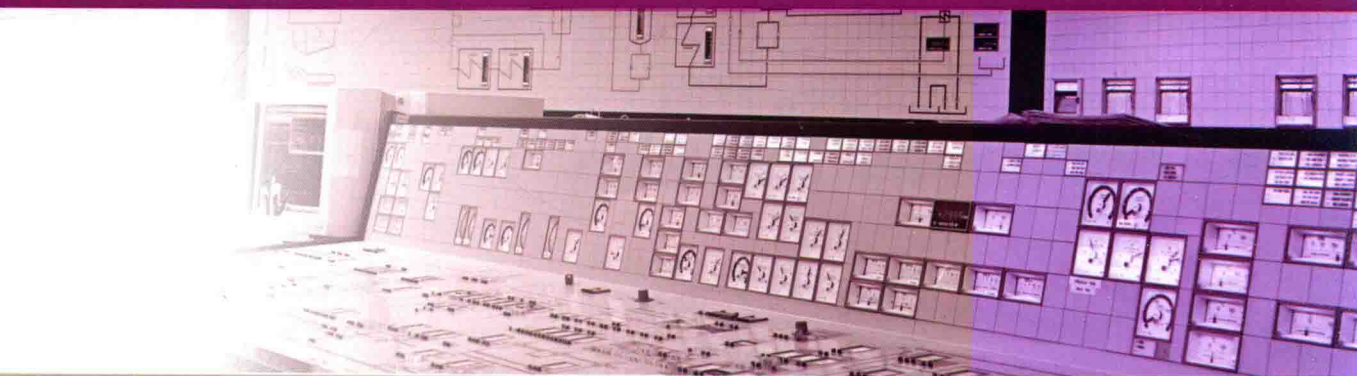




普通高等教育“十三五”规划教材
电气工程、自动化专业规划教材

开关型变换器建模与分析

◎ 高锋阳 编著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

电气工程、自动化专业规划教材

开关型变换器建模与分析

高锋阳 编著

章宝歌 王 黎 杨剑锋 徐顺刚 参编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

开关型变换器的建模与分析是研究开关型变换器动态特性的基础。本书从开关型变换器的电网络理论基础开始,把开关型变换器作为一非线性负载讨论瞬时功率理论;又对经典的开关型变换器电路拓扑进行分析、研究,得出一些可以遵循的规律,同时从能量回路、能量器件和能量控制的角度对开关型变换器系统瞬态特性进行阐述;然后重点讨论了基本开关型变换器的建模方法和闭环控制设计。希望本书能够启发学生和工程人员从宏观和微观两方面来理解开关型变换器模型和分析。

本书可作为普通高等学校电气工程、自动化以及能源工程等专业的研究生教材或参考书,也可为工程技术人员进行电力电子系统的研究设计提供参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

开关型变换器建模与分析 / 高锋阳编著. — 北京:电子工业出版社, 2017. 2

电气工程、自动化专业规划教材

ISBN 978-7-121-30673-0

I. ①开… II. ①高… III. ①开关—变换器—高等学校—教材 IV. ①TN624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 311328 号

策划编辑: 凌 毅

责任编辑: 凌 毅

印 刷: 三河市鑫金马印装有限公司

装 订: 三河市鑫金马印装有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张: 13.25 字数: 340 千字

版 次: 2017 年 2 月第 1 版

印 次: 2017 年 2 月第 1 次印刷

定 价: 39.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:(010)88254528, lingyi@phei.com.cn。

前 言

开关型变换器系统是一个带有闭环控制的高阶、非线性、时变系统,不能利用经典控制理论进行分析与设计,这给开关型变换器系统的动态分析和设计带来了很大的困难。开关型变换器系统理论是涉及半导体物理学、信号处理、控制理论、电路理论、计算机、机械设计、热现象和电磁现象等多门学科的交叉学科,理解开关型变换器系统理论需要从宏观角度和微观因素两方面进行理解。开关型变换器的建模与控制是研究开关型变换器动态特性的基础。然而,大多数人仅停留在控制、电路和拓扑的宏观领域里。开关型变换器设计常常是在经验参数、令人难以信服的仿真、简单的电气和机械概念以及大量测试的指导下进行的,常被认为是一种纯粹的应用工程甚至是一门技术。实现高性能、高可靠性和高设计准确度的唯一途径是将对宏观控制的分析和对微观瞬态过程的分析结合起来。为了建立一个精确的、有指导意义的理论框架,从各种开关型变换器拓扑中收集拓扑和控制分析数据是建立宏观与微观相结合的理论框架的第一步。因此,开关型变换器的建模与分析是电力电子学研究领域的重要内容之一。作者希望本书能够启发学生与工程人员从宏观和微观两方面来理解开关型变换器的模型和分析。

本书共7章。第1章介绍开关型变换器的电网络基础,这有助于读者理解开关型变换器系统电路。第2章讨论瞬时功率理论,开关型变换器作为一非线性负载,只有使用瞬时功率理论对其产生的功率和谐波分量才可以比较清楚地进行分析。第3章讨论开关型变换器拓扑理论,对经典的电路拓扑进行分析、研究,得出一些可以遵循的规律。第4章分析一些常见的瞬态过程,从能量回路、能量器件和能量控制的角度对开关型变换器系统进行阐述。第5章从基本变换器3种建模方法入手,讨论基本开关型变换器的建模方法。通过对整流器和逆变器的线性建模讨论,以期引导产生大信号系统建模方法和分析方法。第6章讲述开关型变换器的SVPWM调制技术。第7章以逆变器为例阐述开关型变换器的控制系统设计。

