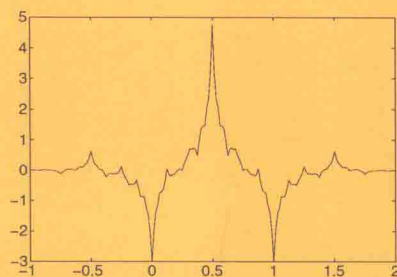
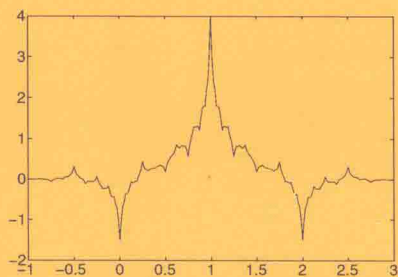
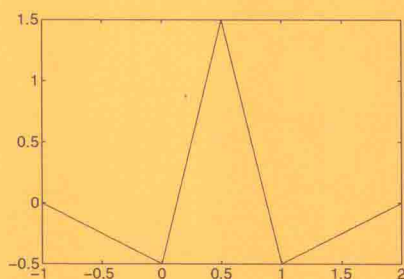
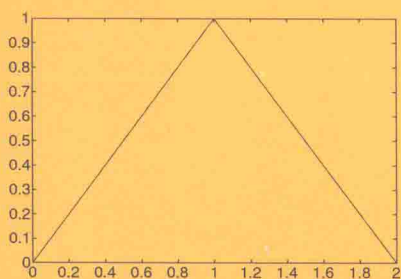


小波与滤波器组设计： 理论及其应用

彭思龙 李保滨 胡晰远 编著



小波与滤波器组设计： 理论及其应用

彭思龙 李保滨 胡晰远 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书的主要内容包括小波和滤波器理论及其应用,其目的在于使读者掌握对于数据处理非常重要的工具——小波与滤波器——的理论及其应用方法。通过本书的学习,读者能够掌握小波分析理论的基本框架和滤波器组设计的基本理论和方法,了解小波分析在图像处理和信号处理中应用的基本技巧,了解小波和滤波器设计学科的前沿发展,为进一步从事数字信号处理和数字图像处理相关的研究和应用打下良好的基础。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

小波与滤波器组设计:理论及其应用/彭思龙,李保滨,胡晰远编著.—北京:清华大学出版社,2017
ISBN 978-7-302-47597-2

I. ①小… II. ①彭… ②李… ③胡… III. ①小波理论—教材 ②滤波器组—设计—教材 IV. ①O174.22
②TN713

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 153457 号

责任编辑:刘 颖
封面设计:常雪影
责任校对:赵丽敏
责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市铭诚印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:20.25 字 数:453 千字

版 次:2017 年 8 月第 1 版 印 次:2017 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~2000

定 价:58.00 元

产品编号:070909-01

前 言

20 世纪 80 年代后期,随着计算机技术的快速发展,对数据尤其是数字图像进行分析的需求越来越强烈,迫切需要新的处理技术跟进.一位来自法国的年轻学者 Mallat 发表了两篇论文,阐述了一种全新的数据表示的思想,就是著名的多尺度分析.从此,围绕这种新思想产生了一门新的学科——小波分析.从小波分析发展的脉络来看,小波分析受到了来自数学和技术两个方面的推动而产生,符合科学发展的基本规律,即便如此,多尺度分析思想的美妙震惊了很多从事理论和技术的科学家.此后,小波分析技术作为一门专门的学科吸引了大量的数学家和计算机技术专家进行深入研究,前后长达 20 年时间,直到 21 世纪初,小波分析的理论和应用得到了长足的发展,形成了相对独立完整的学科分支.

