普通高等院校公共基础课程系列教材

工程数学

积分变换

汪宏远　孙立伟　主编
邢志红　主审

清华大学出版社

普通高等院校公共基础课程系列教材

积分变换

汪宏远　孙立伟　主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换这两类积分变换的基本概念、性质及应用.每章章末都配有精选的习题和测试题,方便读者检验学习效果.书中性质等相关证明过程详细,注重数学思想、方法和技巧的运用,有利于培养灵活多样、举一反三的科学素养.书末附有常用函数的积分变换简表,可供学习时查用.

本书可供高等学校理工科相关专业作为教材使用,也可作为任课教师的教学参考书,还可供有关工程技术人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

积分变换/汪宏远,孙立伟主编.—北京:清华大学出版社,2017
(普通高等院校公共基础课程系列教材)
ISBN 978-7-302-48089-1

Ⅰ.①积…　Ⅱ.①汪…　②孙…　Ⅲ.①积分变换—高等学校—教材　Ⅳ.①O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 201866 号

责任编辑: 吴梦佳
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 袁　芳
责任印制: 沈　露

出版发行: 清华大学出版社
网　　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址: 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编:** 100084
社 总 机: 010-62770175　　**邮　　购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载: http://www.tup.com.cn,010-62770175-4278
印 装 者: 北京泽宇印刷有限公司
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 185mm×260mm　　**印　　张:** 6.5　　**字　　数:** 148 千字
版　　次: 2017 年 9 月第 1 版　　**印　　次:** 2017 年 9 月第 1 次印刷
印　　数: 1～2000
定　　价: 22.00 元

产品编号:076658-01

前言

积分变换是高等学校理工科的一门重要的专业基础理论课程，它不仅是学习后续专业课程和在各学科领域中进行科学研究及实践的必要基础，而且在培养符合现代社会发展的高素质应用型人才方面起着重要作用. 为适应教学及课程改革发展的新形势，编者按照高等学校理工类积分变换课程的教学基本要求，精心策划，组织在教学一线多年的教师编写此书.

在编写过程中，编者参考了国内外众多同类优秀教材和书籍，借鉴和吸收相关成果. 尽可能用直观、形象的方法来讲解数学概念，并结合工程技术上的实例来理解数学概念的本质内容. 力求做到由浅入深，循序渐进，通俗易懂，突出重点，论证详细，注重数学思想、方法和技巧的运用，注重培养学生运用数学工具解决实际问题的能力和创新能力，有利于培养学生灵活多样、举一反三的科学素养.

本书的主要特点如下.

(1) 知识脉络清晰，结构合理.

(2) 既注重基础应用，又面向专业拓展.

(3) 计算方法多样，论证详细，培养学生举一反三的能力.

(4) 每章末除精心选配习题外，还附有测试题，参考答案见清华大学出版社官方网站，方便学生自我检测学习效果.

(5) 为满足不同专业、不同层次学生的需要，书中部分内容标记“*”，可根据需求自由选学.

(6) 书末附有积分变换简表，以备需要时查用.

阅读本书需要具备一定的高等数学和复变函数的知识. 本书可供高等学校理工科相关专业作为教材使用，也可作为任课教师的教学参考书，还可供有关工程技术人员参考使用.

本书中，孙立伟编写了第一章，汪宏远编写了第二章，邢志红为主审. 本书的编写和出版得到了学校相关部门、同行和出版社的大力支持与帮助，谨在此表示诚挚的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在缺点与不妥之处，敬请读者多提宝贵意见.

编 者

2017 年 4 月

目录

引　言

在自然科学和工程技术中，为把较复杂的运算简单化，人们常常采用变换的方法.如17世纪，航海和天文学积累了大批观测数据，需要对它们进行大量的乘除运算.在当时，这是非常繁重的工作，为克服这个困难，1614年纳皮尔(Napier)发明了对数，它将乘除运算转化为加减运算，通过两次查表，便完成了这一艰巨的任务.

18世纪，微积分学中，人们通过微分、积分运算求解物体的运动方程.到了19世纪，英国著名的无线电工程师海维赛德(Heaviside)为求解电工学、物理学领域中的线性微分方程，逐步形成了一种所谓的符号法，后来就演变成了今天的积分变换法.即通过积分运算把一个函数经过某种可逆的积分方法变成另一个函数.在工程数学里，积分变换能够将分析运算(如微分、积分)转化为代数运算，简单、快速地完成复杂、耗时的运算.正是积分变换的这一特性，使得它在微分方程、偏微分方程的求解中成为重要的方法之一.