本书由高锋阳担任主编,编写了第2、3、4、5章,并和杨剑锋制订了编写提纲,杨剑锋完成了统稿和第7章的审稿,章宝歌编写第1章,王黎编写第6章,徐顺刚和高锋阳共同编写第7章。博士生导师庄圣贤教授对本书进行了详细、全面的审核,并提出了许多宝贵的修改意见。路颜、乔垚、杜强、强国栋等研究生参加了本书的绘图工作。作者对曾为本书提供支撑材料的工作人员和研究生表示感谢。

特别要指出的是,书中部分资料来源于已经出版的文献和发表的论文以及作者的工作成果。作者对本书使用其他作者公开发表的资料表示感谢。如果有任何资料来源被遗漏,作者对此表示诚挚的歉意,并将十分愿意在新版本中对这一疏漏加以纠正。

本书的内容体系是作者的一次大胆尝试,错误在所难免。而且,作者在本书中提出了许多新概念,这些概念很可能还不够严谨,有待进一步完善。作者欢迎读者提出宝贵意见,这将有助于在本书再版时提高内容的质量。

高锋阳
2016年12月

目 录

第 1 章 电网络图论基础	1
1.1 图的基本概念	1
1.1.1 图	1
1.1.2 树和基本回路	2
1.1.3 割集和基本割集	3
1.2 图的矩阵表示及关系	3
1.2.1 矩阵表示	3
1.2.2 矩阵 A 、 B 、 Q 之间的关系	6
1.2.3 电路方程的矩阵表示	6
1.3 网络的矩阵分析	8
1.3.1 支路的伏安特性	8
1.3.2 节点电压法	11
1.3.3 移源法	15
1.3.4 回路电流法	18
1.3.5 割集电压法	20
1.4 平面电路的对偶及其对偶规则	22
1.4.1 电路的对偶性	22
1.4.2 电路的对偶规则	23
1.5 无源二端口网络	26
1.5.1 二端口网络的参数	27
1.5.2 二端口网络综合的参数性质	29
1.5.3 LC 二端口网络的综合	30
第 2 章 瞬时功率理论	35
2.1 概述	35
2.1.1 功率定义	35
2.1.2 Budeanu 理论	39
2.1.3 Fryze 理论	41
2.1.4 Czarnecki 理论	42
2.1.5 传统功率理论的局限性	43
2.2 瞬时功率理论	43
2.2.1 pq 理论	44
2.2.2 改进的 pq 理论	46
2.2.3 同步参考坐标变换瞬时功率理论	47
2.3 基于正交分量的功率理论	48

第 3 章 开关型变换器拓扑理论	51
3.1 开关型变换器拓扑概述	51
3.2 开关型变换器拓扑规则	51
3.2.1 开关型变换器理想开关的定义	51
3.2.2 开关型变换器拓扑的基本开关单元	52
3.2.3 基本开关型变换器的拓扑组合规则	54
3.2.4 基于器件特性的变换器基本拓扑单元	60
3.3 开关型变换器的对偶设计	61
3.3.1 开关型变换器常用元件的对偶规则	62
3.3.2 基本开关型变换器的对偶设计	66
3.3.3 含有基本变换单元的开关型变换器的对偶设计	68
3.4 开关型变换器拓扑的三端开关模型法设计	69
3.5 基本开关型变换器的拓扑叠加设计	72
3.5.1 基本开关型变换器级联叠加的基本规则	72
3.5.2 基本开关型变换器的级联叠加设计举例	73
3.5.3 DC-DC 开关型变换器级联叠加时的功率开关单元拓扑简化	76
3.6 DC-AC 级联型组合变换器	78
3.6.1 DC-AC 级联型组合变换器拓扑结构	78
3.6.2 DC-AC 开关型变换器的拓扑叠加设计举例	86
第 4 章 开关型变换器的瞬态能量交换	94
4.1 概述	94
4.2 开关型变换器的宏观和微观因素	95
4.2.1 功率损耗	95
4.2.2 评述功率开关器件	96
4.3 短时瞬态过程研究方法论	98
4.3.1 电路理论分析的局限性	98
4.3.2 短时瞬态过程论	99
4.4 瞬态过程的影响因素	103
4.4.1 失效机制	104
4.4.2 主电路	104
4.4.3 控制模块与功率系统的相互影响	105
4.5 短时瞬态过程的研究方法	105
第 5 章 开关型变换器建模分析	107
5.1 概述	107
5.2 状态空间平均法	109
5.2.1 状态空间的基本定义	110
5.2.2 开关型变换器的变换方程	111
5.2.3 连续导通模式下的状态空间平均法	116

