现代数学基础丛书 168

有限p群构造

（上册）

张勤海 安立坚 著

科学出版社

现代数学基础丛书 168

有限 p 群构造

(上 册)

张勤海 安立坚 著

阜阳师范学院图书馆
★
藏 书

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统介绍自华罗庚和段学复发表第一篇 p 群论文起至今，我国学者在 p 群领域的主要研究成果. 全书分上、下册出版. 上册介绍有限 p 群的基本理论和方法、我国学者在 p 群领域的早期工作、p 群的计数以及几类重要 p 群的分类. 下册介绍交换性较强和正规性较强的 p 群的结构、临界 p 群以及 p 群其他方面的成果.

本书可供高等院校数学专业群论方向的研究生及有关研究人员阅读，也可供数学史研究人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

有限 p 群构造(上册)/张勤海，安立坚著. —北京：科学出版社，2017.5
(现代数学基础丛书；168)
ISBN 978-7-03-052682-3

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①张… ②安… Ⅲ. ①有限群 Ⅳ. ①O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 096451 号

责任编辑：李静科／责任校对：彭　涛
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 5 月第 一 版　开本：720×1000 1/16
2017 年 5 月第一次印刷　印张：21 3/4
字数：411 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》编委会

主　编：杨　乐

副主编：姜伯驹　李大潜　马志明

编　委：（以姓氏笔画为序）

王启华　王诗宬　冯克勤　朱熹平

严加安　张伟平　张继平　陈木法

陈志明　陈叔平　洪家兴　袁亚湘

葛力明　程崇庆

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20 世纪 70 年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经破坏与中断了 10 余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

前　言

素数幂阶的群通常称为有限 p 群, 也简称为 p 群. 从群论诞生起, p 群就受到群论学者的关注. 这是因为它不仅是有限群领域的一个重要研究对象, 而且由著名的 Sylow 定理可知, p 群的结构从根本上影响着有限群的结构, 特别地, 有限非交换单群的结构几乎被它的 Sylow 2 子群的结构所决定. 正是基于此重要性, 2003 年, 随着拟薄单群分类的最终解决, 在有限单群分类最终宣告彻底完成后, p 群研究异常活跃. 研究单群的世界级大师和领军人物 Janko 转为全力研究 p 群, 对 p 群作出了新的重要贡献. 多年来一直研究 p 群的国际领头人, 如 Blackburn、Newman、Mann、Shalev 等也成果频出. p 群专著也先后问世, 2003 年, Leedham-Green 与 McKan 合作出版了 p 群专著. 2008 年与 2011 年, 先是 Berkovich, 之后他与 Janko 合作, 出版了三卷大部头的 p 群专著, 2016 年, 他们又出版了该著的第四、五卷. 由此足见 p 群近年来的活跃程度.

我国在 p 群领域的研究过去是有基础的. 早在 20 世纪三四十年代, 我国著名数学家华罗庚和段学复就做出了引人瞩目的工作, 他们推广了 Kulakoff 定理, 得到了若干新的 p 群计数定理, 特别是段学复对于有交换极大子群的 p 群给出的一个结果被国内外 p 群学者广泛应用. 20 世纪 40 年代末 50 年代初, 叶彦谦给出了交换 p 群的计数公式, 刘声烈研究了导群循环的类为 2 的 p 群. 之后十余年, 国内无 p 群成果问世. 直到 1964 年, 徐明曜在他的本科毕业论文中, 深入研究了正则 p 群, 得到了多项成果, 很多是先于国外的. 比如，该论文第 2 节中得到了正则 p 群的第一个真正意义上的充要条件, 在国外被 Brisley 和 MacDonald 于 1969 年首先发表. 该论文第 4 节第一次给出了一类重要的 p 群, 即奇阶亚循环 p 群的分类. 在国外分别被 King 和 Miech 在 1973 年和 1975 年发表. 由于 “文化大革命”(“文革”), 他的论文未能及时发表, 实属遗憾. 之后 p 群研究又停滞了十余年. 1979 年, 徐明曜在他的研究生毕业论文中, 继续研究 p 群, 在 p 群的幂结构和换位子结构上又取得了若干成果. 后来他改做群与图和置换群, 一做就是二十年. 自 2003 年起，徐明曜被山西师范大学聘为特聘教授, 全职在该校工作并和张勤海教授合作重新开始 p 群研究. 自 2003 年以来, 山西师范大学 p 群团队开始系统地做 p 群研究工作, 在十余年里, 发表 p 群论文 70 余篇. 解决了 p 群中某些老问题, 在 p 群的计数问题和分类问题上获得了丰富的成果, 比如, 给出了华段猜想不成立的反例, 系统研究了内交换 p 群的中心扩张和循环扩张, 分类了 $\mathcal{A}_3$ 群、亚 Hamilton 群、内类 2 群、真子群二元生成的 p 群等重要群类. 其成果被 Berkovich 和 Janko 在其 p 群专著中专