积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中，而且在其他自然科学和各种工程技术领域中都有着广泛的应用.

第一章 傅里叶变换

傅里叶变换(Fourier 变换)是一种对连续时间函数的积分变换,通过特定形式的积分建立函数之间的对应关系.它既能简化计算(如解微分方程或化卷积为乘积等),又具有明确的物理意义(从频谱的角度来描述函数的特征),因而在许多领域被广泛地应用.

第一节 傅里叶变换概述

一、周期函数 $f_T(t)$ 的傅里叶级数

在高等数学中,我们学习了傅里叶级数,知道若 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的周期函数,并且 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷(Dirichlet)条件,即在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足:

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 至多只有有限个极值点.

则在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 内,函数 $f_T(t)$ 可以展成傅里叶级数.

在 $f_T(t)$ 的连续点处,级数的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t). \tag{1.1}$$

其中,$\omega=\frac{2\pi}{T}$, $a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{d}t$, $a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$, $n=1,2,3,\cdots$, $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$, $n=1,2,3,\cdots$.

为今后应用上的方便,下面将傅里叶级数的三角形式即式(1.1)转化为复指数形式.根据欧拉(Euler)公式:

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2},$$

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2\mathrm{j}}.$$

可得

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right).$$

可令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{d}t,$$

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{j}b_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

易知 c_0, c_n, c_{-n} 可以用一个式子表达，即

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

如果令

$$\omega_n = n\omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots,$$

则式(1.1)可变为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + \frac{a_n + \mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n t}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t},$$

或者

$$f_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n \tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}. \tag{1.2}$$

这就是傅里叶级数的复指数形式.

二、非周期函数 $f(t)$ 的傅里叶积分

下面讨论非周期函数的展开问题. 如图 1.1 所示，T 越大，$f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围越大，这表明任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T \to +\infty$ 时转化而来的，即

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n \tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.$$

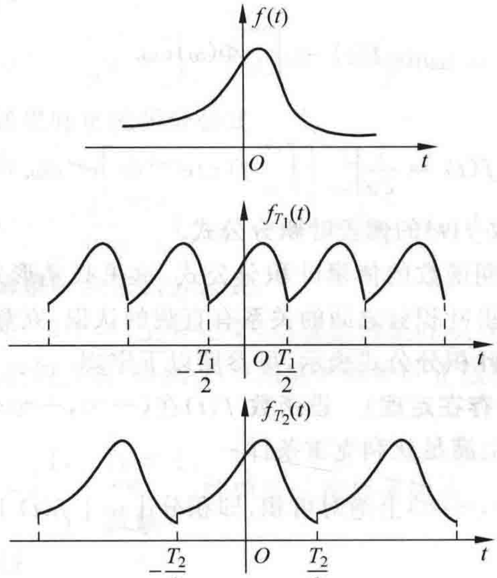

图 1.1

易知，当 n 取遍所有整数时，ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上，如图 1.2 所示.

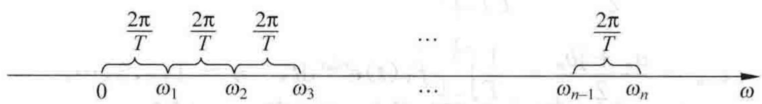

图 1.2

令 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}, \Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=n\omega-(n-1)\omega=\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.

当 $T\to+\infty$ 时，$\Delta\omega_n\to0$，于是

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}\Delta\omega_n.$$

当 t 固定时，易知 $\dfrac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}$ 是 ω_n 的函数，记为 $\Phi_T(\omega_n)$，即

$$\Phi_T(\omega_n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}.$$

于是

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega_n.$$

当 $T\to+\infty, \Delta\omega_n\to0, \Phi_T(\omega_n)\to\Phi(\omega_n)$ 时，其中

$$\Phi(\omega_n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}.$$

于是，$f(t)$ 可看作是函数 $\Phi(\omega_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega_n)d\omega_n.$$

令 $\omega=\omega_n$，有

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)d\omega.$$

整理得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega.$$

实际上，这就是非周期函数 $f(t)$ 的**傅里叶积分公式**.

上述分析推导了非周期函数的傅里叶积分公式，这里只是形式上的推导，其目的在于让读者对傅里叶级数和傅里叶积分之间的关系有直观的认识，究竟一个非周期函数 $f(t)$ 满足什么条件才可以用傅里叶积分公式表示，可参照以下定理.