5.3	PWM 开关模型法	118
5.3.1	PWM 开关的定义	118
5.3.2	PWM 开关的端口特性	119
5.3.3	PWM 开关的等效电路模型	120
5.3.4	开关型变换器的 PWM 开关模型	121
5.4	等效变压器法	124
5.4.1	开关电路的等效变压器描述	124
5.4.2	三相 VSR 等效变压器 dq 模型电路	125
5.4.3	三相 VSR 等效电路简化	130
5.5	典型的开关型变换器线性模型	131
5.5.1	三相二极管/晶闸管整流器	131
5.5.2	PWM 升压型整流器	133
5.5.3	三相 PWM 逆变器	134
5.5.4	矩阵式变换器	135
5.6	三相四桥臂逆变器的数学建模举例	139
5.6.1	不同坐标系下三相四桥臂逆变器的数学模型	139
5.6.2	不平衡负载下三相四桥臂逆变器的数学模型	142
5.6.3	非线性负载下三相四桥臂逆变器的数学模型	143
第 6 章	脉宽调制技术	145
6.1	概述	145
6.2	SPWM 技术	145
6.2.1	电压正弦控制技术	145
6.2.2	电流正弦控制技术	146
6.3	SVPWM 技术	150
6.4	三相 VSR 的空间矢量控制	151
6.4.1	三相 VSR 的一般数学模型	151
6.4.2	三相 VSR 空间电压矢量分布	153
6.4.3	三相 VSR 空间电压矢量的合成	155
6.5	三维 SVPWM 技术	160
6.5.1	基于静止 $\alpha\beta\gamma$ 坐标系的 3D-SVPWM	160
6.5.2	基于静止 abc 坐标系的 3D-SVPWM	162
6.5.3	3D-SVPWM 算法的实现	165
6.5.4	3D-SVPWM 的仿真验证	171
6.6	三电平 SVPWM 技术	173
6.6.1	三电平空间矢量概述	173
6.6.2	查表式 SVPWM 矢量发生	175
第 7 章	开关型变换器控制	181
7.1	概述	181
7.2	单相无源逆变器	182
7.2.1	逆变桥等效模型	182

7.2.2	输出滤波器模型.....	183
7.2.3	单相无源逆变器模型.....	185
7.2.4	单相无源逆变器闭环控制模型.....	185
7.3	有源逆变器	187
7.3.1	有源逆变器 L 形滤波器	187
7.3.2	有源逆变器 LCL 形滤波器	189
7.3.3	有源逆变器并网功率调节.....	190
7.4	逆变器控制设计	192
7.4.1	PID 控制	192
7.4.2	重复控制.....	193
7.4.3	状态反馈控制.....	198
参考文献		202

第 1 章 电网络图论基础

1.1 图的基本概念

1.1.1 图

图(Graph, 简称 G) 是一些点和线段(边)的集合, 其中每一线段连于两个不同的点或一个相同的点, 点称为顶点或节点, 没有线段相连的点称为孤点, 线段则称为边或支路, 每条支路都连接在两个节点之间。因此一个图 G 可定义为点和线段的一个集合, 如图 1-1 所示。在图 1-1 中, 图 G 共有 4 个节点(a, b, c, d)和 6 条边(1, 2, 3, 4, 5, 6), 与支路相连的节点称为关联节点, 如支路 1 关联节点 a 和 b , 支路 6 的关联节点只有 a , 支路 6 又称为自环。一个图可以用 $G=(V, E)$ 表示, 其中 V 是节点的集合, E 是支路的集合。需要注意的是, 孤点 d 虽然没有支路相连, 但仍属于图 G ; 通常图中只有直线和曲线, 一般不采用折线。

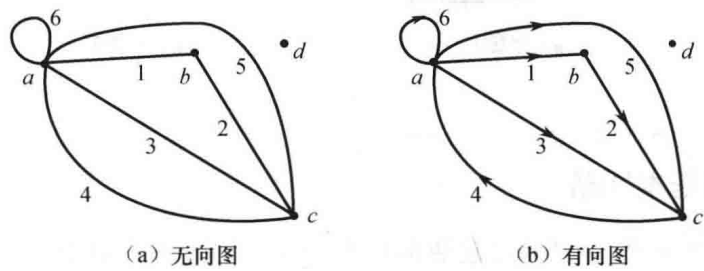


图 1-1 图 G

如果图 G 中的各支路没有方向(支路无箭头), 则称为无向图, 如图 1-1a 所示。反之, 如果给图中的各支路都规定了方向(支路有箭头), 则称其为有向图, 如图 1-1b 所示。电网络理论是最早应用图论的学科之一, 图论在电路中的应用称为网络图论, 在电路理论中用到的图主要是描述支路电流和电压的参考方向, 因此各支路赋予一个方向, 通常支路的方向即代表了对应电网络中支路的方向。任何一个电路都可以用一个有向图来说明其结构的特点, 如图 1-2a 所示为一电路结构图, 图 1-2b 是该电路抽象出来的有向图。一个电路的图可以表示一个电网络的连接性质, 即拓扑性质, 因此, 又称电路的拓扑图。