辟一节给予介绍.

另外, 20 世纪 80 年代, 陈重穆对内交换 p 群的刻画以及对某些正则 p 群的幂零类的上界、俞曙霞对 p 群的自同构群的阶、白述伟对具有二极大循环子群的 2 群的分类、王汝楫对 p 群的幂结构、樊恽对初等交换 p 群计数刻画等问题上获得了一些成果, 各自发表了一两篇论文. 进入 20 世纪 90 年代, 俞曙霞、班桂宁、李世荣在 p 群的自同构群等问题上做了大量工作. 21 世纪以来, p 群研究在我国出现了全新的局面. 除了山西师范大学 p 群团队之外, 张继平、刘合国和他们的博士生王玉雷、徐行忠、廖军等在 p 群的自同构群等问题上获得了丰富的成果. 郭秀云和他的博士生王俊新、张小红、赵立博、王娇等, 陈贵云、吕恒和他们的团队成员周伟、曹洪平、徐海静、刘建军等分别在 p 群的刻画及分类等问题上做了大量工作, 获得了许多成果. 此外, 李世荣、王燕鸣、钱国华、黎先华、马玉杰、杜少飞、冀有虎、曾吉文、李天则、郝成功、杨重生、陈顺民、陈彦恒、余大鹏、李金宝、李立莉、张丽华等也先后在 p 群方面做了一些工作.

应该看到的是, 我们的工作与目前的国际先进水平相比还有很大的差距, 国内 p 群研究力量仍很薄弱. 为了尽快赶上国际先进水平, 加快这个方向的研究生培养, 根据 p 群研究和发展的需要, 徐明曜和曲海鹏于 2010 年出版了我国第一部 p 群教材, 这对我国 p 群研究起了很大推动作用. 而本书的编写就是系统介绍自华罗庚与段学复发表第一篇 p 群论文起至今, 我国学者在 p 群领域的主要研究成果, 旨在为 p 群学者提供学习和研究上的便利, 促进 p 群研究的发展. 因而本书既是 p 群研究的专著, 又为 p 群在我国发展历史的研究提供了丰富的素材.

全书分上、下两册. 上册包含前 9 章的内容. 第 1 章先介绍本书经常用到的 p 群中 "特有" 的基本概念, 例如, 幂零类、极小生成元个数、中心积、p 交换、幂群列等. 虽然这里介绍的某些概念在一般有限群中也出现, 但它在 p 群研究中更具有基本性和独特性. 之后介绍 p 群中三个经典的分类定理: 一是具有极大循环子群的 p 群的分类, 二是内交换 p 群的分类, 三是 Hamilton p 群的分类. 本书的大多数工作是沿着这三个定理展开的. 由于 p 群的计数在 p 群研究中的重要性及本书所述的内容, 我们也介绍了几个经典的计数定理. 本章的最后, 介绍了三类重要的 p 群及 p 群的三类重要结构, 旨在使读者对 p 群研究的梗概有大致的了解.

