21世纪精品规划教材系列

# 微分几何

WEI FEN JI HE

主编◎郭胜红 巩军胜 韩灵娟

延边大学出版社

21世纪精品规划教材系列

# 微分几何

主　编　郭胜红　巩军胜　韩灵娟
副主编　白莉红

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微分几何 / 郭胜红，巩军胜，韩灵娟主编. — 延吉：延边大学出版社，2016.7

ISBN 978－7－5688－0684－8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①郭… ②巩… ③韩… Ⅲ. ①微分几何－高等学校－教材 Ⅳ. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 186003 号

微分几何

---

主编：郭胜红　巩军胜　韩灵娟
责任编辑：刘奕
封面设计：可可工作室
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 977 号　　邮编：133002
网址：http://www.ydcbs.com
E－mail：ydcbs@ydcbs.com
电话：0433－2732435　　传真：0433－2732434
发行部电话：0433－2732442　　传真：0433－2733266
印刷：三河市德辉印务有限公司
开本：787×1092 毫米　1/16
印张：11　　字数：267 千字
版次：2016 年 7 月第 1 版
印次：2017 年 1 月第 1 次
ISBN ISBN 978－7－5688－0684－8

---

定价：25.00 元

# 前 言

这是一本微分几何的人门书，主要讲述三维欧氏空间中曲线和曲面的局部理论。微分几何是一门历史悠久的学科，可以这样说，微积分诞生的时候就同时诞生了微分几何，几何学的发展史就是空间的发展史。例如，非欧几何的发现是否定欧氏几何的平行公理而得到一种新的几何空间，从而产生的新的几何学.它说明欧氏几何的平行公理不是空间所固有的性质，而是加在空间上的先验性假定，这使得空间的概念有了革命性的突破。而笛卡尔坐标的引进，使得代数方法进人几何学，产生了解析几何，为用微积分研究几何与拓扑铺平了道路。欧氏空间的曲线与曲面本身也是一种空间，把它们抽象推广就得到不依赖于外围空间的微分流形。

近年来，微分几何对数学中其他分支的影响越来越深，正在不断地渗透到各个专业领域，与此同时，这门学科本身从内容到方法上也在不断更新。为了适应这种需要，根据我们多年的教学经验，按照当今的教材改革的要求，编写并出版了这本《微分几何》教材。

学习本书必需的数学基础是微积分、线性代数和常微分方程，这是一般理工科大学生都具备的。全书设计讲授时数为70学时左右，如学时少于70学时，可根据自己学校的实际情况对教材内容酌情增减。本书编写时已注意到各章节的独立性，各章后均附有习题，教师可配合布置习题，安排学生课后学习环节。

本书共分六章：第一章预备知识，第二章曲线论，第三章曲面的第一基本形式，第四章曲线的第二基本形式，第五章曲面论基本定律，第六章曲面上的测地线。其中第一章、第四章、第七章由（甘肃建筑职业技术学院）郭胜红同志编写；第二章由（甘肃建筑职业技术学院）韩灵娟同志编写；第三章由（甘肃建筑职业技术学院）张来彩同志编写；第五章、第六章由（甘肃建筑职业技术学院）巩军胜同志编写。全书由郭胜红同志统稿.本书的编写工作得到了本人所在单位教务处和院长的大力支持，他们对本书提供了许多宝贵的建议和意见，这里一并表示感谢。

由于作者的水平有限，本书的编写又比较仓促，缺点和错误在所难免，恳请读者提出意见和建议，以期修订时改进完善。

编者

2016 年 6 月

# 目 录

# 绪 论

微分几何是运用微积分的理论研究空间的几何性质的数学分支学科。古典微分几何研究三维空间中的曲线和曲面，而现代微分几何开始研究更一般的空间——流形。微分几何与拓扑学等其他数学分支有紧密的联系，对物理学的发展也有重要影响。爱因斯坦的广义相对论就以微分几何中的黎曼几何作为其重要的数学基础。