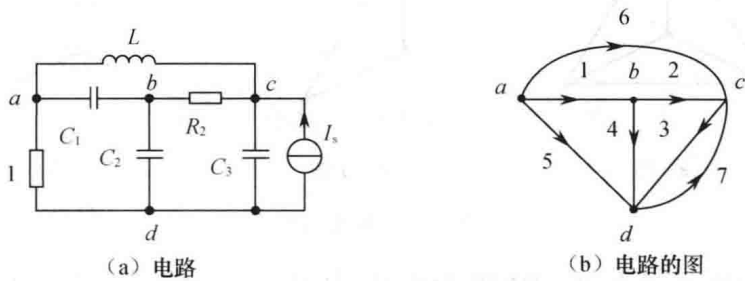


图 1-2 电路及其图

如果图 G 的任意两个节点之间至少有一条通路,则称图 G 为连通图,否则称为非连通图。图 1-3a 为连通图,图 1-3b 为非连通图。

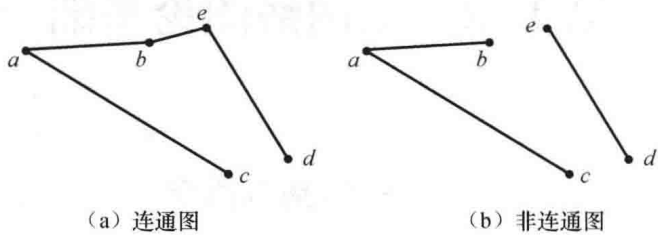


图 1-3 连通图和非连通图

如果图 G_1 的每个节点和支路都是图 G 中的节点和支路的子集,则称图 G_1 是图 G 的一个子图。一个图有很多子图,每一个图也是它自己的子图。如图 1-4a 和图 1-4b 均为图 1-1a 的子图。

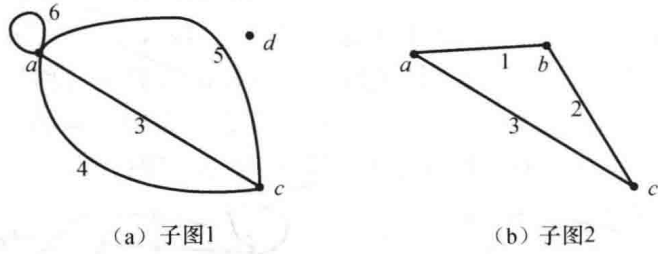


图 1-4 图及其子图

1.1.2 树和基本回路

树在图论中非常重要,一棵树是连通图 G 的一个连通子图。如果一个连通子图满足如下两个条件:

- ① 包含连通图 G 的全部节点;
- ② 不包含任何回路。

满足上述两个条件的连通子图就是图 G 的一棵生成树(Tree),简称为树 T 。

一个图的树 T 有很多种,如图 1-5c 是图 1-5a 的一棵树,而图 1-5b 则不是图 1-5a 的树,只是图 1-5a 的一个子图。

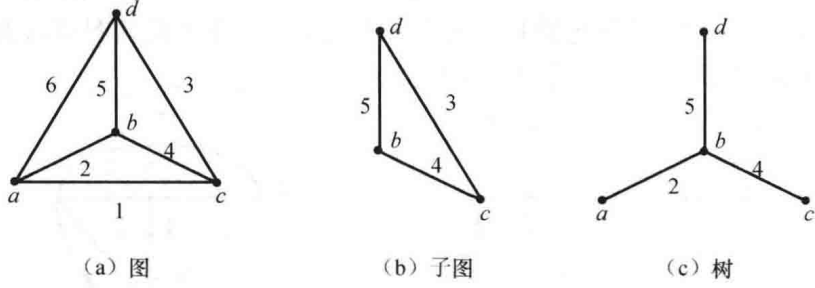


图 1-5 图及其树

树的支路称为树支,其余的支路则称为连支。树的补图称为补树,补树的支路就是连支。对

于具有 n 个节点、 b 条支路的连通图的树支数是相等的,任何一棵树的树支数 n_t 和连支数 l 为

$$\begin{cases} n_t=n-1 \\ l=b-n_t=b-(n-1) \end{cases} \tag{1-1}$$

在图 1-5c 中,共有 4 个节点、6 条支路,根据式(1-1),则树支数为 3 (即支路 2、4、5 为树支),连支数为 3(即支路 1、3、6 为连支)。

树的任意两节点间必有且仅有一条通路。若在任意两节点间加上连支,必存在一个唯一的包含该连支的回路,称为单连支回路,通常又称为基本回路。如图 1-6 所示的树,就存在一个连支 ab 和 a 、 b 间的树路径构成的基本回路。

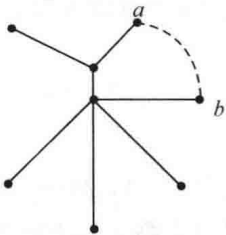


图 1-6 基本回路

1.1.3 割集和基本割集

割集是连通图 G 的一些支路的集合,如果一个支路集合满足如下两个条件:

- ① 把这些支路移去(移去的只是支路,该支路关联的两个节点不能移去),将使图 G 分离为两个部分(孤立节点也是一个图);
- ② 如果少移去其中任一条支路,图 G 仍将是连通的。

满足上述两个条件的部分支路集合就是图 G 的一个割集。割集是使图分成两个子图所需要的最少支路的集合,一个图可以有多个割集,连通图 G 的一个割集至少包含 G 的一条树支。在如图 1-7 所示的连通图中,根据割集的定义条件,可以判断 $C_1(7)$ 、 $C_2(1,3,4)$ 是割集,而 $C_3(2,5)$ 却不是割集。

