数学分析中的正反例研究

叶润萍　邹青　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

数学分析中的正反例研究

叶润萍　邹　青　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书讲述了数学分析课程中经典的正反例，有助于读者对数学分析课程知识点的理解与深化。全书包括极限理论、一元函数的连续性、一元函数微分学、一元函数积分学、级数理论、多元函数微分学和多元函数积分学。书中对数学分析课程中相关概念的主要性质及定理选择或构造正反例，从不同的侧面解释、印证了定理（或性质）的正确性，以及定理条件的充分性或必要性，从而使读者得到发散思维的训练，同时对定理的理解更加深刻，能够体会到数学的层次性及美感。

本书可作为高等学校数学类专业数学分析课程的参考书使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析中的正反例研究/叶润萍，邹青编著. —北京：机械工业出版社，2017.2

ISBN 978-7-111-55290-1

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①叶…②邹…　Ⅲ.①数学分析－研究　Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 294814 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　韩效杰
责任校对：刘秀芝　封面设计：张　静
责任印制：孙　炜
北京玥实印刷有限公司印刷
2017 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 10 印张 · 1 插页 · 209 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-55290-1
定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010－88379833
读者购书热线：010－88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

前　言

数学分析是数学类专业最重要的基础课程，其理论、思想和方法成为近代数学与现代数学的基础，渗透到几乎所有的数学分支领域中。众所周知，数学分析课程的理论严谨、抽象，是一门比较难学的专业基础课，学生在学习过程中对数学分析中概念、定理的理解有一定的难度，而学好数学分析，理解其基本概念和定理是最基本的，对概念、性质及定理理解不透，就无法学好该课程，当然更无法进行后继课程的学习。我们经过较长时间的教学实践发现，在对一些概念的性质、定理教学时，适当构造正反例进行对比教学，不仅能帮助学生多角度地理解数学分析中的性质及定理，同时也能激发学生对数学分析课程学习的兴趣。因此，作者基于对数学分析中的正反例的对比研究，编著了本书，构造了许多数学分析课程中的正反例，从不同的侧面解释、印证定理（或性质）的正确性，以及定理条件的充分性或必要性，帮助读者加深对数学分析中理论知识点的理解，使读者在得到了发散思维训练的同时，能够体会到数学的层次性及美感，激发读者的学习兴趣。

由于我们水平有限，时间也较仓促，本书中不免存在不少不足、不当和错误之处，恳请读者批评指正。

作者

目　录

第 1 章

极限理论

1.1 函数

在分析学中，甚至在数学研究中，最基本也是最重要的概念便是函数.

函数（function）一词在中国最先出现在清朝数学家李善兰㊀的译作《代数学》中，他给出的叙述是“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数”，“凡式中含天，为天之函数”.

设 A，B 是非空的数集，若按某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称

$$f:\ A \to B$$

为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in A.$$

一般地，用解析式法、列表法及图像法来表示一个函数. 定义域、值域以及对应法则是一个函数的三个要素.

除了实函数外还有复函数，但在本书中只涉及实函数. 另外，除了马上将重点讲述一元函数外，后面还将讨论多元函数，即自变量多于 1 个的函数. 除此之外，函数还有显函数与隐函数之分.

本节将从函数的几个性质（单调性、有界性、奇偶性、周期性）出发，介绍一些正反例.

一般地，设函数 $y=f(x)\ (x\in A)$ 的值域是 c. 若存在一个函数 $g(y)$，在每一处 $g(y)$ 都等于 x，这样的函数 $x=g(y)\ (y\in c)$ 叫作函数 $y=f(x)$. $(x\in A)$ 的反函数（Inverse function），记作 $y=f^{-1}(x)$. 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域分别是函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 一函数 f 若存在反函数，则它必须是双射函数.

函数的单调性（monotonicity）是指当函数 $f(x)$ 的自变量在其定义区间内增大（或减小）时，函数值 $f(x)$ 也随之增大（或减小）的性质，称该函数在该区间上具有单调性.

㊀ 李善兰，原名李心兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔. 浙江海宁人，中国近代（清末）著名数学家、天文学家、力学家和植物学家，创立二次平方根的幂级数展开式.

存在反函数的函数未必单调.