## 微分几何的历史

微分几何的产生和发展是和微积分密切相连的。在这方面，第一个做出贡献的是瑞士数学家欧拉(L. Euler)。1736 年，他首先引进了平面曲线的内在坐标这一概念，即以曲线弧长这一几何量作为曲线上点的坐标，从而开始了曲线的内在几何的研究。十九世纪初，法国数学家蒙日(G. Monge)首先把微积分应用到曲线和曲面的研究中去，并于 1807 年出版了他的《分析在几何学上的应用》一书，这是微分几何最早的一本著作。在这些研究中，可以看到力学、物理学与工业的日益增长的要求是促进微分几何发展的因素。

1827 年，德国数学家高斯发表了《关于曲面的一般研究》的著作，这在微分几何的历史上有重大的意义，它的理论奠定了曲面论的基础。高斯抓住了微分几何中最重要的概念和根本性的内容，建立了曲面的内蕴几何学。其主要思想是强调了曲面上只依赖于第一基本形式的一些性质，例如曲面上曲线的长度、两条曲线的夹角、曲面上的某一区域的面积、测地线、测地曲率和总曲率等等。

1854 年，德国数学家黎曼(B. Riemann)在他的就职演讲中将高斯的理论推广到 n 维空间，这就是黎曼几何的诞生。其后许多数学家，包括 E. Beltrami，E. B. Christoffel，R. Lipschitz，L. Bianchi，T. Ricci 开始沿着黎曼的思路进行研究。其中，Bianchi 是第一个将“微分几何”作为书名的作者。

1870 年，德国数学家克莱因(Felix Klein)在德国埃尔朗根大学作就职演讲时，阐

述了他的《埃尔朗根纲领》，用变换群对已有的几何学进行了分类。在《埃尔朗根纲领》发表后的半个世纪内，它成了几何学的指导原理，推动了几何学的发展，导致了射影微分几何、仿射微分几何、共形微分几何的建立。特别是射影微分几何起始于1878年阿尔方的学位论文，后来1906年起经以威尔辛斯基为代表的美国学派所发展，1916年起又经以富比尼为首的意大利学派所发展。在仿射微分几何方面，布拉施克（W。Blaschke）也做出了决定性的工作。

法国数学家E·嘉当在微分几何中强调联络的概念，建立了外微分的概念。这是整体微分几何的奠基性的工作。随后，中国数学家陈省身从外微分的观点出发，推广了曲面上的高斯—博内定理。从此微分几何成为现代数学不可缺少的领域。

## 基本内容

微分几何学以光滑曲线（曲面）作为研究对象，所以整个微分几何学是由曲线的弧线长、曲线上一点的切线等概念展开的。既然微分几何是研究一般曲线和一般曲面的有关性质，则平面曲线在一点的曲率和空间的曲线在一点的曲率等，就是微分几何中重要的讨论内容，而要计算曲线或曲面上每一点的曲率就要用到微分的方法。

在曲面上有两条重要概念，就是曲面上的距离和角。比如，在曲面上由一点到另一点的路径是无数的，但这两点间最短的路径只有一条，叫做从一点到另一点的测地线。在微分几何里，要讨论怎样判定曲面上一条曲线是这个曲面的一条测地线，还要讨论测地线的性质等。另外，讨论曲面在每一点的曲率也是微分几何的重要内容。

在微分几何中，为了讨论任意曲线上每一点邻域的性质，常常用所谓“活动标形的方法”。对任意曲线的“小范围”性质的研究，还可以用拓扑变换把这条曲线“转化”成初等曲线进行研究。

在微分几何中，由于运用数学分析的理论，就可以在无限小的范围内略去高阶无穷小，一些复杂的依赖关系可以变成线性的，不均匀的过程也可以变成均匀的，这些都是微分几何特有的研究方法。

## 应用与影响

近代由于对高维空间的微分几何和对曲线、曲面整体性质的研究，使微分几何和拓扑学、变分学、李群理论等有了密切的关系，这些数学领域和微分几何互相渗透，已成为现代数学的中心课题之一。