由于小波分析产生于美国,我国直到 1992 年才陆续开始引进国际上相关专著和教材,国内也兴起了一波小波分析方面专著和教材的出版热潮.迄今为止,未经严格统计,专门介绍小波理论或者应用的书籍不下几百部,在很多高校曾经长时间存在小波分析理论或者应用的课程,这些课程一度是最热门课程之一.中科院也是最早开设小波分析课程的单位之一.由于小波分析不同于其他数据分析技术,它具有相对完整而深刻的数学内涵,因此早期课程大多由数学专业的学者进行讲授,但是听课的学生往往是工科同学居多,这就导致深入的数学基础要求所带来的学习和理解上的障碍.后期,有不少工科专业的学者陆续开始讲授小波分析应用类的课程.由于小波分析本身的很多特点都需要借助于数学知识才能得到更好的说明,因此,完全从技术角度讲授小波分析,效果也不是很理想.直到 1996 年,Strang 和 Nguyen 联合出版了一本教材《wavelets and filter banks》,并在麻省理工学院开设了同名课程,该书还被多所知名高校采用作为教材.由于这本书从两个不同角度——理论和应用——讲述了小波分析的内涵:滤波器组和小波分析,解决了以前偏重于数学或者技术的问题,个人以为此教材比较适合于不同背景学生的学习.

从 2001 年开始,我在中科院研究生院(中国科学院大学的前身)采用 Strang 的教材作为蓝本进行教学.教学的过程中发现,此教材理论还是偏多,应用部分讲得比较少,尤其是在小波分析取得重要应用效果的图像处理领域应用更是缺少,因此,讲课时选用了一些比较经典的小波应用于图像处理的文献作为讲课材料.同时,随着课程内容的不断成熟,小波分析领域也逐渐归于平静,很多学者开始用小波分析开展新的数据分析技术的研究.因此,除了在 Strang 的教材基础上增加了系统性的图像处理应用之外,还选编了部分非线性

性信号分析技术，有些内容也是我和我的学生多年科研成果的一部分，作为小波分析前沿以及后继研究的延续，以期给学生们看到学科发展的路线图，并能迅速结合新技术进行他们各自未来课题的研究。

课程开设 15 年以来，听课的学生数量一直较多，总数超过 2000 人，作为基础要求相对较高的一门专业普及课程，多年来一直能够有这么多学生听课，也算是小波分析特有的现象。2010 年超星数字图书馆对我的课程进行了全程录像，并进行了后期制作，配上了字幕，放在超星数字图书馆中供读者观看。迄今为止，观看该教学视频的人数超过 15 万次，对于小波分析技术的普及起到了一定的作用。现在的教材承蒙清华大学出版社刘颖老师的鼓励，将我讲课的讲义进行系统整理，选编了一些新的例题和习题，形成教材的样式。这对于该课程的教学会有较大的帮助。

写书的过程中，由于本人时间关系，邀请了两位年轻的学者李保滨和胡晰远共同参与。李保滨副教授是数学专业出身，就负责了数学要求较高的几个章节的整理（第 1 章至第 6 章），胡晰远副研究员跟我从事多年图像处理的研究，对于小波分析的应用比较熟悉，就负责小波分析应用部分的整理和深化。我本人在写书过程中具体写的反而较少，整理了第 11 章。在此，向他们二位致以感谢，他们作为作者都贡献了大量的精力，为本书的形成做出了巨大贡献。同时，出版社以刘颖老师为代表的老师们的敬业精神也给我们留下深刻的印象，一些很细致的问题得以被发现和改正，向他们致以高度的敬意。尽管如此，本书可能还会存在不足之处，尤其本书的内容体系完全是多年课程的积累，受个人兴趣的影响，难免有些偏颇，也欢迎广大读者提出宝贵建议，在此一并致谢。我们在适当时机也会进行修订，希望贡献更好的教材，为小波分析的发展做出一点微博的贡献。

彭思龙

2017 年 7 月

目 录

第 1 章	引言	1
1.1	信号与采样	1
1.2	傅里叶变换与 Z 变换	5
1.3	小波与滤波器	7
1.4	习题	13
第 2 章	滤波器组	15
2.1	抽取与插值	15
2.2	二通道滤波器组	20
2.2.1	完全重构条件	21
2.2.2	半带滤波器和滤波器构造	23
2.3	多相位矩阵	24
2.4	习题	31
第 3 章	正交滤波器组	33
3.1	仿酉矩阵	33
3.2	滤波器组构造的栅格方法	35
3.3	正交滤波器的构造方法	39
3.4	习题	45
第 4 章	正交小波与多尺度分析	46
4.1	正交多尺度分析	46
4.2	正交小波	49
4.3	Daubechies 小波	60
4.4	Cascade 算法	67
4.5	习题	71