例 1.1 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q}, \\ -x, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}:=\mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不单调，但它是单值的，其反函数为其本身.

例 1.2 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in[0,1], \\ x^2, & x\in[-1,0). \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不单调，但它是单值的（见图 1.1），其反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1}, & x\in[-1,0], \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1]. \end{cases}$$

上述两个例子告诉我们存在反函数与原函数的单调性之间要建立联系还需一些条件的支持.

构造例 1.1 的函数其灵感来源于分析中一个非常经典的函数——Dirichlet 函数.

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

之后我们将讲述的很多例子其来源都是此函数. 根据 $D(x)$，还能构造一个类似的例子.

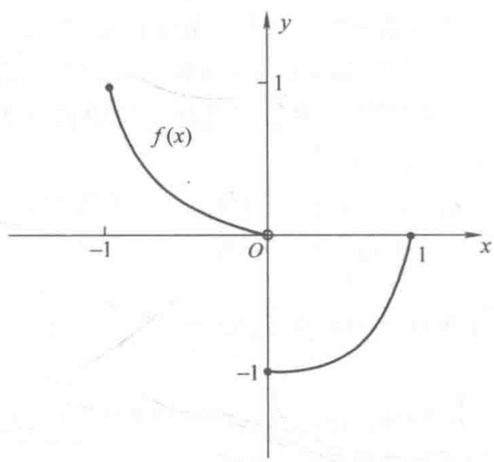

图 1.1

例 1.3 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{2}x, & x\in\mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不单调，但它同例 1.1 一样，是单值的.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q}, \\ 2x, & x\in\mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

至此，我们要问需要增加什么条件才能在存在反函数与原函数单调性之间建立联系呢？

下面给出 1 个命题来回答这一问题.

命题 1.1 任何严格单调的函数必有反函数，且反函数也严格单调.

证明 因函数是严格单调的，因此，它必是单值函数，从而必有反函数. 下证反函数也严格单调.

下面不妨假设$f(x)$是严格递增的函数，其定义域为A，若$\forall x_1<x_2(x_1, x_2\in A)$，由严格递增性可知

$$y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2.$$

设f^{-1}为f的反函数，于是有

$$f^{-1}(y_1)=x_1<x_2=f^{-1}(y_2).$$

即当$y_1<y_2$时，有$f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. 此即证明了f^{-1}也严格递增. 同理可证严格递减的情形.

到下一章讲至连续性时，这个命题还能加强为：任何严格单调的连续函数其反函数也是连续且严格单调的.

另外还将介绍连续函数在区间上存在反函数的充要条件.

函数的复合（composition）（亦称函数的叠置）是指以另一变元的函数作为已给函数的变元.

设有两函数

$$y=f(u),\ u\in D,$$
$$u=g(x),\ x\in E.$$

记$E^*=\{x\mid g(x)\in D\}\cap E$. 若$E^*\neq\varnothing$. 则对每个$x\in E^*$. 可通过函数$g$对应$D$内唯一的一个值$u$，而$u$又通过函数$f$对应唯一的一个值$y$. 这就确定了一个定义在$E^*$上的函数，它以$x$为自变量，$y$为因变量，记作

$$y=f(g(x)),\ x\in E^* \text{或}\ y=(f\circ g)(x),\ x\in E^*,$$

称为函数f与g的复合函数. 称f为外函数，g为内函数，u称为中间变量. f与g的复合也简记为$f\circ g$.

函数的复合满足结合律，即

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

事实上，

$$\begin{aligned} h\circ(g\circ f)(x)&=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))\\ &=(h\circ g)(f(x))=((h\circ g)\circ f)(x). \end{aligned}$$

例 1.4　设

$$f(x)=x^2,\ x\in(0,+\infty)$$
$$g(u)=\ln u, u\in(0,\ +\infty)$$
$$h(w)=\sin w.\ w\in\mathbb{R}.$$

于是有

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f=\sin(\ln x^2),\ x\in(0,\ +\infty).$$

但对于复合函数，$f\circ g$一般不等于$g\circ f$.