微分几何在力学和一些工程技术问题方面有广泛的应用。比如，在弹性薄壳结构方面，在机械的齿轮啮合理论应用方面，都充分应用了微分几何学的理论。

微分几何学的研究对数学其他分支以及力学、物理学、工程学等的影响是不可估量的。如：伪球面上的几何与非欧几何有密切关系；测地线和力学、变分学、拓扑学等有着深刻的联系，是内容丰富的研究课题。这方面有以 J. 阿达马、H. 庞加莱等人为首的优异研究。极小曲面是和复变函数论、变分学、拓扑学关系极为深刻的研究领域，K. 魏尔斯特拉斯、J. 道格拉斯等人作出过卓越贡献。

微分几何学的研究工具大部分是微积分学。力学、物理学、天文学以及技术和工业的日益增长的要求则是微分几何学发展的重要因素。尽管微分几何学主要研究三维欧几里得空间中的曲线、曲面的局部性质，但它形成了现代微分几何学的基础则是毋庸置疑的。因为依赖于图形的直观性及由它进行类推的方法，即使在今天也未失其重要性。

# 第1章 预备知识

## §1.1 向量空间

定义 1.1.1：设 $u,v,w\in V,\alpha,\beta\in R$. 若集合 $V$ 满足如下：

①$u+v=v+u$（交换律）；

②$(u+v)+w=u+(v+w)$（结合律）；

③$u+0=u$（存在零元）；

④$u+(-u)=0$；

⑤$1\cdot u=u$；

⑥$(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$；

⑦$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$；

⑧$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

则称 $V$ 为数域 $R$ 上的向量空间.

若向量空间 $V$ 中存在一组向量 $v_1,v_2\cdots,v_n$，使得 $V$ 中任何向量均可由它们的线性组合表示且表示方法唯一，则称 $v_1,v_2\cdots,v_n$ 为向量空间 $V$ 的一组基底.

举例：$R^n$ 是一个典型的 $n$ 维向量空间. 对于任意一个 $n$ 维向量空间，给定一组基底 $v_1,v_2\cdots,v_n$后，对任意 $v\in V$ 有对应

$$v=\sum_{i=1}^{n}x^i v_i\to(x^1,x^2,\cdots x^n)\in R^n$$

这个对应给出了 $V$ 到 $R^n$ 的同构.

向量空间 $V$ 上的内积是一个双线性函数$(\cdot,\cdot)$：$V\times V\to R^n$ 满足：

①$(v,w)=(w,v)$；

②$(v,v)\geqslant 0$，且$(v,v)=0$当且仅当$v=0$；

定义了内积的向量空间称为欧氏向量空间，记作$(V,(\cdot,\cdot))$. 欧氏向量空间的任一组基底，可经过 Schmidt 正交化，得到一组标准正交基底$e_1,e_2\cdots,e_n$，它们满足：

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

在$R^n$上，可以定义内积：设$v=(x^1,x^2,\cdots x^n)$，$w=(y^1,y^2,\cdots y^n)\in R^n$

$$(v,w)=x^1y^1+x^2y^2+\cdots+x^ny^n. \tag{1.1.1}$$

类似地，我们可以建立$n$维欧氏空间与具有如上内积的$R^n$的同构.

在$R^3$中记其标准正交基底为$i=(1,0,0)$，$j=(0,1,0)$，$k=(0,0,1)$.

对$v=(x^1,x^2,x^3)$，$w=(y^1,y^2,y^3)\in R^3$定义它们的外积为：

$$v\wedge w=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} \tag{1.1.2}$$

两向量的外积仍是向量，它满足反交换律，但不满足结合律.

$R^3$中的三个向量$v_1,v_2,v_3$，可以定义其混合积：

$$(v_1,v_2,v_3)=(v_1,v_2\wedge v_3). \tag{1.1.3}$$

它表示这三个向量张成的平行六面体的有向体积.

①$v_1\wedge(v_2\wedge v_3)=(v_1,v_3)v_2-(v_1,v_2)v_3$；

②(Lagrange 恒等式)

$(v_1\wedge v_2,v_3\wedge v_4)=(v_1,v_3)(v_2,v_4)-(v_1,v_4)(v_2,v_3)$；

③$(v_1,v_2,v_3)=(v_2,v_3,v_1)=(v_3,v_1,v_2)$.