第 2 章和第 3 章主要介绍研究 p 群结构的基本方法. 我们知道, 扩张理论在有限群中占有重要地位, 其重要性有两个: 其一借它可由两个群去构造一个新的群, 其二因有限群存在合成群列, 故知研究有限群的根本问题是确定有限单群与探索扩张理论. 对于 p 群来说, 由于它的合成因子与主因子都是 p 阶循环群, 所以理论上只用循环扩张就可以得到所有的 p 群. 又因为 p 群的中心总是非平凡的, 只用中心扩张也可以得到所有的 p 群. 因而这两种方法是研究 p 群结构的基本方法. 第 2 章详细介绍了 p 群的中心扩张和循环扩张的方法. 为了使读者熟悉和掌握这

两种方法, 我们运用这两种方法重新分类了 p^4 阶群. 另外, 在分类具有某种性质的 p 群时, 判定两个群是否同构的问题是重要的, 有时也是困难的、复杂的, 第 3 章我们介绍判定两个群是否同构的某些基本技巧和方法, 希望能起到抛砖引玉的作用.

我们特别强调, 前 3 章是研究 p 群的最基本的知识和最基本的技巧, 包括使用的某些符号, 它们在本书中起着举足轻重的作用, 是学习和理解本书的内容须臾不可少的. 读者需特别熟悉之.

对于 20 世纪 80 年代以前中国学者在 p 群领域的成果, 就我们收集到的资料, 一是华罗庚和段学复发表的 5 篇论文, 二是叶彦谦、刘声烈的论文各 1 篇, 三是徐明曜在北京大学就读期间的本科与研究生毕业论文, 他的成果发表于 1976~1984 年的国内杂志上. 第 4 章介绍了他们的成果.

从第 5 章起, 每章有一个主题. 第 5 章介绍在华罗庚和段学复、叶彦谦之后, 我国学者在 p 群计数方面取得的成果. 首先介绍曲海鹏和张勤海在华罗庚和段学复早年的一个猜想及其相关问题上所做的工作. 接着介绍樊恽对子群个数最多的 p 群给出的刻画, 这个刻画被 Berkovich 在其 p 群著作中称为 "a nice result". 曲海鹏给出了子群个数次多的 p 群的刻画, 得到了一个被认为是出人意料的结果. 最后介绍了 p 群的一些其他计数结果.

从第 6 章起, 本书的大部分内容介绍子群具有某种特定性质的 p 群的同构分类问题. 在本书中, 子群具有某种特定性质主要围绕子群的交换性和正规性这两个基本性质展开. 由于交换 p 群的结构是清楚的, 因此我们研究的 p 群一般是非交换 p 群. 而最接近交换群的非交换 p 群自然是内交换 p 群, 也称为 $\mathcal{A}_1$ 群, 它可看作交换性 "最好" 或 "最强" 的非交换 p 群. 从 $\mathcal{A}_1$ 群的性质和分类出发, 研究比 $\mathcal{A}_1$ 群更大群类的问题被国内外许多群论学者关注, 形成了 p 群分类问题的一个重要方向. 这类问题我们认为是研究交换性 "较强" 的 p 群问题. 另一方面, 每个子群均正规的非交换 p 群 (即 Hamilton p 群) 可看作是正规性 "最好" 或 "最强" 的非交换 p 群. 把条件 "每个" 削弱为 "部分", 或降低 "正规" 到更弱的条件, 研究比 Hamilton p 群更广的 p 群类的问题也是国内外群论学者研究的热点问题之一. 这类问题我们认为是研究正规性 "较强" 的 p 群问题. 本书的第 6 章至第 13 章的内容可看作是对这两类问题的研究结果介绍.

在本书中我们将看到: 一是换位子运算技巧在 p 群研究中是何等的重要; 二是正像 Janko 在其 p 群专著的序言中指出的, 初等方法在 p 群研究中仍然有很大的潜力, 初等方法仍然是 p 群研究的主要方法; 三是内交换子群在研究 p 群结构中起着基本的作用. 我们也会看到前 3 章的知识和方法如何被充分而有效的使用.