第 5 章	双正交小波与滤波器	72
5.1	双正交小波及其多尺度分析	72
5.2	双正交滤波器组	78
5.3	具有对称性和紧支撑的双正交小波	81
5.4	习题	85
第 6 章	小波滤波器的提升算法	86
6.1	提升算法	86
6.2	双正交滤波器的提升格式分解	90
第 7 章	图像的小波分解及其统计特性	95
7.1	图像的离散小波分解	95
7.2	图像处理中的线性逆问题	98
7.3	马尔可夫随机场初步	100
7.3.1	马尔可夫随机场基本理论	100
7.3.2	马尔可夫随机场与吉布斯分布	102
7.3.3	基于最大后验概率-马尔可夫随机场模型的复原算法介绍	103
7.4	图像小波变换的基本特性	106
7.5	图像在小波域的统计模型	109
7.6	常用参数估计方法介绍	117
第 8 章	小波域图像去噪算法	121
8.1	图像去噪模型介绍	121
8.2	小波域图像去噪的最大后验概率模型	124
8.3	小波域图像去噪的收缩模型	129
8.3.1	小波去噪阈值选择	132
8.3.2	小波阈值去噪背后的原理	138
8.3.3	空间自适应收缩去噪算法	141
8.3.4	伪吉布斯效应和平稳小波阈值去噪	144
8.4	基于样条变换的小波去噪算法	146
8.5	三维变换域联合滤波去噪算法	151
第 9 章	小波域图像复原算法	157
9.1	图像复原模型介绍	157
9.2	小波域稀疏约束图像复原	160

9.3 基于小波域隐马尔可夫树模型的图像复原	164
9.3.1 问题的化简和求解	165
9.3.2 隐马尔可夫树模型参数向量的估计	167
9.3.3 算法描述及实验结果比较	168
9.4 基于小波域相对误差约束的图像复原算法	170
9.4.1 图像去模糊中的振铃现象	170
9.4.2 频率域相对误差	174
9.4.3 基于频率域相对误差的图像去模糊算法	178
第 10 章 小波图像压缩技术	183
10.1 图像编码基础	183
10.2 小波系数的树表示和编码	189
10.3 嵌入式零树小波编码技术	191
10.3.1 零树小波定义	192
10.3.2 零树小波编码	192
10.3.3 零树逐次逼近量化	194
10.3.4 嵌入式零树小波编码算法示例	196
10.4 多级树集合分裂算法	200
10.5 JPEG2000 和 EBCOT 算法简介	206
10.6 多分量预测编码技术介绍	213
10.6.1 图像的多分量预测模型	215
10.6.2 多分量预测编码算法介绍及结果比较	218
第 11 章 几何小波初步	221
11.1 图像模型和最优逼近	222
11.1.1 图像模型	222
11.1.2 最优逼近	223
11.2 Curvelet 变换	225
11.2.1 连续 Curvelet 变换	225
11.2.2 离散 Curvelet 变换	227
11.2.3 Curvelet 变换的奇异性检测	228
11.3 Bandlet	230
11.3.1 几何流	230
11.3.2 几何流的确定	232
11.3.3 Bandlet 的最佳 m -项逼近	232

11.3.4	Bandlet 的应用	233
11.4	Contourlet	235
11.4.1	拉普拉斯金字塔	236
11.4.2	方向滤波器组	237
11.5	几何小波总结	238
第 12 章	稀疏表示与压缩感知介绍	239
12.1	基本概念介绍	239
12.2	匹配追踪介绍	241
12.3	基追踪介绍	248
12.3.1	基追踪算法介绍	249
12.3.2	基于稀疏表示的图像分解	252
12.4	压缩感知介绍	256
12.4.1	压缩感知基本原理	256
12.4.2	压缩感知算法介绍	258
12.4.3	压缩感知应用示例	262
第 13 章	自适应信号分解算法介绍	265
13.1	信号的自适应分解概念	265
13.2	经验模式分解算法	268
13.2.1	经验模式分解算法基础	268
13.2.2	经验模式分解中包络的分析与改进	271
13.2.3	经验模式分解中的模式混叠现象	278
13.3	零空间追踪算法介绍	283
13.3.1	基于微分算子的零空间追踪算法	286
13.3.2	基于微分算子的零空间追踪算法	290
附录 A	数学基础知识	298
A.1	线性空间	298
A.2	线性赋范空间	299
A.3	希尔伯特空间	301
参考文献		305