## §1.2 三维欧氏空间中的标架

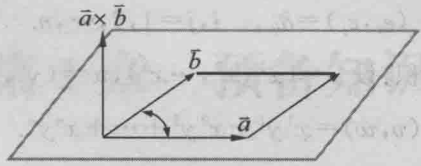
### 一、向量代数

向量即有向线段：$\overline{AB}$，$r$，$\vec{r}$. 向量相等的定义：大小和方向. 零向量：$\vec{0}$. 反向量：$-\vec{a}$.

向量的线性运算. 加法：三角形法则，多边形法则. 向量的长度. 三角不等式. 数乘.

内积的定义：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$　外积的定义.

二重外积公式：$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$；$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$




内积的基本性质：对称性，双线性，正定性. 外积的基本性质：反对称性，双线性.

## 二、标架

仿射标架$\{O;\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}\}$.

正交标架（即右手单位正交标架）：$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. 笛卡尔直角坐标系. 坐标.

内积和外积在正交标架下的计算公式. 两点距离公式.

三维欧氏空间 $E^3$ 和 $R^3$.

## 三、正交标架流形

取定一个正交标架$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$（绝对坐标系）. 则任意一个正交标架$\{P;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$被 $P$ 点的坐标和三个基向量$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的分量唯一确定：

$$\begin{cases}\overline{OP}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\\ \vec{e}_1=a_{11}\vec{i}+a_{12}\vec{j}+a_{13}\vec{k},\\ \vec{e}_2=a_{21}\vec{i}+a_{22}\vec{j}+a_{23}\vec{k},\\ \vec{e}_3=a_{31}\vec{i}+a_{32}\vec{j}+a_{33}\vec{k}.\end{cases}\tag{1.2.1}$$

其中 $a=(a_1,a_2,a_3)$可以随意取定，而 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$应满足

$$\sum_{k=1}^{3}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}\ ,\tag{1.2.2}$$

即过渡矩阵 $A=(a_{ij})$是正交矩阵. 又因为 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 是右手系，$\det A=1$，即矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in SO(3)\tag{1.2.3}$$

是行列式为 1 的正交矩阵. 我们有一一对应：

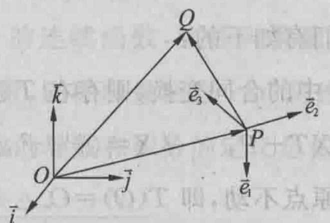
$$\{\text{正交标架}\} \longleftrightarrow E^3 \times SO(3),\ \{P;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} \longleftrightarrow (a,A).$$

所以正交标架的集合是一个 6 维流形.

## 四、正交坐标变换与刚体运动,等距变换

空间任意一点 $Q$ 在两个正交标架 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 和 $\{P;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 中的坐标分别为 $(x,y,z)$ 和 $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$,则两个坐标之间有正交坐标变换关系式:

$$\begin{cases} x=a_1+\tilde{x}a_{11}+\tilde{y}a_{21}+\tilde{z}a_{31}, \\ y=a_2+\tilde{x}a_{12}+\tilde{y}a_{22}+\tilde{z}a_{32}, \\ z=a_3+\tilde{x}a_{13}+\tilde{y}a_{23}+\tilde{z}a_{33}. \end{cases} \tag{1.2.4}$$




如果一个物体在空间运动,不改变其形状和大小,仅改变其在空间中的位置,则该物体的这种运动称为刚体运动.

在刚体运动 $\sigma: E^3 \to E^3$ 下,若 $\sigma$ 将正交标架 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 变为 $\{P;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$,则空间任意一点 $Q(x,y,z)$ 和它的像点 $\tilde{Q}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$(均为在 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 中的坐标)之间的关系式为

$$\begin{cases} \tilde{x}=a_1+xa_{11}+ya_{21}+za_{31}, \\ \tilde{y}=a_2+xa_{12}+ya_{22}+za_{32}, \\ \tilde{z}=a_3+xa_{13}+ya_{23}+za_{33}. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

**定理 1.2.1**　$E^3$ 中的刚体运动把一个正交标架变成一个正交标架;反过来,对于 $E^3$ 中的任意两个正交标架,必有 $E^3$ 的一个刚体运动把其中的一个正交标架变成另一个正交标架.

空间 $E^3$ 到它自身的、保持任意两点之间的距离不变的变换 $\sigma: E^3 \to E^3$ 称为等距变换.