现在我们继续介绍以下各章的主要内容. 第 6 章介绍内交换 p 群的中心扩张. 具体来说, 确定了当 F 为内交换 p 群, N 分别为循环群和初等交换 p 群时 G 的结

构. 该结果由曲海鹏等的 4 篇系列论文完成. 而第 7 章则介绍内交换 p 群的循环扩张. 具体来说, 给出了有内交换极大子群的 p 群的同构分类. 这类群是比 $\mathcal{A}_2$ 群大得多的一类 p 群. 该结果由安立坚、曲海鹏等的长达 100 余页的 5 篇系列论文完成. 第 8 章则是对非交换真子群均二元生成的 p 群的同构分类. 该结果由徐明曜等完成, 这是一类重要的 p 群. Redei、Blackburn、King、Janko 和 Berkovich 等曾先后研究过此类群的特殊情形. 例如, $\mathcal{A}_1$ 群、$\mathcal{A}_2$ 群、亚循环 p 群、真子群都是二元生成的 p 群, 非交换真子群都亚循环的 p 群等都是该类群的特例.

第 9 章首先介绍了 Burnside 一个经典分类结果的推广, 即分类具有指数为 p^i 的循环子群的 p 群. Burnside 分类的是 $i=1$ 的情形, 华罗庚和段学复分类的是 $i=2$ 且 $p\neq 2$ 的情形, 张勤海和李璞金则分类 $i=3$ 且 $p\neq 2$ 的情形. 然后介绍了 $\mathcal{A}_2$ 群和 $\mathcal{A}_3$ 群的分类及其应用, 其中 $\mathcal{A}_3$ 群的分类在 p 群中被称为一个 "old problem". 该问题由张勤海和他的学生以近百页的论文篇幅完成. 需要说明的是, 第 7 章和第 8 章的分类结果在 $\mathcal{A}_3$ 群分类的证明中起了关键作用. 由于篇幅所限, 本章只给出了 $\mathcal{A}_3$ 群的分类框架及分类结果, 而略去了其证明. 第 6 章至第 9 章的内容均可看作是研究交换性 "较强" 的 p 群.

本书是为具有 p 群初等知识的读者编写的, 在 p 群知识上力图做到自包含. 另外, 对于不以英文发表的文献或不易找到的文献, 都列出了其在 MathSciNet 中的编号, 以方便读者查阅该文的摘要. 再者, 在引用前述结果时, 都按章节统一编号. 例如, 命题 1.1.3 指的是第 1 章第 1 节的第 3 个命题.

最后需要说明的是, 虽然本书主要介绍我国学者在 p 群领域的研究成果, 但也列出了与此相关的国外学者在该领域所做工作的简单介绍及相关文献. 另外, 鉴于本书现有的篇幅已过于庞大, 关于 p 群自同构群的成果基本未做涉及和介绍. 我们试图收集我国学者至今为止在 p 群领域所有的论文文献, 如有遗漏, 敬请谅解.

本书的完成有太多的人需要感谢, 有太多感谢的话要说. 首先要感谢的是徐明曜教授, 是他把我们引入 p 群研究领域, 在他的带领下, 山西师范大学的 p 群研究开始起步并得到了蓬勃发展, 获得了丰富成果, 形成了一支专门研究 p 群的队伍, 为 p 群研究作出了贡献. 另外, 他提供了我国数学家早期 p 群研究工作的文献. 本书初稿完成后, 他又仔细地阅读了全书, 提出了宝贵的修改意见. 毫不夸张地讲, 没有他, 这本书的问世是不可能的. 感谢曲海鹏教授, 他在 p 群团队中发挥了重要作用, 在本书写作过程中, 提出了许多建设性的意见, 使本书增色良多. 感谢山西师范大学 p 群团队的王丽芳、宋蕾薇、张军强、李璞金博士, 他们在文献资料上提供了诸多帮助, 并十分认真地、仔细地阅读了全书的初稿, 提出了大量修改意见, 为本书的完成作出了贡献. 感谢上海大学的郭秀云教授及他的博士张小红、赵立博、王娇, 西南大学的陈贵云、吕恒教授, 山西大学靳平教授, 广西大学的俞曙霞、班桂宁教授, 岭南师范学院的李立莉博士, 他们提供了本书所需的有关资料. 感谢国家自

然科学基金十年来的持续资助. 最后, 感谢科学出版社的责任编辑李静科为本书出版所做的辛勤工作.