第 1 章 引 言

小波分析 (wavelet analysis) 是 20 世纪 80 年代发展起来的一门新兴数学分支, 是当今数学领域中一个迅猛发展的新方向, 是 20 世纪数学研究成果中杰出代表之一. 它汲取了诸如泛函分析、数值分析、样条分析、调和分析等众多数学分支的精华, 并又包罗了它们的许多特色; 它是继傅里叶 (Fourier) 分析之后又一重要的数学分析方法, 是调和分析发展史上里程碑式的进展; 它为 20 世纪的现代分析学作了完美的总结. 与传统分析方法相比, 小波分析具有广阔的应用前景, 它给许多相关学科的研究带来了新思想, 并且为工程学提供了一种新的更有效的分析工具; 它反映了大科学时代学科之间相互渗透、交叉、融合的趋势, 是纯粹数学与应用数学及工程技术殊途同归的光辉典范^[1-4].

1.1 信号与采样

在日常生活中, 人们经常接收到来自电视、手机、互联网等多种媒体发布的信息, 为了传播和方便使用, 往往需要将这些信息转换成便于传输和处理的信号, 例如语音、视频信号等. 一般来说, 信号是信息的载体, 是信息的一种物理体现, 表现为随时间变化的某种物理量.

信号的产生、传输和处理是由系统完成的. 系统是指由若干相互关联的事物组合而成、具有特定功能的整体, 例如手机、电视等. 系统的基本作用是对输入的信息、信号进行加工和处理, 转化为所需要的输出信号.

可以用确定的时间函数表示信号. 在连续时间范围内有定义的信号称为连续时间信号, 简称连续信号; 相对应的, 仅在离散的时刻才有定义的信号, 称为离散时间信号, 简称离散信号. 连续信号和离散信号通常分别表示为 $x(t)$ 和 $x(n)$, 这里 t 表示连续时间, n 表示离散的值. 对于 $n \in \mathbb{Z}$, 离散信号 x 通常记为

$$x = [\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots] \quad \text{或者} \quad x = \begin{bmatrix} \vdots \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

图 1.1(a) 给出了连续信号 $\cos t$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$ 的图形, 图 1.1(b) 中的离散信号为 e^n , $n = 0, 1, \dots, 10$.

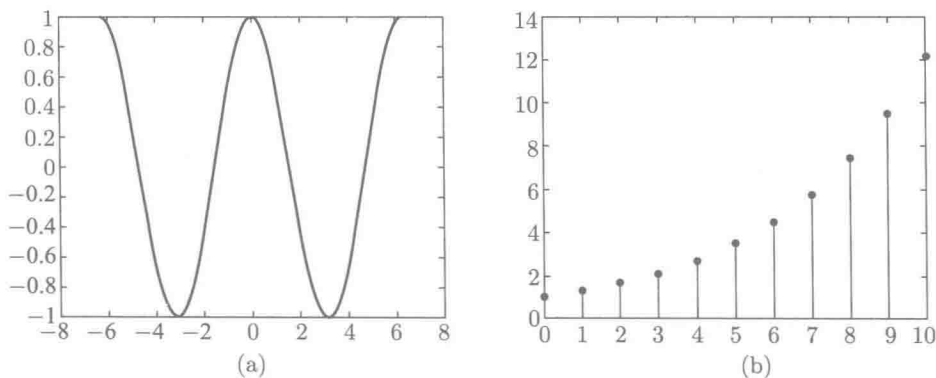


图 1.1 连续信号 (a) 和离散信号 (b)