只含有一条树支和若干连支可以构成一个割集,称这样的割集为单树支割集,也被称为基本割集。对于同一个连通图,选定的树不同,其对应的基本割集也不一样,如图 1-8 中的连通图,如果选取支路 3、5、6 为树支,则对应的基本割集为 $C_1(1,2,6)$ 、 $C_2(1,3,4)$ 、 $C_3(2,4,5)$ 。而如果选取支路 2、4、5 为树支,其对应的基本割集为 $C_1(3,5,6)$ 、 $C_2(1,3,4)$ 、 $C_3(1,2,6)$ 。

需要注意的是,同一个连通图的基本割集的个数是相等的,等于树支数;同时因为树是连通的,因此没有树支的连支支路是不可能构成割集的。

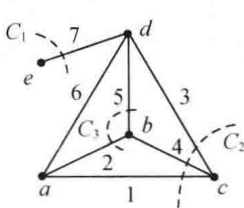


图 1-7 图和割集

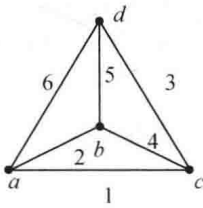


图 1-8 图和基本割集

1.2 图的矩阵表示及关系

1.2.1 矩阵表示

在电网络理论中,图的节点、回路、割集与支路之间的关系,通常可以用不同的矩阵进行描述。

1. 关联矩阵

表明连通图的节点与支路之间的关系的矩阵称为节点—支路关联矩阵,简称关联矩阵,用符号 $\mathbf{A}_a$ 表示。假设有一个连通有向图具有支路数 b 、 n 个节点,在其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 中,以行对应点、以列对应支路,则 $\mathbf{A}_a$ 是 $n \times b$ 阶矩阵,其中的元素 a_{ij} 定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

式中, $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, b$ 。元素 a_{ij} 的取值满足如下原则:①当支路 j 和节点 i 关联,同时支路 j 的方向离开节点 i ,此时元素 a_{ij} 的取值为 1;②当支路 j 和节点 i 关联,同时支路 j 的方向指向节点 i ,此时元素 a_{ij} 的取值为 -1;③当支路 j 和节点 i 无关联,此时元素 a_{ij} 的取值为 0。

任何一个有向图与其关联矩阵是一一对应的,当有向图确定时,且其关联矩阵是唯一的;反之,当关联矩阵确定时,有向图是唯一的。

【例 1-1】 对于图 1-9 所示的有向图,试写出其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 。

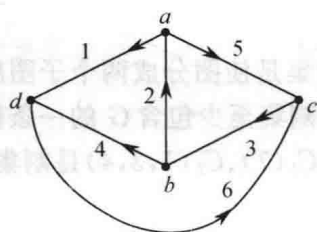


图 1-9 例 1-1 的图

【解】 根据式(1-2)可写出其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 为

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\mathbf{A}_a$ 的每一列只有一个 +1 和 -1, 其余均为 0, 这是因为一条支路只能关联两个节点, 从其中一个节点离开必定指向另一个节点。因此又可得 $\mathbf{A}_a$ 的每一列元素之和必为零, 这就意味着 $\mathbf{A}_a$ 的所有行的元素之和为零, 即 $\mathbf{A}_a$ 的行不是彼此独立的, 且其秩不超过 $n-1$ 。

事实上, 可以划去 $\mathbf{A}_a$ 的任意一行, 此时所得的 $(n-1) \times b$ 阶矩阵的行将是彼此独立的, 称这样的矩阵为降阶关联矩阵。因为降阶关联矩阵实质上包含了 $\mathbf{A}_a$ 的全部内容, 同样能描述图的拓扑关系, 被划去的一行所对应的节点称为参考节点。在电网络分析中常用的是降阶关联矩阵, 因此为了不至于混淆, 仍简称其为关联矩阵, 为了与 $\mathbf{A}_a$ 区别, 用符号 $\mathbf{A}$ 表示, $\mathbf{A}_a$ 和 $\mathbf{A}$ 具有相同的秩。

对于图 1-9, 假设取节点 d 为参考节点, 则其关联矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 回路矩阵

表明连通图的回路与支路之间的关系的矩阵称为回路矩阵, 用符号 $\mathbf{B}_a$ 表示。假设有一个连通有向图具有支路数 b 、 n 个节点、回路总数 s , 在其回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 中, 以行对应回路、以列对应支路, 则 $\mathbf{B}_a$ 是 $s \times b$ 阶矩阵, 其中的元素 b_{ij} 定义为

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

式中, $i=1, 2, \dots, s; j=1, 2, \dots, b$ 。元素 b_{ij} 的取值满足如下原则: ①当支路 j 在回路 i 中, 同时支路 j 的方向与回路 i 的方向一致, 此时元素 b_{ij} 的取值为 1; ②当支路 j 在回路 i 中, 同时支路 j 的方向与回路 i 的方向相反, 此时元素 b_{ij} 的取值为 -1; ③当支路 j 不在回路 i 中, 此时元素 b_{ij} 的取值为 0。