由于作者水平有限, 不足之处在所难免, 热忱欢迎读者批评指正.

张勤海 安立坚

2016 年 9 月于山西师范大学

目　录

《现代数学基础丛书》序
前言
第 1 章　有限 p 群的基本概念和结果 ······ 1
1.1　换位子及换位子公式 ······ 1
1.2　幂零类 ······ 9
1.3　Burnside 基定理 ······ 10
1.4　上幂群列与下幂群列 ······ 11
1.5　中心积 ······ 12
1.6　p 群的中心与其他基本性质 ······ 13
1.7　内交换 p 群的分类及在 p 群构造中的地位 ······ 14
1.8　有限 Hamilton p 群的分类 ······ 20
1.9　具有一个循环极大子群的 p 群的分类 ······ 21
1.10　p 群计数定理 ······ 23
1.11　三类重要 p 群与 p 群的三类重要结构 ······ 27
第 2 章　有限 p 群的循环扩张和中心扩张 ······ 33
2.1　循环扩张理论 ······ 33
2.2　p 群的循环扩张 ······ 36
2.3　p 群的中心扩张 ······ 37
2.4　p^4 阶群的分类 ······ 41
2.5　满足某种性质的 p 群的一般分类方法 ······ 44
第 3 章　有限 p 群的同构判定 ······ 47
3.1　利用群的不变量区分互不同构的 p 群 ······ 47
3.2　利用同构映射的存在性判定 p 群的同构 ······ 52
第 4 章　中国学者在有限 p 群领域的早期工作 ······ 59
4.1　华罗庚与段学复等中国学者在 p 群领域的工作 ······ 59
4.2　徐明曜在 p 群领域的早期工作 ······ 74
第 5 章　p 群计数的某些结果 ······ 86
5.1　华段猜想及其相关结果 ······ 86
5.2　子群个数较多的 p 群 ······ 101
5.3　子群计数对 p 群的刻画 ······ 109

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

5.4　内交换 p 群的非正规子群的共轭类数 ······ 118
第 6 章　内交换 p 群的中心扩张 ······ 125
6.1　p 阶群被内交换 p 群的扩张 ······ 126
6.1.1　导群循环的情形 ······ 128
6.1.2　导群非循环的情形 ······ 136
6.2　循环 p 群被内交换 p 群的扩张 ······ 142
6.3　初等交换 p 群被内交换 p 群的扩张 ······ 149
6.3.1　p^2 阶初等交换群被内交换 p 群的扩张 ······ 149
6.3.2　p^3 阶初等交换群被内交换 p 群的扩张 ······ 172
第 7 章　内交换 p 群的循环扩张 ······ 182
7.1　至少有两个极大子群为内交换的 p 群 ······ 182
7.1.1　二元生成且至少有两个内交换极大子群的 p 群 ······ 182
7.1.2　三元生成且至少有两个内交换极大子群的 p 群 ······ 185
7.1.3　三元生成导群为 C_p^2 的 p 群 ······ 186
7.1.4　三元生成导群为 C_p^3 的 p 群 ······ 200
7.2　有且仅有一个极大子群为内交换的 p 群 ······ 227
7.2.1　$p \neq 2$ ······ 227
7.2.2　$p = 2$ ······ 235
第 8 章　非交换真子群均二元生成的有限 p 群 ······ 244
8.1　非交换真子群均亚循环的有限 p 群的分类 ······ 244
8.2　真子群均为二元生成的有限 p 群 ······ 245
8.3　二元生成的有交换极大子群的有限 p 群 ······ 247
8.4　非交换子群均二元生成的有限 p 群 (一) ······ 249
8.5　非交换子群均二元生成的有限 p 群 (二) ······ 254
8.6　非交换真子群均二元生成的有限 p 群的分类 ······ 258
第 9 章　$\mathcal{C}_t$ 群和 $\mathcal{A}_t$ 群 ······ 261
9.1　$\mathcal{C}_3$ 群的分类 ······ 262
9.1.1　正则 $\mathcal{C}_3$ 群的分类 ······ 262
9.1.2　非正则 $\mathcal{C}_3$ 群的分类 ······ 269
9.2　$\mathcal{C}_t$ 群的刻画 ······ 280
9.3　$\mathcal{A}_2$ 群的分类 ······ 281
9.4　$\mathcal{A}_3$ 群的分类 ······ 284
9.4.1　有内交换极大子群的 $\mathcal{A}_3$ 群 ······ 286