刚体运动是等距变换,但等距变换不一定是刚体运动. 一般来说,等距变换是一个刚体运动,或一个刚体运动与一个关于某平面的反射的合成(复合映射).

仿射坐标变换与仿射变换.

## 五、合同变换

在正交标架下，$E^3$ 中的两点 $P(x^1,x^2,x^3)$ 和 $Q(y^1,y^2,y^3)$ 间的距离定义为：

$$d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i-y^i)^2}. \tag{1.2.6}$$

$E^3$ 到其自身的一一对应称为变换；如果变换 $T$ 保持空间中任意两点的距离，即对任意 $P,Q\in E^3$，$d(T(P),T(Q))=d(P,Q)$，则称 $T$ 为 $E^3$ 中的合同变换（或欧氏变换）.

记 $O(3)$ 为 3 阶正交矩阵的全体，则对任意 $T\in O(3)$，$P_0\in E^3$，$T(P)=PT+P_0$，显然是合同变换. 反过来，我们有如下的：

**定理 1.2.2** 设 $T$ 为 $E^3$ 中的合同变换，则存在 $T\in O(3)$ 以及 $P\in E^3$ 使得

$$T(X)=XT+P,\qquad \forall X=(x^1,x^2,x^3)\in E^3. \tag{1.2.7}$$

**证明** 不妨设变换保持原点不动，即 $T(O)=O$.

取 $X\neq O\in E^3$，$t\in(0,1)$，依照合同变换的定义有

$$d(O,tX)=d(T(O),T(tX))=d(O,T(tX))$$

$$d(tX,X)=d(T(tX),T(X)).$$

上两式相加，得

$$\begin{aligned}d(O,tX)=d(O,X)&=d(O,tX)+d(tX,X)\\&=d(O,T(tX))+d(T(tX),T(X)).\end{aligned}$$

从而由三角不等式知，$T(tX)$ 位于 $O$ 和 $T(X)$ 的连线上. 因此存在 $s\in(0,1)$ 使得 $T(tX)=sT(X)$.

另一方面

$$\begin{aligned}td(O,X)=d(O,tX)=d(O,T(tX))&=d(O,sT(X))\\&=sd(O,T(X))=sd(O,X).\end{aligned}$$

可知，$s=t$，记 $T(X)=(t^1(x),t^2(x),t^3(x))$，对 $T(tX)=tT(X)$ 的 $t$ 求微商有

$$t^i(X)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial t^i}{\partial x^j}(tX)x^j,(i=1,2,3)$$

令 $t\to 0$，就得到

$$t^i(X)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial t^i}{\partial x^j}(0)x^j,$$

即 $$T(X)=xT,\quad T=\frac{\partial t^i}{\partial x^j}(0).$$

因此，$T$ 是一个线性变换. 由于 $T$ 保持距离，故 $T\in O(3)$.

## §1.3　向量函数

所谓的向量函数是指从它的定义域 $D$ 到 $R^3$ 中的映射 $\vec{r}:D\to R^3:p\mapsto\vec{r}(p)$.

设有定义在区间 $[a,b]$ 上的向量函数

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

若 $x(t),y(t),z(t)$ 都是 $t$ 的连续函数，则称向量函数 $\vec{r}(t)$ 是连续的；若 $x(t),y(t),z(t)$ 都是 $t$ 的连续可微函数，则称向量函数 $\vec{r}(t)$ 是连续可微的. 向量函数 $\vec{r}(t)$ 的导数和积分的定义与数值函数的导数和积分的定义是相同的，即

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}&=\lim_{\Delta t\to 1}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_1)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right)\\&=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)),t_0\in(a,b),\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

$$\int_a^b\vec{r}(t)dt=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\vec{r}(t'_i)\Delta t_i=\left(\int_a^b x(t)dt,\int_a^b y(t)dt,\int_a^b z(t)dt\right),\tag{1.3.2}$$

其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分割，$\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$，$t'_i\in[t_{i-1},t_i]$，并且 $\lambda=\max\{\Delta t_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$.

向量函数的求导和积分归结为它的分量函数的求导和积分，向量函数的可微性和可积性归结为它的分量函数的可微性和可积性.