【例 1-2】 对于图 1-10 所示的有向图, 试写出其回路矩阵 B_a 。

【解】 选取回路(回路方向为回路所含支路的出现顺序)为: 164, 2546, 354, 1234, 125, 236, 1635, 根据式(1-3), 则其回路矩阵 B_a 为

$$B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

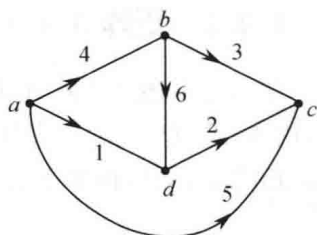


图 1-10 例 1-2 的图

由行的初等变换可知, 上述回路矩阵 B_a 的行间并不是线性独立的, 即部分回路不是独立的, 对于具有支路数 b 、 n 个节点的连通图, 回路矩阵的秩为 $b - (n - 1)$, 其值刚好即为连支数 l 。因此没有必要把回路矩阵 B_a 的全部行都写出来, 只要选取 l 个独立回路并写出相应的 $l \times b$ 阶矩阵, 就可以表示出 B_a 的全部内容。通常情况下, 选取 l 个基本回路, 对应的矩阵称为基本回路矩阵, 为了不至于混淆, 仍简称其为回路矩阵, 为了与 B_a 区别, 用符号 B 表示, B_a 和 B 具有相同的秩。

在图 1-10 所示的有向图中, 若选取支路数 4、5、6 为树支, 经计算 l 的值为 3, 因此只需选取 3 个基本回路, 则对应的基本回路矩阵 B 为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 割集矩阵

表明连通图的割集与支路之间的关系的矩阵称为割集矩阵, 用符号 Q_a 表示。假设有一个连通有向图具有支路数 b 、 n 个节点、割集总数 q , 在其割集矩阵 Q_a 中, 以行对应割集、以列对应支路, 则 Q_a 是 $q \times b$ 阶矩阵, 其中的元素 q_{ij} 定义为

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

式中, $i=1, 2, \dots, q; j=1, 2, \dots, b$ 。元素 q_{ij} 的取值满足如下原则: ①当支路 j 在割集 i 中, 同时支路 j 的方向与割集 i 的方向一致, 此时元素 q_{ij} 的取值为 1; ②当支路 j 在割集 i 中, 同时支路 j 的方向与割集 i 的方向相反, 此时元素 q_{ij} 的取值为 -1; ③当支路 j 不在割集 i 中, 此时元素 q_{ij} 的取值为 0。一个割集把节点分为两个互不相交的集合 (W, W') , 割集方向为以 (W, W') 或 (W', W) 来确定, 直观上可以用一个箭头来表示, 在实际中一般取树支方向为割集方向。

通常情况下, 选取基本割集, 对应的矩阵称为基本割集矩阵, 为了不至于混淆, 仍简称其为割集矩阵, 为了与 Q_a 区别, 用符号 Q 表示。

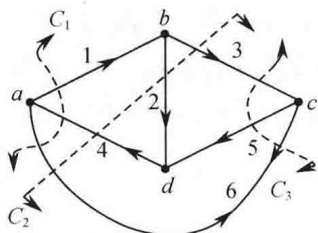


图 1-11 例 1-3 的图

【例 1-3】对于图 1-11 所示的有向图,试写出其割集矩阵 Q 。

【解】选取基本割集为:146, 3246, 356, 割集方向如图 1-11 所示,根据式(1-4),则其割集矩阵 Q 为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2 矩阵 A 、 B 、 Q 之间的关系

在书写上述的矩阵 A 、 B 、 Q 时,若树支号和连支号分开编号,采用先连支号后树支号的原则,用 A_t 、 B_t 、 Q_t 表示树支列,用 A_l 、 B_l 、 Q_l 表示连支列,而且 B_l 恰好为单位矩阵 1_l 和 Q_l 恰好为单位矩阵 1_l ,则可得如下表达式