9.4.2 无内交换极大子群的 $\mathcal{A}_3$ 群 …… 292
9.5 $\mathcal{A}_3$ 群分类的某些应用 …… 308
参考文献 …… 314
索引 …… 325
《现代数学基础丛书》已出版书目 …… 327

第 1 章　有限 p 群的基本概念和结果

在本书中, 我们总假设 p 是素数, 而 p 群指的是素数幂阶的群. 一般来说, 非 p 群研究群的宏观性质和结构, 例如, 判断群的可解性、超可解性、p 幂零性、单性等. 而 p 群则可看作研究群的微观性质和更精细的结构. 因而 p 群有其自身特有的概念、方法和性质, 也有其特有的研究内容. 虽然这里介绍的某些概念在一般有限群中也出现, 但它在有限 p 群研究中更具有基本性和独特性. 本章介绍本书经常用到的有限 p 群 "特有" 的基本概念和结果. 读者若需要更多的群论知识, 可参看 [189], [191] 或 [195]. 若需要更多的 p 群知识, 可参看 [194]. 另外需要说明的是, 本书使用的概念和符号与 [194] 一致. 另外, 如无特别说明, 本书讨论的群均指有限 p 群.

1.1　换位子及换位子公式

描述 p 群结构的主要方式之一是确定它的生成元及定义关系. 因而描述元素之间关系的换位子及它的计算公式, 对于 p 群研究者来说是须臾不可缺少的. 本节介绍本书常用的某些基本公式.

定义 1.1.1　设 G 是群. 对于 $n \geqslant 2$, 定义 G 的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**换位子**如下:

若 $n = 2$, 则 $[a_1, a_2] = a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2$.

若 $n > 2$, 则 $[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}], a_n]$.

定义 1.1.2　设 G 是群, A, B 是 G 的子群. 规定 A, B 的**换位子群**

$$[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle.$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是 G 的子群, $n > 2$, 同样规定

$$[A_1, A_2, \cdots, A_n] = \langle [a_1, a_2, \cdots, a_n] \mid a_i \in A_i \rangle.$$

特别地, 当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = G$ 时, 规定 $G_n = [\underbrace{G, G, \cdots, G}_{n个}]$.

命题 1.1.3　设 G 是群, $a, b, c \in G$. 则

(1) $a^b = a[a, b]$;

(2) $[a, b]^c = [a^c, b^c]$;

(3) $[a, b]^{-1} = [b, a] = [a, b^{-1}]^b = [a^{-1}, b]^a$;

(4) $[ab,c]=[a,c]^b[b,c]=[a,c][a,c,b][b,c]$;

(5) $[a,bc]=[a,c][a,b]^c=[a,c][a,b][a,b,c]$;

(6) (Witt 公式) $[a,b^{-1},c]^b[b,c^{-1},a]^c[c,a^{-1},b]^a=1$;

(7) $[a,b,c^a][c,a,b^c][b,c,a^b]=1$.

证明　(1)—(3) 由定义直接验证.