单位脉冲信号 $\delta(n)$ 是一类比较特殊的信号, 其定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

也就是说, 该信号在 $n = 0$ 处值为 1, 其他处的值都为 0 (如图 1.2(a) 所示). 由定义可知, 对于任意的信号 $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, 都有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \delta(n) = x(0).$$

通过对信号平移 n_0 , 我们可以得到 $\delta(n - n_0)$, 该信号在 $n = n_0$ 处为 1, 其他处为 0, 进一步容易得到:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \delta(n - n_0) = x(n_0). \quad (1.2)$$

另外, 也可以借助单位脉冲信号得到其他特殊信号, 如图 1.2(b) 所示的阶跃信号 $u(n)$, 其定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

它可以表示为

$$u(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta(n - j).$$

对于连续和离散信号, 还可分为周期和非周期的信号.

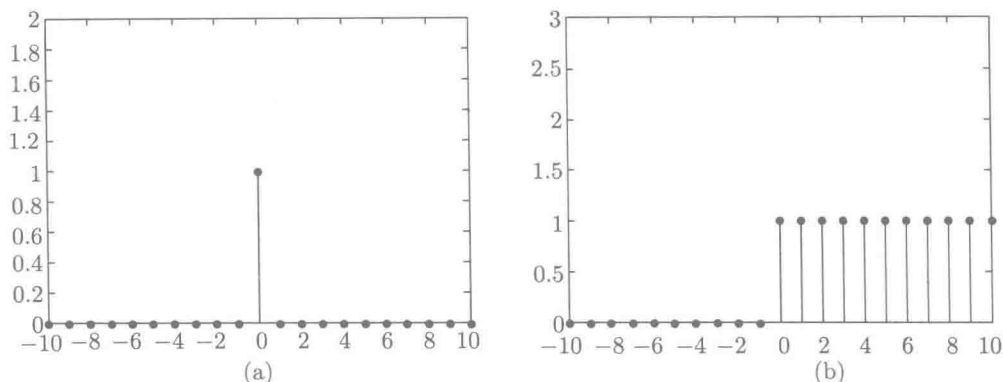


图 1.2 单位脉冲信号 (a) 和阶跃信号 (b)

定义 1.1.1 (周期信号) 对于连续信号 $x(t)$, 如果存在 $T > 0$, 使得

$$x(t + kT) = x(t), \quad k \in \mathbb{Z},$$

那么 $x(t)$ 称为周期连续信号. 同样地, 如果离散信号 $x(n)$ 满足

$$x(n + kN) = x(n), \quad N, k \in \mathbb{Z}, \text{ 且 } N > 0,$$

则称 $x(n)$ 为周期离散信号. 满足上述等式的 T 和 N 称为信号的周期.

对于周期信号, 我们只需要知道其在一个周期的变化过程, 就可由周期性确定信号在整个定义域内的取值. 例如正弦信号 $\sin t$ 或余弦信号 $\cos(2t)$, 周期分别为 2π 和 π , 我们只需描述一个周期 $[0, T]$ 内信号变化即可, 其他区域内的变化和取值可由周期性定义得到. 并不是所有的信号都满足上述周期性定义, 对于不满足周期定义的信号称为非周期信号.

在许多实际问题中, 常常需要将连续时间信号 $X(t)$ 变为离散时间信号 $x(n)$, 这就要对信号进行采样:

$$x(n) = X(nT), \quad -\infty < n < \infty,$$

即: $x(n)$ 是通过 $X(t)$ 每隔 T 时间间隔取值得到的, 这里 T 称为采样周期或采样间隔, 其倒数 $f = \frac{1}{T}$ 称为采样频率. 采样周期越短, 采样频率越大, 也就是单位时间内采样得到的离散点越多, 也就越能更好地描述原来的连续信号. 图 1.3 给出了在不同采样频率下, 余弦信号 $\cos t$ 采样后得到离散信号的情况, 图中实心点代表采样得到的离散的值. 从图 1.3 可见, 随着采样频率越来越大, 采样得到离散信号值也越来越多, 离散信号也越来越逼近原来的连续信号. 甚至可以设想, 如果采样频率无限增大, 那么最后得到的离散信号会和原来的连续信号一样.