例 1.5　设

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ x^3, & x>0.\end{cases}$$

则

$$f\circ g=\begin{cases}2 & x\leqslant 0,\\ x^6, & x>0.\end{cases}\qquad g\circ f=\begin{cases}8, & x\leqslant 0,\\ x^6, & x>0.\end{cases}$$

例 1.6 设 $D=\{a, b\}$,

$$f:\{a, b\}\to a,$$
$$g:\{a, b\}\to b.$$

则

$$f\circ g:\{a, b\}\to a,$$
$$g\circ f:\{a, b\}\to b.$$

设 D 为关于原点对称的数集，f 为定义在 D 上的函数. 若对任一 $x\in D$. 有

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称 f 为 D 上的奇（偶）函数（Odd (even) function）.

设一复合函数 $f\circ g$ 的定义域为 D，D 关于原点对称. 若内函数 g 为偶函数，则 $f\circ g$ 必为偶函数，这里 f 是任意的.

证明 $\forall x\in D$，由 g 为偶函数可得

$$(f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=(f\circ g)(x).$$

从而 $f\circ g$ 为偶函数.

例 1.7 设

$$f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in\mathbb{R},\ g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

则 g 为偶函数，且有

$$f\circ g=\mathrm{e}^{x^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

它是偶函数.

当内函数 g 为奇函数时，$f\circ g$ 的奇偶性由 f 的奇偶性决定. 当 f 也为奇函数时，$f\circ g$ 亦为奇函数；当 f 为偶函数时，$f\circ g$ 为偶函数.

证明 当 f, g 均为奇函数时，对 $\forall x\in D$.

$$(f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=(-f\circ g)(x).$$

此时，$f\circ g$ 为奇函数.

当 f 为偶函数，g 为奇函数时，对 $\forall x\in D$,

$$(f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=(f\circ g)(x).$$

即此时 $f\circ g$ 为偶函数.

例 1.8 设

$$f(x)=x^3,\quad x\in\mathbb{R}.$$
$$g(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}.$$

则 $(f\circ g)(x)=\sin^3 x$, $x\in\mathbb{R}$，它是奇函数.

例 1.9 设

$$f(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}.$$
$$g(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}.$$

则$(f\circ g)(x)=\cos\sin x$，$x\in\mathbb{R}$，它是偶函数．

设f为定义在D上的函数．若存在正数M，使得对任一$x\in D$，有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称f为D上的有界函数（bounded function）．

另外，有一个概念为有限．“有限”与“有界”是两个不同的概念，在分析学中区分这两个概念非常重要．简单地说，“有限”是指定义域内任一点的函数值都是一个有限的实数，而不能取到无穷（$\pm\infty$）．“有界”是指一个函数的所有函数值有一个共同的最大绝对值，其具体定义如上．

若$\forall x\in D$，$|f(x)|<+\infty$，则f为有限函数(finite function)．

于是由上面叙述可知：若f在定义域D上有界，则f在D上必有限．

例 1.10　设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\in\mathbb{R}-\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则f在$\mathbb{R}$上有界，当然也有限．

但反之不真，即若$f(x)$在定义域上有限，则在定义域上未必有界．亦即存在处处有限而处处局部无界的函数．

例 1.11　设

$$f(x)=\begin{cases}q,\ 当\ x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbb{N}_+,\dfrac{p}{q}为既约真分数,0<p<q\right),\\ 0,\ x\ 为(0,1)中的无理数.\end{cases}$$

显然，在$D=(0,1)$上f是有限的．但$\forall x_0\in(0,1)$，$\forall\delta>0$，$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$，有$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上无界．

因为对任意正整数M，满足$x_0+\delta'=\dfrac{P}{M}$，其中$0<\delta'<\delta$，P也为正整数，且$\dfrac{P}{M}$为既约真分数，都存在$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得

$$x=\frac{P}{M'},\ M'\in\mathbb{N}_+,\ M'>M,$$

此时$f(x)=M'>M$．即证$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上无界．

此例的“灵感”来源于分析中另一个非常经典的函数——Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & 当\ x=\dfrac{p}{q}\left(p\cdot q\in\mathbb{N}_+,\dfrac{p}{q}为既约真分数\right),\\ 0, & 当\ x=0,1\ 和(0,1)内的无理数.\end{cases}$$