$$A = [A_l, A_t] \quad (1-5)$$

$$B = [B_l, B_t] = [1_l, B_t] \quad (1-6)$$

$$Q = [Q_l, Q_t] = [Q_l, 1_t] \quad (1-7)$$

矩阵 B 表示了一个连通图 G 中基本回路与各支路之间的关系,而一个确定的连通图 G ,即确定了矩阵 A 的唯一性,因此 A 和 B 之间必定存在一定的联系。

根据定理(证明可参看文献[3]):如果同一连通图的 A 和 B 的列具有相同的支路排列次序,则

$$AB^T = 0 \text{ 或 } BA^T = 0 \quad (1-8)$$

将式(1-5)和式(1-6)代入式(1-8)整理得

$$A = [A_l, A_t] \cdot [1_l, B_t]^T = A_l + A_t B_t^T = 0$$

进一步得

$$B_t^T = -A_t^{-1} A_l \quad (1-9)$$

即

$$B_t = -(A_t^{-1} A_l)^T = -A_l^T (A_t^{-1})^T \quad (1-10)$$

根据式(1-10)即可推出回路矩阵 B 。

再如,推论(证明可参看文献[3]):如果同一连通图的 Q 和 B 的列具有相同的支路排列次序,则

$$B_t = -Q_l^T \text{ 或 } Q_l = -B_t^T \quad (1-11)$$

将式(1-9)代入式(1-11)可得

$$Q_l = -B_t^T = A_t^{-1} A_l \quad (1-12)$$

根据式(1-12)即可推出割集矩阵 Q 。

1.2.3 电路方程的矩阵表示

如图 1-12 所示为用一个连通有向图表示的一个电路,在有向图中支路的方向即代表该支路电流和电压的参考方向。

对于图 1-12,选节点 d 为参考节点,共有 7 个支路电流,3 个独立节点,根据电路的基尔霍夫电流定律可得

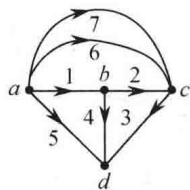


图 1-12 电路有向图

$$\begin{cases} i_1 + i_5 + i_6 + i_7 = 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_2 + i_3 - i_6 - i_7 = 0 \end{cases} \quad (1-13)$$

在图论中,能够表示节点与支路关系的是关联矩阵 $\mathbf{A}$,选节点 d 为参考节点,因此可得图 1-12 的关联矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

如果用 7 阶列向量 $\mathbf{i}$ 表示 7 个支路电流,即

$$\mathbf{i} = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6 \ i_7]^T$$

对于式(1-13)容易发现,下述关系成立

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \quad (1-14)$$

因此在电网络理论中,设一个电路用具有支路数 b 、 n 个节点的一个连通有向图进行表示,用 b 阶列向量 $\mathbf{i}$ 表示 b 个支路电流,则对于 n 个节点的 KCL 可以得到其矩阵表示形式为

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \quad (1-15)$$

由于关联矩阵 $\mathbf{A}$ 和割集矩阵 $\mathbf{Q}$ 可以通过非奇异变换联系起来,即

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{A}$$

其中, $\mathbf{D}$ 为元素 1, -1, 0 的非奇异矩阵。所以 KCL 可以得到其矩阵表示的另一种形式

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = 0 \quad (1-16)$$

在图论中,能够表示回路与支路关系的是回路矩阵 $\mathbf{B}$,采用同样的方法先写出电路状态下的 KVL 方程组和有向图的回路矩阵 $\mathbf{B}$,用 b 阶列向量 $\mathbf{u}$ 表示 b 个支路电压,可以得到 KVL 其矩阵表示的一种形式

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = 0 \quad (1-17)$$

对于图 1-12,用列向量 $\mathbf{u}_n$ 表示 3 个节点电压,因为任意一支路电压可表示为两节点电压之差,因此有

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n1} - u_{n2} \\ u_{n2} - u_{n3} \\ u_{n3} \\ u_{n2} \\ u_{n1} \\ u_{n1} - u_{n3} \\ u_{n1} - u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n = 0$$

进一步 KVL 可以得到其矩阵表示的另一种形式

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n \quad (1-18)$$

将式(1-6)和式(1-7)分别代入式(1-16)和式(1-17)有

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = [\mathbf{1}_l \ \mathbf{B}_t] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = \mathbf{u}_l + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t = 0$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = [\mathbf{Q}_l \ \mathbf{1}_t] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_l \\ \mathbf{i}_t \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_l \mathbf{i}_l + \mathbf{i}_t = 0$$

所以

$$u_l = -B_l u_t \tag{1-19}$$

$$i_t = -Q_l i_l \tag{1-20}$$

式(1-19)和式(1-20)分别称为 KVL 和 KCL 的另一种表示形式。

又根据式(1-11)和式(1-12)，代入式(1-19)和式(1-20)可得

$$u_l = -B_l u_t = Q_l^T u_t \quad \text{或} \quad u = Q^T u_t$$

$$i_t = -Q_l i_l = B_l^T i_l \quad \text{或} \quad i = B^T i_l$$

上述结果也是 KVL 和 KCL 的另一种表示形式。

综上所述，对于矩阵形式的 KCL 和 KVL 的表示形式，总结如表 1-1 所示。表 1-1 所示 KCL 和 KVL 的矩阵形式对于任何网络元件均适合，与网络内容无关。对于大型网络的计算，可以借助计算机进行辅助分析。

表 1-1 KCL、KVL 的矩阵形式

	KCL	KVL
A	$Ai=0$	$u=A^T u_n$
B	$i=B^T i_l$ 或 $i_l=B_l^T i_t$	$Bu=0$ 或 $u_l=-B_l u_t$
Q	$Qi=0$ 或 $i_t=-Q_l i_l$	$u=Q^T u_t$ 或 $u_l=Q_l^T u_t$

1.3 网络的矩阵分析

1.3.1 支路的伏安特性

在电网中，通常无源的二端元件 R 、 L 、 C 可看作一条支路。如果一个二端元件有与其相接的独立电源或受控源，则支路通常是对二端元件的等效复合支路。在电网中建立网络矩阵方程，应首先获得每个支路的伏安关系或约束关系。下面以正弦稳态电路进行分析，获得各种支路的伏安关系，该关系对直流电路同样适用，因为直流稳态是其特例。