(4)
$$\begin{aligned}[ab,c]&=(ab)^{-1}c^{-1}abc=(c^{-1})^{ab}c=(a^{-1}c^{-1}a)^bc^b(c^{-1})^bc\\&=(a^{-1}c^{-1}ac)^b[b,c]=[a,c]^b[b,c]\\&=[a,c][a,c,b][b,c].\end{aligned}$$

(5) $[a,bc]=[bc,a]^{-1}=([b,a]^c[c,a])^{-1}=[a,c][a,b]^c=[a,c][a,b][a,b,c]$.

(6) 令 $u=aca^{-1}ba$. 轮换 a,b,c 三字母, 又令 $v=bab^{-1}cb$, $w=cbc^{-1}ac$. 则有

$$\begin{aligned}[a,b^{-1},c]^b&=b^{-1}[a,b^{-1}]^{-1}c^{-1}[a,b^{-1}]cb\\&=b^{-1}ba^{-1}b^{-1}ac^{-1}a^{-1}bab^{-1}cb\\&=(aca^{-1}ba)^{-1}(bab^{-1}cb)=u^{-1}v.\end{aligned}$$

同理有

$$[b,c^{-1},a]^c=v^{-1}w,\qquad [c,a^{-1},b]^a=w^{-1}u.$$

于是

$$[a,b^{-1},c]^b[b,c^{-1},a]^c[c,a^{-1},b]^a=u^{-1}vv^{-1}ww^{-1}u=1.$$

(7) 首先有

$$[a,b^{-1},c]^b=[[a,b^{-1}]^b,c^b]=[b,a,c^b].$$

同理又有

$$[b,c^{-1},a]^c=[c,b,a^c],\qquad [c,a^{-1},b]^a=[a,c,b^a],$$

于是由 Witt 公式有

$$[b,a,c^b][c,b,a^c][a,c,b^a]=1.$$

再互换 a,b 两个字母即得 (7) 式. □

命题 1.1.4　设 G 是群, $A,B\leqslant G$. 则

(1) $[A,B]=[B,A]$;

(2) $[A,B]\trianglelefteq\langle A,B\rangle$;

(3) 若 $A_1 \leqslant A$, $B_1 \leqslant B$, 则 $[A_1, B_1] \leqslant [A, B]$;

(4) $[A, B]^\mu = [A^\mu, B^\mu]$, 其中 $\mu \in \mathrm{End}(G)$;

(5) $[A, B] \leqslant A \iff B \leqslant N_G(A)$;

(6) 若 A, B 都是 G 的正规(或特征, 或全不变)子群, 则 $[A, B]$ 亦然, 并且 $[A, B] \leqslant A \cap B$.

证明 (1) 设 $a \in A, b \in B$. 因为 $[a, b] = [b, a]^{-1} \in [B, A]$, 得 $[A, B] \leqslant [B, A]$. 类似地有 $[B, A] \leqslant [A, B]$. 于是得 $[A, B] = [B, A]$.

(2) 设 $a, a_1 \in A, b, b_1 \in B$. 则由命题 1.1.3 (4), (5) 两式有

$$[a, b]^{b_1} = [a, b_1]^{-1}[a, bb_1] \in [A, B],$$
$$[a, b]^{a_1} = [aa_1, b][a_1, b]^{-1} \in [A, B],$$

于是得 $[A, B] \trianglelefteq \langle A, B \rangle$.

(3) 显然.

(4) 由 $[a, b]^\mu = [a^\mu, b^\mu]$, $\mu \in \mathrm{End}(G)$, 立得结论.

(5) 由

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in A \iff b^{-1}ab \in A$$

立得

$$[A, B] \leqslant A \iff b^{-1}Ab \subseteq A, \ \forall\ b \in B \iff B \leqslant N_G(A).$$

(6) 由 (4) 立得前一结论; 而由 (5), 因 A, B 正规, 即得 $[A, B] \leqslant A \cap B$. □

命题 1.1.5 设 G 是群, $G = \langle M \rangle$, 则

(1) $G_n = \langle [x_1, \cdots, x_n]^g \mid x_i \in M, g \in G \rangle$;

(2) $G_n = \langle [x_1, \cdots, x_n], G_{n+1} \mid x_i \in M \rangle$;

特别地, 若 $G = \langle a, b \rangle$, 则

(3) $G_2 = G' = \langle [a, b]^g \mid g \in G \rangle$;

(4) $G_2 = G' = \langle [a, b], G_3 \rangle$, 于是 G'/G_3 循环.