Riemann 函数与 Dirichlet 函数是我们今后很多例子的直接来源．

例 1.12　设

$$f(x)=\frac{1}{x},\ D=(0,1].$$

$f(x)$在 D 上每一点都有限．但$f(x)$在 E 上无界．

设f为定义在数集 D 上的函数．若存在 $\sigma>0$，使得对一切 $x\in D$ 有

$$f(x\pm\sigma)=f(x),$$

则称f为周期函数（periodic function），σ 称为f的一个周期．若在周期函数f的所有周期中有一个最小的周期，则称此最小周期为f的基本周期或最小正周期．

常值函数是周期函数，但其不存在最小正周期．另外，存在无最小正周期的非常值周期函数．

例 1.13 考察 Diriohlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c.\end{cases}$$

则任意正有理数，r 均为它的周期．因为 $\forall r\in\mathbb{Q}_+$，$x\in\mathbb{R}$．

i）若 $x\in\mathbb{Q}$，则 $x+r\in\mathbb{Q}$，$D(x+r)=1=D(x)$；

ii）若 $x\notin\mathbb{Q}$，则 $x+r\notin\mathbb{Q}$，$D(x+r)=0=D(x)$．

因此 r 是 $D(x)$的一个周期．

但因正有理数集在标准排序下不具有良序性（well - ordering principle），即它不具有最小元，故 $D(x)$无最小正周期．

命题 1.2 无最小正周期的非常值函数必处处不连续．即若非常值周期函数在某点连续，则该函数一定存在最小正周期．

我们将在下一章介绍一元函数连续性时证明这一命题，同时也将给出更多关于函数连续性与存在最小正周期之间关系的命题．

若f是周期函数．则$|f|$必为周期函数，这是十分显然的，但此命题反之不真．

例 1.14 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\\ |\sin x|, & x<-\pi \text{ 或 } x>2\pi.\end{cases}$$

于是$|f|$是周期为 π 的周期函数，但f不是周期函数．

两个周期函数，其和未必是周期函数．

例 1.15 设$f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin\alpha x$ 都是$\mathbb{R}$上的周期函数，其中 α 是一个无理数，但$f(x)+g(x)=\sin x+\sin\alpha x$ 不是周期函数．

令

$$F(x)=f(x)+g(x)=\sin x+\sin\alpha x,$$

若设 $T>0$ 为 $F(x)$的一个周期，则 $F(x)=F(x+T)$，即

$$\begin{aligned}&\sin(x+T)+\sin\alpha(x+T)\\ &=\sin x\cos T+\cos x\sin T+\sin\alpha x\cos\alpha T+\cos\alpha x\sin\alpha T\\ &=\sin x+\sin\alpha x\end{aligned}$$

则有 $\cos T=1$，$\cos\alpha T=1$，故只有 $T=0$ 时成立，与 $T>0$ 矛盾故 $F(x)$不是周期函数．

但也存在两个周期函数，它们的周期不同，其和却仍为周期函数．

例 1.16　设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin\alpha x$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，其中 α 为正整数，则由例 1.15 分析知在 $\alpha\in\mathbb{Z}$ 的情况下能找到 $T\in\mathbb{R}$ 使得 $\cos\alpha T=1$，从而

$$f(x)+g(x)=\sin x+\sin\alpha x,\ \alpha\in\mathbb{Z}.$$

是周期函数.

至此，我们需要解决“何时两个周期函数的和仍是周期函数”这一问题. 更进一步还需解决“何时两个周期函数的差、积、商仍是周期函数”的问题.

设函数 f 与 g 分别是以 T_1 与 T_2 为周期的周期函数，当 $\dfrac{T_1}{T_2}\in\mathbb{Q}$ 时，f，g 的和、差、积、商仍为周期函数. 并以 T_1，T_2 的最小公倍数为其一个周期. 当 $\dfrac{T_1}{T_2}\in\mathbb{Q}$ 时，称周期函数 f，g 有可公度的周期（commensurable periodic）. 即当 f，g 有可公度的周期时，它们的和、差、积、商仍为周期函数，但具有可公度的周期只是两个函数的和、差、积、商仍是周期函数的充分条件，而非必要条件. 下面进行具体阐述.