1. 含独立电源的二端元件支路

含独立电源的二端元件的标准支路组合如图 1-13 所示。其中， $Z_k(Y_k)$ 为第 k 条支路的元件阻抗或导纳， $\dot{U}_{ek}$ 为第 k 条支路二端元件 Z_k 的电压； $\dot{I}_{ek}$ 为流过第 k 条支路二端元件 Z_k 的电流； $\dot{U}_{sk}$ 为第 k 条支路中电压源电压； $\dot{I}_{sk}$ 为第 k 条支路中电流源电流； $\dot{U}_k$ 为第 k 条支路电压； $\dot{I}_k$ 为第 k 条支路电流。

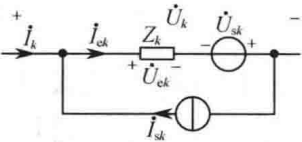


图 1-13 含独立电源的标准复合支路

假设共有 b 条支路，则 k 的范围是 $1 \sim b$ ，则图 1-13 中的各个物理量矩阵如下。

b 条支路的元件阻抗和导纳分别用 $b \times b$ 阶对角矩阵 Z_b 和 Y_b 表示，并称为支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵

$$Z_b = \text{diag}[Z_1 \quad Z_2 \quad \cdots \quad Z_k \quad \cdots \quad Z_b]$$

$$Y_b = \text{diag}[Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_k \quad \cdots \quad Y_b]$$

且

$$Z_b = Y_b^{-1}$$

所有二端元件 Z_k 的电压矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_e = [\dot{U}_{e1} \quad \dot{U}_{e2} \quad \cdots \quad \dot{U}_{ek} \quad \cdots \quad \dot{U}_{eb}]^T$

所有二端元件 Z_k 的电流矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_e = [\dot{I}_{e1} \quad \dot{I}_{e2} \quad \cdots \quad \dot{I}_{ek} \quad \cdots \quad \dot{I}_{eb}]^T$

所有二端元件 Z_k 的支路中电压源矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_s = [\dot{U}_{s1} \quad \dot{U}_{s2} \quad \cdots \quad \dot{U}_{sk} \quad \cdots \quad \dot{U}_{sb}]^T$

所有二端元件 Z_k 的支路中电流源矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_s = [\dot{I}_{s1} \quad \dot{I}_{s2} \quad \cdots \quad \dot{I}_{sk} \quad \cdots \quad \dot{I}_{sb}]^T$

b 条支路电压矩阵: $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{U}_1 \quad \dot{U}_2 \quad \cdots \quad \dot{U}_k \quad \cdots \quad \dot{U}_b]^T$

b 条支路电流矩阵: $\dot{\mathbf{I}} = [\dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 \quad \cdots \quad \dot{I}_k \quad \cdots \quad \dot{I}_b]^T$

在电压源矩阵 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和电流源矩阵 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 中各元素的正负号原则: 当电压源(电压降的方向)、电流源的方向与所在支路方向相反时, 取“+”, 一致时, 取“-”。

注意: 本书仅对网络中标准支路间的电感之间无耦合时, 支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵 $\mathbf{Z}_b$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 均是对角矩阵。如果电感之间有耦合, 则 $\mathbf{Z}_b$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 将不再是对角矩阵, 需要对 $\mathbf{Z}_b$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 进行修正, 可以参考有关书籍, 在此不予讨论。

由元件的欧姆定律可得

$$\dot{I}_{ek} = Y_k \dot{U}_{ek} \quad (1-21)$$

$$\dot{U}_{ek} = Z_k \dot{I}_{ek} \quad (1-22)$$

则矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{I}}_e = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_e \quad (1-23)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_e = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_e \quad (1-24)$$

根据电路的 KCL 和 KVL 理论, 由图 1-13 可得

$$\dot{I}_k = \dot{I}_{ek} - \dot{I}_{sk} \quad (1-25)$$

$$\dot{U}_k = \dot{U}_{ek} - \dot{U}_{sk} \quad (1-26)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{I}}_e - \dot{\mathbf{I}}_s \quad (1-27)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_e - \dot{\mathbf{U}}_s \quad (1-28)$$

将式(1-23)和式(1-24)分别代入式(1-27)和式(1-28), 则得

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_e - \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{Y}_b (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s \quad (1-29)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_e - \dot{\mathbf{U}}_s = \mathbf{Z}_b (\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s) - \dot{\mathbf{U}}_s = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{U}}_s + \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_s \quad (1-30)$$

2. 含受控电源的二端元件支路

含受控电源的二端元件的标准支路组合如图 1-14 所示。

图 1-14 中增加的各个受控物理量矩阵如下。

所有二端元件 Z_k 的受控电压源矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_d = [\dot{U}_{d1} \quad \dot{U}_{d2} \quad \cdots \quad \dot{U}_{dk} \quad \cdots \quad \dot{U}_{db}]^T$

所有二端元件 Z_k 的受控电流源矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_d = [\dot{I}_{d1} \quad \dot{I}_{d2} \quad \cdots \quad \dot{I}_{dk} \quad \cdots \quad \dot{I}_{db}]^T$

根据电路的 KCL 和 KVL 理论, 由图 1-14 可得

$$\dot{I}_k + \dot{I}_{sk} = \dot{I}_{ek} + \dot{I}_{dk} \quad (1-31)$$