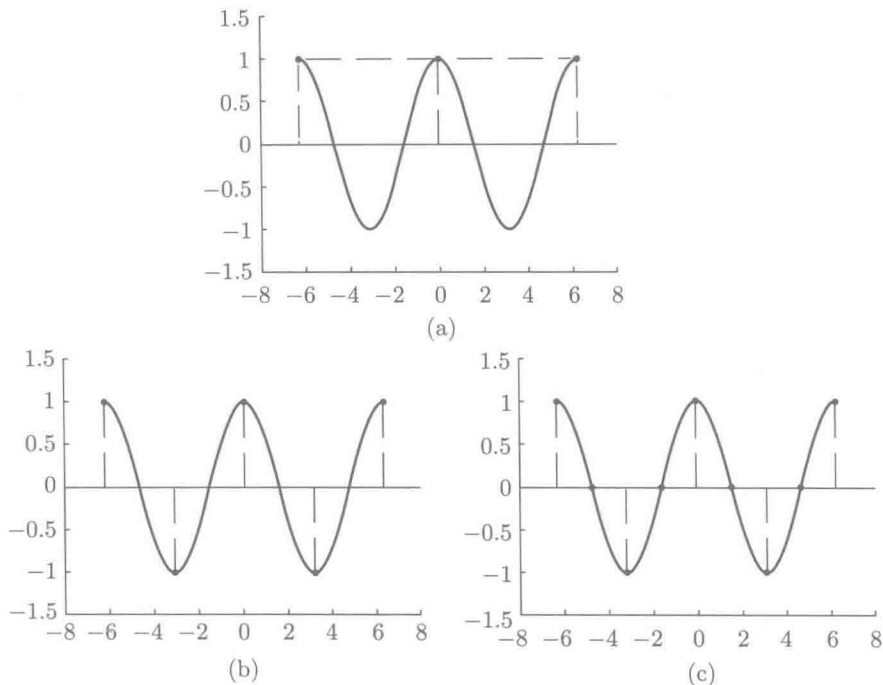


图 1.3 连续信号 $\cos t$ 在不同采样频率下采样得到的离散信号. (a) $T = \pi$; (b) $T = \frac{\pi}{2}$; (c) $T = \frac{\pi}{4}$

连续信号经过采样得到离散信号, 方便进一步做信号的分析 and 处理. 反过来, 离散信号是否可以得到对应的连续信号呢? 下面的香农 (Shannon) 采样定理告诉我们在一定条件下, 通过合适的插值, 可以实现离散到连续的目标.

定理 1.1.1 (香农采样定理^[5,6]) 假设连续信号 $X(t)$ 的最高频率为 F , 如果信号以采样频率 $f \geq 2F$ 采样得到离散信号 $x(n)$, 那么

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \phi\left(t - \frac{n}{f}\right), \quad (1.3)$$

这里插值函数

$$\phi(t) = \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft}.$$

采样频率 $f = 2F$ 称为尼奎斯特 (Nyquist) 采样率, 由香农采样定理知, 采样频率高于尼奎斯特采样率, 连续信号才能由离散化的信号完全恢复. 对于由小于尼奎斯特采样率采样的离散信号恢复原来的信号是会发生混淆失真的. 例如从图 1.3(a) 所示离散信号恢复原来的信号的时候, 容易得到连续信号 $X(t) = 1$, 这和原来的信号是不同的.

1.2 傅里叶变换与 Z 变换

传统的傅里叶分析是通过傅里叶变换引进频率的概念, 将一个函数展开成不同频率谐波的线性叠加, 并将对函数形态的研究可以转化为对其傅里叶系数的研究. 这使得很多在时间域上看不清的问题, 在频率域上却一目了然. 因此, 傅里叶分析无论在数学领域还是在各个工程学科中都扮演着重要的角色. 在信号处理和滤波器设计中, 傅里叶变换和 Z 变换也是常用的方法, 本节简单介绍一些相关的基本知识.