定理 1.1　设 f，g 都是定义在 I 上的周期函数，其周期分别是 T_1、T_2，且

$$\frac{T_1}{T_2}=A=\frac{p}{q}(A\in\mathbb{Q}\,p\cdot q\in\mathbb{Z}_+\text{且}(p,q)=1),$$

则 $f\pm g, f\cdot g$，$\dfrac{f}{g}$（$g\neq0$）仍为周期函数. 若

$$M=qT_1=pT_2,\ x+M\in I,$$

则 M 为它们的一个周期.

证明　因为 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{p}{q}$，故 $qT_1=pT_2=M$，即 M 是 T_1 与 T_2 的最小公倍数. 又 T_1，T_2 分别是 f 与 g 的周期，则 M 为 f 与 g 的公共周期，即

$$f(x+M)=f(x),\ g(x+M)=g(x),$$
$$f(x+M)+g(x+M)=f(x)+g(x).$$

从而 M 为 $f+g$ 的一个周期.

同理可证 M 为 $f-g, f\cdot g$，$\dfrac{f}{g}(g\neq0)$ 的一个周期.

但存在两个周期函数 f 与 g. 它们之间无可公度的周期，但其和（差）仍为周期函数.

例 1.17　设 a，b，c 为 3 个两两不同的实数，对实数 x，令

$$\chi(x)=\begin{cases}1,\ x=0,\\0,\ x\neq0.\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-nb)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-nc),$$

$$g(x)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-mb-nc)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-nb).$$

于是有 f，g 分别以 a，b 为周期，$f+g$ 以 c 为周期，因为

$$f(x+a)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-(m-1)a-nb)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-(m-1)a-nc)=f(x)$$

$$g(x+b)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-(m-1)b-nc)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-(n-1)b)=g(x).$$

$$\begin{aligned}f(x+c)+g(x+c)&=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x+c-ma-nb)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-(n-1)c-ma)+\\&\quad\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-(n-1)c-mb)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x+c-ma-nb)\\&=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-mb-(n-1)c)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-(n-1)c)\\&=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-(n-1)b)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-(n-1)c)+\\&\quad\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-mb-(n-1)c)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\chi(x-ma-(n-1)b)\\&=f(x)+g(x).\end{aligned}$$

i）当 $a/b\in\mathbb{Q}$ 时，f 与 g 具有可公度的周期.

ii）当 $a/b\in\mathbb{Q}^c$ 时，f 与 g 不具有可公度的周期，但此时 $f+g$ 仍为周期函数.

例 1.18 设 x_1，x_2 为两个实数，若存在 j，m，$n\in\mathbb{Z}$，使得

$$x_1-x_2=j+m\sqrt{2}+n\sqrt{3},$$

则称 x_1 与 x_2 等价，记作 $x_1\sim x_2$，对任意实数 x，令

$$[x]=\{y\,|\,y\sim x,\ y\in\mathbb{R}\},$$

称 $[x]$ 为 x 的一个等价类.

可以证明：存在 $I\subset\mathbb{R}$，对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有唯一的一组数 (x^1,j,m,n)，其中 $x'\in I$，j，m，$n\in\mathbb{Z}$，使得

$$x=x'+j+m\sqrt{2}+n\sqrt{3}.$$

称上式为 x 关于 I 的分解式，并且分解式是唯一的. 规定

$$0=0+0\cdot1+0\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{3}.$$

定义

$$f(x)=2x'+j+n\sqrt{3},\ g(x)=x'-j+m\sqrt{2},$$

$$h(x)=f(x)+g(x)=3x'+m\sqrt{2}+n\sqrt{3}.$$

因 $x\in\mathbb{R}$ 的分解式唯一，所以

$$x+\sqrt{2}=x'+j+(m+1)\sqrt{2}+n\sqrt{3},\ x'\in\mathbb{R}.$$

也唯一.

$$f(x+\sqrt{2})=2x'+j+n\sqrt{3}=f(x).\ x\in\mathbb{R}.$$

即 f 是以 $\sqrt{2}$ 为周期的周期函数.

同理可证 g 是以 $\sqrt{3}$ 为周期的周期函数. h 是以 1 为周期的周期函数.

显然，$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$，即 f 与 g 不具有可公度的周期，但 $f+g$ 仍为周期函数.

注　事实上，在此例中还可以证明 f，g，h 分别以 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，1 为最小正周期.