证明 (1) 显然有 $[x_1, \cdots, x_n] \in G_n$. 若 $n = 1$, 有 $G_1 = G = \langle M \rangle$, 结论成立. 设 $n > 1$, 用对 n 的归纳法, 可假设

$$G_{n-1} = \langle [x_1, \cdots, x_{n-1}]^g \mid x_i \in M, g \in G \rangle.$$

令

$$H = \langle [x_1, \cdots, x_n]^g \mid x_i \in M, g \in G \rangle.$$

显然 $H \trianglelefteq G$. 又因为对任意的 $g \in G$, 也有 $G = \langle M^g \rangle$, 于是由

$$[[x_1, \cdots, x_{n-1}]^g, x_n^g] = [x_1, \cdots, x_n]^g \in H$$

知 G_{n-1} 的任一生成元 $[x_1, \cdots, x_{n-1}]^g$ 与 G 的每个生成元的换位子都在 H 中, 于是 $G_n = [G_{n-1}, G] \leqslant H$. 而 $H \leqslant G_n$ 是明显的.

(2) 注意到

$$[x_1, \cdots, x_n]^g = [x_1, \cdots, x_n][x_1, \cdots, x_n, g],$$

由 (1) 立得 (2).

(3) 取 $M = \{a, b\}$, 注意到 $[b, a] = [a, b]^{-1}$, 由 (1) 得 (3).

(4) 因 $[a, b]^g = [a, b][a, b, g]$, 由 (3) 得 (4). □

对某些特殊的 p 群类有更精细的换位子公式. 例如, 类 2 的群、亚交换群等.

命题 1.1.6 设 G 是幂零类为 2 的群, $x, y, z \in G$. 则

(1) $[xy, z] = [x, z][y, z]$, $[x, yz] = [x, y][x, z]$;

(2) $[x^n, y] = [x, y]^n = [x, y^n]$;

(3) $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.

证明 注意到 $G' \leqslant Z(G)$. 直接验证即得 (1). 对 n 作归纳可得 (2) 和 (3). $n = 1$, 结论显然. 设结论小于 n 时成立. 则

$$\begin{aligned}[x, y]^n &= [x, y][x, y]^{n-1} = [x, y][x^{n-1}, y] \\ &= [x, y]x^{1-n}y^{-1}x^{n-1}y = x^{1-n}[x, y]y^{-1}x^{n-1}y \\ &= x^{1-n}x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}x^{n-1}y = x^{-n}y^{-1}x^n y = [x^n, y].\end{aligned}$$

同理, $[x^n, y] = [x, y^n]$.

$$\begin{aligned}(xy)^n &= (xy)(xy)^{n-1} = (xy)x^{n-1}y^{n-1}[y, x]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \\ &= xx^{n-1}y[y, x^{n-1}]y^{n-1}[y, x]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \\ &= x^n y^n [y, x]^{n-1}[y, x]^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \\ &= x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}}.\end{aligned}$$

□

为叙述下面的命题, 我们引进下述记号: 设 N 是群 G 的正规子群, 我们以 $a \equiv b(\bmod N)$ 表示 a, b 属于 N 的同一陪集, 即 $aN = bN$.

命题 1.1.7 设 G 是任意群, n 是正整数. 又设 $a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n, b_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 则

(1) $[a_1, \cdots, a_i b_i, \cdots, a_n] \equiv [a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n][a_1, \cdots, b_i, \cdots, a_n] \pmod{G_{n+1}}$;

(2) $[a_1, \cdots, a_i^{-1}, \cdots, a_n] \equiv [a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n]^{-1} \pmod{G_{n+1}}$;

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com