**定理 1.3.1（Leibniz 法则）**　假定 $\vec{a}(t),\vec{b}(t),\vec{c}(t)$ 是三个可微的向量函数，则它们的内积、外积、混合积的导数有下面的公式：

(1) $(\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t))'=\vec{a}'(t)\cdot\vec{b}(t)+\vec{a}(t)\cdot\vec{b}'(t)$；

(2) $(\vec{a}(t)\times\vec{b}(t))'=\vec{a}'(t)\times\vec{b}(t)+\vec{a}(t)\times\vec{b}'(t)$；

(3) $(\vec{a}(t),\vec{b}(t),\vec{c}(t))'=(\vec{a}'(t),\vec{b}(t),\vec{c}(t))+(\vec{a}(t),\vec{b}'(t),\vec{c}(t))+(\vec{a}(t),\vec{b}(t),\vec{c}'(t))$.

**定理 1.3.2**　设 $\vec{a}(t)$ 是一个处处非零的连续可微的向量函数，则

(1) 向量函数 $\vec{a}(t)$ 的长度是常数当且仅当 $\vec{a}(t)\cdot\vec{a}'(t)\equiv 0$.

(2)向量函数 $\vec{a}(t)$ 的方向不变当且仅当 $\vec{a}(t)\times\vec{a}'(t)\equiv\vec{0}$.

(3)设 $\vec{a}(t)$ 是二阶连续可微的.如果向量函数 $\vec{a}(t)$ 与某个固定的方向垂直,那么

$$(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))\equiv 0.$$

反过来,如果上式成立,并且处处有 $\vec{a}(t)\times\vec{a}'(t)\neq\vec{0}$,那么向量函数 $\vec{a}(t)$ 必定与某个固定的方向垂直.

**证明** (1) 因为 $(|\vec{a}(t)|^2)'=(\vec{a}(t)\vec{a}(t))'=2\vec{a}(t)\vec{a}'(t)$,所以 $|\vec{a}(t)|$ 是常数 $\Leftrightarrow$ $|\vec{a}(t)|^2$ 是常数 $\Leftrightarrow\vec{a}(t)\cdot\vec{a}'(t)\equiv 0$.

(2)因为 $\vec{a}(t)$ 处处非零,取 $\vec{a}(t)$ 方向的单位向量 $\vec{b}(t)=|\vec{a}(t)|^{-1}\vec{a}(t)$. 则 $\vec{a}(t)=f(t)b(t)$,其中 $f(t)=|\vec{a}(t)|$ 连续可微. 于是

$$\vec{a}(t)\times\vec{a}'(t)=(f(t)\vec{b}(t))\times(f'(t)\vec{b}(t)+f(t)\vec{b}'(t))=f^2(t)\vec{b}(t)\times\vec{b}'(t),\ \forall\ ,t.$$

"$\Rightarrow$"由条件知 $\vec{b}(t)=\vec{c}$ 是常向量,$\vec{b}'(t)=\vec{c}'=\vec{0}$. 从而 $\vec{a}(t)\times\vec{a}'(t)\equiv\vec{0}$.

"$\Leftarrow$"由条件得 $\vec{b}(t)\times\vec{b}'(t)\equiv\vec{0}$,所以 $\vec{b}(t),\vec{b}'(t)$ 处处线性相关.

因为 $\vec{b}(t)$ 是单位向量,处处非零,所以 $\vec{b}'(t)=\lambda(t)\vec{b}(t)$. 用 $\vec{b}(t)$ 作内积,得 $\lambda(t)=\vec{b}(t)\cdot\vec{b}'(t)=\dfrac{1}{2}(\vec{b}(t)\cdot\vec{b}(t))'\equiv 0$. 于是 $\vec{b}'(t)\equiv\vec{0}$,$\vec{b}(t)=\vec{c}$ 是常向量.

(3)设向量函数 $\vec{a}(t)$ 与某个固定的方向垂直,那么有单位常向量 $\vec{e}_1$ 使得 $\vec{a}(t)\cdot\vec{e}_1\equiv 0$. 求导得到 $\vec{a}'(t)\cdot\vec{e}_1\equiv 0$,$\vec{a}''(t)\cdot\vec{e}_1\equiv 0$. 从而 $\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t)$ 共面,$(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))\equiv 0$.

