常用它的稳态误差来表示。如果在给定的输入作用下，当系统达到稳态后，其稳态输出与给定输入所要求的期望输出之差，叫做给定稳态误差。显然，这种误差越小，表示系统的输出跟踪其输入的精度越高。如果系统在扰动信号作用下，其输出必然从原平衡状态开始发生变化。由于系统的自动控制作用，使输出量逐渐又向原平衡状态恢复，当达到稳态后，此时系统的输出值与原平衡状态时的输出量之间的差值，叫做扰动稳态误差。同理，这个误差值越小，表示系统抗扰动的能力越强，系统的稳态精度也越高。

由于被控对象的具体情况不同，各种系统对以上三种性能指标要求的侧重点也有所不同。例如随动系统对快速性和精度的要求较高，而恒值控制系统一般要求稳定程度好且有较高的控制精度。同一个控制系统，对于上述三方面的要求总是相互制约的。为了提高系统瞬态响应的快速性，需要加强系统的放大能力，而放大能力的增强，一般又会使系统动态性能变差，甚至系统会变为不稳定。反之，若强调系统动态过程平稳性的要求，系统的放大倍数通常较小，从而使得系统的动态过程变得缓慢，控制的精度也会相应地降低。因此，控制系统瞬态响应的快速性，高精度与其稳定性是一对矛盾。如何分析与解决这个矛盾，正是本课程所要讨论的一个主要内容。

第二章 控制系统的数学模型

为了从理论上对控制系统进行定性分析和定量计算,首要的工作是建立系统的数学模型。

系统的数学模型是描述系统内部各变量之间定量关系的数学表达式。通常,它有两种描述方法:一种是输入—输出描述,又称端部描述。这就是把系统的输出量与输入量间的关系用数学方式表达出来,例如用微分方程式、传递函数。另一种是状态变量描述,又称内部描述。它不仅描述了系统的输入、输出间关系,而且也描述了系统的内部特性。它特别适用于多输入、多输出系统,也适用于时变系统、非线性系统和随机控制系统。

一个控制系统的数学模型虽然可以表示为不同的形式,但在一定的条件下,一种形式的数学模型可能比另一种形式的数学模型更有利于分析研究。因此,在建立系统的数学模型时,必须全面地分析系统的物理特征,根据研究问题的目的和精度的要求,选用一种较为合适的数学模型形式是很有必要的。

建立系统数学模型的方法有解析法和实验法两种。解析法是根据系统及其元件各变量之间所遵循的基本物理规律,列写出各元件的输入—输出关系式,然后消去其中间变量,求得系统的输入—输出数学模型。对于线性定常系统也可按第五章所介绍的频率响应法,用实验的手段来估计系统的数学模型。对于一般系统数学模型的建立,则要应用现代控制理论中的辨识原理。

本章仅限于讨论线性定常连续控制系统的数学模型,重点阐述数学模型的两种描述方法之间的联系和相互转换。

2-1 列写系统微分方程式的一般方法

为使所得到的数学模型既简单又有一定的精度,在建立系统数学模型时,就有必要把对系统影响小的那些次要因素略去,以突出其主要矛盾。推演系统数学模型的前提是对该系统的作用原理和系统中各元件的物理属性有着深入的了解。用这种方法推演系统微分方程式的一般步骤是

(1) 根据基本的物理或化学定律,列写出系统中每一个元件的输入—输出关系式(一般为微分方程);

(2) 确定系统的控制量与被控制量,然后消去中间变量,求出系统被控制量与控制量间的微分方程式。

在列写每一个元件的微分方程式时,必须注意到它与其它元件间的相互影响,即所谓负载效应问题。下面举例说明建立元件和系统微分方程式的一般步骤。

例2-1 $R-L-C$ 电路如图2-1所示。输出电压

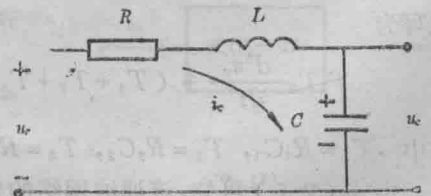


图2-1 $R-L-C$ 电路

为 u_c , 输入电压为 u_r , 试写出该电路的微分方程。

解 由克希荷夫定律, 写出下列方程组:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = u_r \quad (2-1)$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int idt \quad (2-2)$$

消去中间变量 i , 得

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

或写作

$$T_L T_C \frac{d^2 u_c}{dt^2} + T_C \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r \quad (2-3)$$

式中 $T_L = \frac{L}{R}, T_C = RC$

式(2-3)就是描述图2-1所示电路输入—输出的微分方程式。

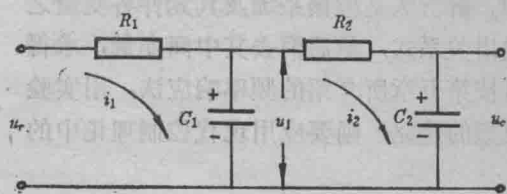


图2-2 R-C滤波网络

例2-2 一个 $R-C$ 滤波网络如图2-2所示, 试求该网络的微分方程。

解 在列写该电路微分方程式时, 必须考虑到前后元件间是否存在着负载效应。对于这个网络, 如果只是简单地分别列出2个 $R-C$ 网络的微分方程, 然后消去中间变量, 这样求得的网络微分方程式将是一个错误的结果。只有

当后面元件的输入阻抗很大, 且对前面元件的影响可以忽略时, 方可单独列出 R_1-C_1 和 R_2-C_2 电路的微分方程式。对于图2-2所示的滤波网络, 由克希荷夫定律写出下列方程组:

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + i_1 R_1 = u_r \quad (2-4)$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad (2-5)$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = u_c \quad (2-6)$$

消去中间变量 i_1, i_2 , 得

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

或写为

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r \quad (2-7)$$

其中 $T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2, T_3 = R_1 C_2$

由式(2-7)可知, 该滤波网络的数学模型是一个二阶常系数微分方程式。

例2-3 设一弹簧、质量、阻尼器系统, 如图2-3所示, 试写出外力 $F(t)$ 与质量块位移