对于函数 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 定义傅里叶变换为

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (1.4)$$

其傅里叶逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (1.5)$$

对于 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中的函数 $f(x)$, $g(x)$, 其傅里叶变换满足:

$$(1) \quad \widehat{f+g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) + \widehat{g}(\omega), \quad (1.6)$$

$$(2) \quad \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_2^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \quad (1.7)$$

$$(3) \quad \widehat{T_b f}(\omega) = e^{-ib\omega} \widehat{f}(\omega), \quad \widehat{D_a f}(\omega) = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad (1.8)$$

$$(4) \quad \widehat{M_c f}(\omega) = \widehat{f}(\omega - c), \quad \widehat{f * g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega), \quad (1.9)$$

这里 T_b , D_a , M_c 分别表示平移、伸缩和调制算子, 其定义分别为

$$(T_b f)(x) = f(x - b), \quad (D_a f)(x) = f(ax), \quad (M_c f)(x) = e^{icx} f(x). \quad (1.10)$$

$f * g$ 为函数 f, g 的卷积, 定义为

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy. \quad (1.11)$$

对于离散信号 $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l^2$, 定义离散时间傅里叶变换为

$$\widehat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-in\omega}, \quad (1.12)$$

其对应的逆变换为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{x}(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (1.13)$$

对于离散信号来说, 其时间域上是离散的, 但其傅里叶变换后在频率上是连续的, 并且是以 2π 为周期的. $\widehat{x}(\omega)$ 也称为离散信号 $x(n)$ 的频率响应.

例 1.2.1 设离散信号 $x(n)$ 为

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

计算该信号的离散时间傅里叶变换.

直接由定义计算为

$$\hat{x}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-in\omega} = \frac{1 - e^{-iN\omega}}{1 - e^{-i\omega}} = e^{-\frac{(N-1)\omega}{2}} \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

例 1.2.2 计算单位脉冲响应信号的离散时间傅里叶变换.

由单位脉冲信号定义直接有

$$\hat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-in\omega} = x(0) = 1.$$

类似于连续傅里叶变换, 离散信号 $x(n), y(n) \in l^2$ 的傅里叶变换满足:

$$(1) \quad \widehat{x+y}(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega); \quad (1.14)$$

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega; \quad (1.15)$$

$$(3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{x}(\omega)\overline{\hat{y}(\omega)} d\omega; \quad (1.16)$$

$$(4) \quad \widehat{x*y}(\omega) = \hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega), \quad (1.17)$$

这里 $x*y$ 表示信号 x 与信号 y 的卷积, 其定义为

$$x*y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k).$$

对于离散信号 $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, 其 Z 变换定义如下:

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (1.18)$$

这里 z 为复数, 一般定义为 $z = re^{i\omega}$, 并且上述定义的级数并不是对所有 z 都收敛, 对于使得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

成立的 z 的取值范围称为该 Z 变换的收敛域. 如果取 z 在单位圆周上, 即 $z = e^{j\omega}$, 这时形式上与前面离散时间傅里叶变换一致. 离散时间信号的 Z 变换可将时域信号变换为在复频域的表达式, 它是分析线性时不变离散时间系统问题的重要工具, 在数字信号处理、计算机控制系统等领域有着广泛的应用 [2, 4, 7].

1.3 小波与滤波器

傅里叶分析只是一种纯频域的分析方法, 它不能提供局部时间域上的函数特征. 另外, 从函数空间上讲, 傅里叶分析只在 $L^2(\mathbb{R})$ 中有效, 对 $p \neq 2$ 的 $L^p(\mathbb{R})$ 空间, 傅里叶系数只是形式上的展开, 而不能刻画函数的大小和形态. 所以, 长期以来, 数学家和工程师们一直在努力寻找一种更好的基函数, 使函数不但能得到一种新的正交展开, 而且又能同时显示出时间域、频率域上的局部特征. 这样的基就是小波基, 其定义如下.