定理 1.1(傅里叶积分存在定理) 设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件：

(1) 在任意有限区间上满足狄利克雷条件；

(2) 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛.

则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \tag{1.3}$$

成立，左端函数 $f(t)$ 在它的间断点 t 处，应以 $f(t)=\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ 代替.

这个定理的条件是充分的，证明需要较多的基础知识，这里从略.

式(1.3)为复指数形式，为后面应用方便，还需要将其转换成三角形式. 利用欧拉公式可得

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)[\cos\omega(t-\tau)+\mathrm{j}\sin\omega(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega+\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 是 ω 的奇函数，于是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega=0$. 又 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 是 ω 的偶函数，于是

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega. \tag{1.4}$$

这就是 $f(t)$ **的傅里叶积分的三角形式**.

根据式(1.4)，有

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\cos\omega t\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\sin\omega t\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

于是，若 $f(t)$ 为奇函数，则有

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega. \tag{1.5}$$

称式(1.5)为函数 $f(t)$ 的**傅里叶正弦积分公式**.

若 $f(t)$ 为偶函数，则有

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega. \tag{1.6}$$

称式(1.6)为函数 $f(t)$ 的**傅里叶余弦积分公式**.

特别的，如果 $f(t)$ 仅在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且满足傅里叶积分存在条件，则可根据傅里叶级数中的奇延拓或偶延拓的方法，得到 $f(t)$ 相应的傅里叶正弦积分表达式或傅里叶余弦积分表达式.

例 1.1 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的傅里叶积分表达式.

解：根据式(1.3)，可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}(\cos\omega\tau - \mathrm{j}\sin\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega,\quad t \neq \pm 1.$$

当 $t=\pm 1$ 时，$f(t)$应以$\dfrac{f(\pm 1+0)+f(\pm 1-0)}{2}=\dfrac{1}{2}$代替.

事实上，本例中 $f(t)$为偶函数，还可以通过式(1.6)获得结果，过程如下：

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega,\quad t \neq \pm 1.$$

根据本例结果，我们可以得到一个广义积分的结果

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}f(t) = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

当 $t=0$ 时，便可得到著名的狄利克雷积分，即

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}.$$

三、傅里叶变换的概念

在式(1.3)中，设

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t, \tag{1.7}$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{1.8}$$

这样，$f(t)$和 $F(\omega)$通过特定的积分就可以相互表达. 我们称式(1.7)为 $f(t)$的傅里叶变换，记为 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$F(\omega)$叫作 $f(t)$的象函数；称式(1.8)为 $F(\omega)$的傅里叶逆变换，记为 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$，$f(t)$叫作 $F(\omega)$的象原函数.

根据上述定义，也可以说 $f(t)$和 $F(\omega)$构成了一个傅里叶变换对，它们有相同的奇偶性.

当 $f(t)$为奇函数时，根据式(1.5)，有

$$F_s(\omega) = \int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t, \tag{1.9}$$

叫作 $f(t)$的**傅里叶正弦变换**. 而

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega, \tag{1.10}$$

叫作 $F(\omega)$的**傅里叶正弦逆变换**.

当 $f(t)$为偶函数时，根据式(1.6)，有

$$F_c(\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t, \tag{1.11}$$

叫作 $f(t)$的**傅里叶余弦变换**. 而

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega, \tag{1.12}$$

叫作 $F(\omega)$的**傅里叶余弦逆变换**.

例 1.2 求函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅里叶变换及其积分表达式，其中 $\beta>0$，这个函数 $f(t)$叫作指数衰减函数，是工程技术中常遇到的一个函数.

解：根据式(1.7)，有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}=\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2},$$

这就得到了 $f(t)$的傅里叶变换. 下面求它的傅里叶逆变换，由式(1.8)，有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t+\mathrm{j}\beta\sin\omega t-\mathrm{j}\omega\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

这就是 $f(t)$的积分表达式.

利用此结果还能得到一个含参广义积分的结果：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\pi f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\quad(\beta>0).\\ \pi\mathrm{e}^{-\beta t}, & t>0,\end{cases}$$

例 1.3 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & t\geqslant 1\end{cases}$ 的傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换.