反之,设 $(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))\equiv 0$. 令 $\vec{b}(t)=\vec{a}(t)\times\vec{a}'(t)$. 由条件,$\vec{b}(t)$ 处处非零,且 $\vec{b}'(t)=\vec{a}(t)\times\vec{a}''(t)$ 连续. 根据二重外积公式,

$$\begin{aligned}\vec{b}(t)\times\vec{b}'(t)&=(\vec{a}(t)\times\vec{a}'(t))\times(\vec{a}(t)\times\vec{a}''(t))\\&=(\vec{a}(t),\vec{a}(t),\vec{a}''(t))\vec{a}'(t)-(\vec{a}'(t),\vec{a}(t),\vec{a}''(t))\vec{a}(t)\\&=(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))\vec{a}(t)\equiv 0.\end{aligned}$$

根据已经证明的(2),$\vec{b}(t)$ 的方向不变. 设这个方向为 $\vec{e}_1$. 则 $\vec{b}(t)=|\vec{b}(t)|\vec{e}_1$. 用 $\vec{a}(t)$ 作内积,得

$$|\vec{b}(t)|\vec{a}(t)\cdot\vec{e}_1=\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)=\vec{a}(t)\cdot(\vec{a}(t)\times\vec{a}'(t))\equiv 0.$$

由于 $\vec{b}(t)$ 处处非零,得到 $\vec{a}(t)\cdot\vec{e}_1\equiv 0$,即 $\vec{a}(t)$ 与固定方向 $\vec{e}_1$ 垂直.

函数 $f$ 的梯度

$$grad f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{1.3.3}$$

是一个向量场，引入算子$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，则函数的梯度可记为 $grad f=\nabla f$.

向量场 $F$ 的散度定义为

$$(\nabla,F)\overset{\Delta}{=}divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{1.3.4}$$

向量场 $F$ 旋度定义为：

$$\nabla\wedge F\overset{\Delta}{=}rotF=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{1.3.5}$$

设 $F_1,F_2$ 为向量场，$f,g$ 为函数，则散度和旋度满足：

(1) $$\begin{aligned}(\nabla,fF_1+gF_2))&=(\nabla,fF_1)+(\nabla,gF_2)\\&=f(\nabla,F_1)+(\nabla f,F_1)+g(\nabla,F_2)+(\nabla g,F_2).\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

(2) $$\begin{aligned}\nabla\wedge fF_1+gF_2)&=\nabla\wedge fF_1)+\nabla\wedge gF_2)\\&=\nabla f\wedge F_1+f\nabla\wedge F_1.\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

简言之，散度和旋度均为线性算子，且均为导子.

**命题 1.3.1**

$$(\nabla\wedge\nabla f)=rot(grad)=0,$$

$$(\nabla,\nabla\wedge F)=div(rotF)=0.$$

## 习 题

### 一、填空题

1. 极限$\lim\limits_{t\to 2}[(3t^2+1)\vec{i}-t^3\vec{j}+\vec{k}]=$ ________.

2. 设 $\vec{f}(t)=(\sin t)\vec{i}+t\vec{j}$，$g(t)=(t^2+1)\vec{i}+e^t\vec{j}$，求$\lim\limits_{t\to 0}(\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t))=$ ________.

3. 已知$\int_2^4\vec{r}(t)dt=\{-1,2,3\}$ $\int_4^6\vec{r}(t)dt=\{-2,1,2\}$，$\vec{a}=\{2,1,1\}$，$\vec{b}=\{1,-1,0\}$，则$\int_2^4\vec{a}\times\vec{r}(t)dt+\vec{b}\cdot\int_2^6\vec{a}\cdot\vec{r}(t)dt=$ ________.

4. 已知 $\vec{r}'(t)=\vec{a}$($\vec{a}$ 为常向量)，则 $\vec{r}(t)=$ ________.

5. 已知 $\vec{r}'(t)=t\vec{a}$，($\vec{a}$ 为常向量)，则 $\vec{r}(t)=$ ________.