定义 1.3.1 假设 $a > 1, b > 0$, 如果

$$\left\{ \psi_{l,j,k}(x) : \psi_{l,j,k}(x) = a^{\frac{j}{2}} \psi_l(a^j x - kb), j, k \in \mathbb{Z}, l = 1, 2, \dots, L \right\} \quad (1.19)$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基, 那么称有限函数集 $\Psi_L = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_L\}$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 中的标准正交小波, 其中 $\mathbb{Z}$ 为所有整数组成的集合, 在实际应用中, 经常取 $a = 2, b = 1$.

对小波基的存在性、构造和性质的研究就是小波分析, 对它的研究, 可以追溯到 20 世纪初.

- 1910 年, 数学家 Haar 提出了“小波”规范正交基, 即 Haar 基;
- 1938 年, Littlewood 和 Paley 建立了 Littlewood-Paley 理论, 这可以认为是多尺度分析思想的最早来源;
- 1981 年, Strömberg 对 Haar 系进行改进, 证明了小波函数的存在;
- 1986 年, 法国数学家 Meyer 创造性地构造出了一个具有一定衰减性的光滑函数, 它的二进制伸缩和平移系 $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基, 实现了信号在时频空间同时局部化的正交分解;
- 1987 年, Meyer 和 Mallat 合作将计算机视觉领域的多尺度分析引入到小波分析中, 从而成功地统一了在此之前的 Strömberg, Meyer, Lemarie 和 Battle 等提出的各种具体小波函数的构造;
- 1988 年, 小波的另一位奠基人: Daubechies, 构造出了具有紧支撑的正交小波基, 它为数字信号的小波分解提供了有限的从而更实际、更具体的数字滤波器;

- 1991 年, Wicherhanser 和 Coifman 将 Mallat 算法进一步深化, 提出小波包 (wavelet packets) 算法, 取得了信号的最佳时频分解;
- 1992 年, Kovacevic 和 Vetterli 等人提出了双正交小波的概念, 并构造出具有对称性、紧支撑、消失矩、正则性等性质的双正交小波;
- 1993 年, Goodman 等基于 r 阶多尺度函数及多分辨率分析建立了多小波理论框架, 将单尺度小波变换推广到多尺度小波变换;
- 1995 年, Sweldens 提出构造第二代小波的提升方法, 成为构造第二代小波的有力工具;
- 2000 年以后, Donoho、Candes、Vetterli 和 Mallat 等人构造研究了脊小波 (ridgelet)、曲波 (curvelet)、轮廓波 (contourlet)、条带波 (bandelet)、楔波 (wedgelet)、子束波 (beamlet)^①, 小波分析进入到多尺度几何分析时代。

滤波器的设计和构造对于小波理论研究和实际应用都非常重要^[1-4], 本节我们简单介绍一下滤波器的基础知识。

简单地说, 滤波器就是一个离散的序列: $h = \{h(n)\}$, 这里 $h(n)$ 称为滤波器 h 的系数。在信号处理里, 离散信号 $x(n)$ 经过滤波器滤波后, 输出离散信号 $y(n)$, 整个滤波过程可以表示为

$$y(n) = \sum_k h(k)x(n-k), \quad (1.20)$$

即: $y(n)$ 为输入信号 $x(n)$ 与 $h(n)$ 卷积的结果。在数学上, 也可把滤波器 h 看成如下的一个线性算子:

$$h: x(n) \longrightarrow y(n).$$

另外, 在傅里叶变换和 Z 变换作用下, 上述滤波过程分别可以表示为

$$\hat{y}(\omega) = H(\omega)\hat{x}(\omega), \quad (1.21)$$

$$y(z) = H(z)x(z), \quad (1.22)$$

这里 $H(\omega) = \sum_n h(n)e^{-in\omega}$, $H(z) = \sum_n h(n)z^{-n}$, 同时 $H(\omega)$ 也称为滤波器的频率响应。

例 1.3.1 对于信号 $x = \sin t + 0.1\text{randn}(1, 101)$, 分别用滤波器 $h = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ 和 $h = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$ 进行滤波后, 输出不同的信号。图 1.4 描绘了原始信号和滤波后输出的信号。

^① 由于在大多数场合, 几何小波很少使用中文翻译, 因此本书仅在第 1 次出现英文名称时给出建议的中文翻译, 其他时候采用英文名称。