解：将 $f(t)$进行奇延拓，再根据式(1.9)，有

$$F_s(\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sin\omega t\,\mathrm{d}t=-\left.\frac{\cos\omega t}{\omega}\right|_0^1=\frac{1-\cos\omega}{\omega}.$$

将 $f(t)$进行偶延拓，再根据式(1.11)，有

$$F_c(\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\int_0^1\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\left.\frac{\sin\omega t}{\omega}\right|_0^1=\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

此例说明，同一函数的傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换一般不同.

例 1.4 求函数 $f(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换及其积分表达式，其中 $A>0,\beta>0$，这个函数叫作钟形脉冲函数(又称高斯函数)，也是工程技术中常遇到的一个函数.

解：根据式(1.7)，有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-\beta\left(t^2+\frac{\mathrm{j}\omega}{\beta}t\right)}\,\mathrm{d}t=A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

若令 $s=t+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}$，上式将变为一复变函数的积分，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}^{+\infty+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s.$$

由于 $\mathrm{e}^{-\beta s^2}$ 在复平面处处解析，根据柯西积分公式，沿如图 1.3 所示的封闭曲线 l：矩形 $ABCD$ 积分，有

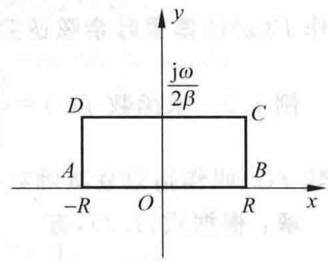

图 1.3

$$\oint_l \mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s=0.$$

于是

$$\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s=0.$$

当 $R\to+\infty$ 时，

$$\int_{AB}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s=\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\,\mathrm{d}t\to\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

$\left(\text{此结果可根据高数结论}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}\text{ 得到.}\right)$

又 $\left|\int_{BC}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s\right|=\left|\int_{R}^{R+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s\right|=\left|\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\beta(R+\mathrm{j}u)^2}\,\mathrm{d}(R+\mathrm{j}u)\right|\leqslant\mathrm{e}^{-\beta R^2}\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}}\left|\mathrm{e}^{\beta u^2-2\mathrm{j}\beta Ru}\right|\mathrm{d}u=$ $\mathrm{e}^{-\beta R^2}\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{\beta u^2}\,\mathrm{d}u\to0.$

同理，$\left|\int_{DA}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s\right|\to0$. 由此，当 $R\to+\infty$ 时，有

$$\int_{BC}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s\to0,\quad\int_{DA}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s\to0.$$

于是

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{CD}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s+\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}=\lim_{R\to+\infty}\left(-\int_{DC}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s\right)+\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}=0,$$

即

$$\int_{-\infty+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}^{+\infty+\frac{\mathrm{j}\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\beta s^2}\,\mathrm{d}s=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

因此，可得钟形脉冲函数 $f(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$.

接下来，我们求其积分表达式. 根据式(1.8)及奇偶函数积分性质，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega=\frac{A}{\sqrt{\pi\beta}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$

这就是它的积分表达式. 由此我们还可以得到一个广义积分的结果

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{\sqrt{\pi\beta}}{A}f(t)=\sqrt{\pi\beta}\,\mathrm{e}^{-\beta t^2}.$$

利用此结果，取 $t=0,\beta=\frac{1}{4}$，可得 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例 1.5 证明：当 $f(t)$ 为奇函数时，$F(\omega)=-2\mathrm{j}F_s(\omega)$.

证：当 $f(t)$ 为奇函数时，根据式(1.7)，有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=-2\mathrm{j}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t.$$

根据式(1.9)，有

$$F(\omega)=-2\mathrm{j}F_s(\omega).$$

同理，当 $f(t)$ 为偶函数时，还有 $F(\omega)=2F_c(\omega)$ 成立.

四、傅里叶变换的物理意义——频谱

在无线电技术、声学、振动理论中，傅里叶变换和频谱概念有着非常密切的关系. 在频谱分析中，时间变量的函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的**频谱函数**，频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为**振幅频谱**(简称为**频谱**). 对于频谱的内容，这里只作简单介绍，有兴趣的读者可以查阅频谱理论的相关书籍.

例 1.6 作如图 1.4 所示的单个矩形脉冲的频谱图.

解：$f(t)=\begin{cases}E, & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

振幅频谱 $|F(\omega)|=2E\left|\dfrac{\sin\dfrac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right|$，于是可得频谱图，如图 1.5 所示.

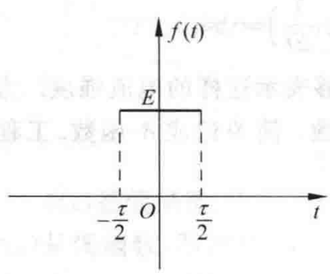

图 1.4

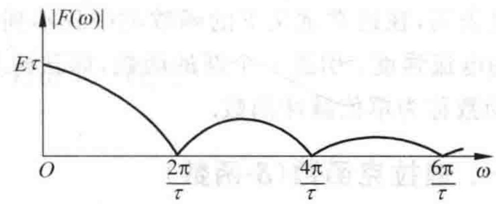

图 1.5

这里只画出了 $\omega\geqslant0$ 的图形，$\omega<0$ 的情况可根据 $|F(\omega)|$ 偶函数的对称性得到，接下来我们说明振幅频谱函数 $|F(\omega)|$ 为偶函数. 实际上，

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\omega t-\mathrm{j}\sin\omega t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right)^2+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right)^2},$$

$$|F(-\omega)|=\sqrt{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(-\omega t)\,\mathrm{d}t\right]^2+\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(-\omega t)\,\mathrm{d}t\right]^2},$$

于是

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|.$$

这就说明了振幅频谱函数$|F(\omega)|$为偶函数.

第二节　单位脉冲函数及其傅里叶变换

在物理和工程技术中,除用到指数衰减函数外,还常常会用到单位脉冲函数.因为在许多物理现象中,除有连续分布的物理量外,还有集中在一点的量(点源),或者具有脉冲性质的量,如瞬间作用的冲击力、电脉冲等.在电学中,要研究线性电路受具有脉冲性质的电势作用后所产生的电流;在力学中,要研究机械系统受冲击力作用后的运动情况等.研究这类问题就会产生单位脉冲函数.

引例　在原来电流为零的电路中,某一瞬时(设为$t=0$)进入一单位电量的脉冲,现在要确定电路上的电流$i(t)$.

以$q(t)$表示上述电路中的电荷函数,则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

由于电流强度是电荷函数对时间的变化率,即当$t\neq 0$时,$i(t)=0$,由于$q(t)$是不连续的,从而在普通导数意义下,$q(t)$在这一点是不能求导数的,但如果我们形式地计算这个导数,则得

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty.$$

这表明,在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够表示这样的电流强度.为确定这样的电流强度,引进一个新的函数,即狄拉克(Dirac)函数,简单记成δ-函数.工程中常将δ-函数称为单位脉冲函数.

一、迪拉克函数(δ-函数)

定义　如果对于任何一个无穷次可微的函数$f(t)$,满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

其中,

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则称$\delta_\varepsilon(t)$的弱极限为δ-函数,记为$\delta(t)$.

对此定义,我们从如下角度来理解.若一个函数满足:

(1) $\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ \infty, & t=0,\end{cases}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = 1.$ (1.14)

则称这个函数为 δ-函数,并记为 $\delta(t)$.

根据式(1.14),可将 δ-函数用一个长度等于 1 的有向线段表示, 这个线段的长度表示 δ-函数的积分值, 称为 δ-函数的强度.

显然,$\delta(t)$已经不属于微积分中所研究的函数类了,因为微积分中所定义的函数,都不会在其定义域内的任何一点处等于∞. 另外,改变有限个点处的函数值不会影响该函数的积分值,就应该有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = 0.$$

但此结果与 δ-函数的定义相矛盾. 这些都说明 δ-函数是一个广义函数,不能用通常意义下"值的对应关系"定义,深入理解这个函数,需要用到超出工科院校工程数学大纲范围的知识,这里不再叙述,有兴趣的同学可参考广义函数论的相关书籍.

二、δ-函数的性质

(1) 筛选性质.

若 $f(t)$为一个无穷次可微的函数,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0). \tag{1.15}$$

证: 根据式(1.13),有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t.$

因为 $f(t)$为一个无穷次可微的函数,根据积分中值定理,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}f(\theta\varepsilon) = f(0) \quad (0<\theta<1).$$

一般地,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0). \tag{1.16}$$

(2) $\delta(t)$是偶函数.

$\delta(t)$是偶函数,即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

证: 令 $\tau=-t$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f(-\tau)(-\mathrm{d}\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f(-\tau)\mathrm{d}\tau = f(0).$$

又根据式(1.15),即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0),$$

可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

于是,结论得证.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t)$. 其中,$u(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ **称为单位阶跃函数.**