本章中对周期函数可公度周期的介绍到此结束，在连续性一章中将对此进行进一步介绍并得出更多结论.

1.2　数列及其极限

若函数 f 的定义域为全体正整数集 $\mathbb{N}_+$，则称

$$f:\ \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R} \text{ 或 } f(n),\ n \in \mathbb{N}_+$$

为数列（sequence of number）通常将 $f(n)$ 写作

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

或 $\{a_n\}$，其中 a_n 称为数列的通项（general term）.

对于数列 $\{a_n\}$，存在某个定数 a. 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}_+$，当 $n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，定数 a 称作 $\{a_n\}$ 的极限（limit），记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{或 } a_n \to a(n \to \infty).$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列（infinitesimal）.

若 $\{a_n\}$ 存在广义极限 ∞，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，则称 $\{a_n\}$ 是一个无穷大数列或无穷大量.

对于数列 $\{a_n\}$，若 $\exists M \in \mathbb{R}_+$，使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，

$$|a_n| \leqslant M,$$

则称 $\{a_n\}$ 为有界数列，

若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必为有界数列，但反之不真.

例 1.19　取 $a_n = \sin n$，$n = 1, 2, \cdots$，显然

$$|a_n| \leqslant 1,$$

即 $\{a_n\}$ 为有界数列，但 $\{a_n\}$ 不收敛.

无穷大数列一定是无界数列，但无界数列未必是无穷大数列.

例 1.20　$\{0, 2, 0, 4, 0, 6, \cdots\}$，$\{n\cos n\}$，$\{n\sin n\}$ 均为无界数列，但它们并非无穷大数列，

所谓无界数列是指不存在一个正数使数列中每一项的绝对值都小于这个正数. 所谓无穷大数列是指任给一个正数，总存在某个正整数 N，当 $n > N$ 时，所有的 a_n 都大于这个事先给定的正数.

在无界数列中必存在某个子列是无穷大数列.

证明　设 $\{a_n\}$ 是一个无界数列，则任意 $M > 0$，存在 $a_N \in \{a_n\}$ 使得 $|a_N| > M$.

现取 $M = 1$，则存在 $a_{N_1} \in \{a_n\}$ 使得 $|a_{N_1}| > M = 1$；

取 $M = \max\{|a_{N_1}|, 2\}$，则存在 $a_{N_2} \in \{a_n\}$ 使得 $|a_{N_2}| > 2$；

取 $M=\max\{|a_{N_2}|, 3\}$，则存在 $a_{N_3}\in\{a_n\}$ 使得 $|a_{N_3}|>3$；

依此类推，取 $M=\{|a_{N_{n-1}}|, n\}$，则存在 $a_{N_n}\in\{a_n\}$ 使得 $a_{N_n}>M$. 这样便得到一个无穷大子列 $\{a_{N_n}\}$.

同时，一个无界数列与一个无穷大数列的乘积仍是无界数列.

证明 设 $\{a_n\}$ 是无界数列，$\{b_n\}$ 是无穷大数列.

假设 $\{a_nb_n\}$ 是有界数列，则存在 $M>0$，对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，有

$$|a_nb_n|<M.$$

因 $\{b_n\}$ 是无穷大数列，故存在 $n_1>0$，当 $m>n_1$ 时，有 $|b_m|>\sqrt{M}$. 又 $\{a_n\}$ 是无界数列，故存在 $n_2>n_1$，使得 $|a_{n_2}|>\sqrt{M}$.

现取 $m=n_2$，则

$$|a_mb_m|=|a_m|\cdot|b_m|>M,$$

这与假设矛盾，从而 $\{a_nb_n\}$ 是无界数列.

但两个无界数列的乘积未必仍是无界数列.

例 1.21 设

$$a_n=\begin{cases} n, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

显然 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为无界数列，但其乘积为常数数列，从而有界.

无穷大数列乘以一个数列后未必仍为无穷大数列. 同样，无穷小数列乘以一个数列后未必仍为无穷小数列.

例 1.22 取 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 为无穷小数列，$b_n=n$ 为无穷大数列. $\{a_nb_n\}$ 为一常数数列，它既不是无穷大数列，也不是无穷小数列.

在后面函数极限中它有类似的例子. 需要指出的是，对于无穷小数列，若加一些限制条件，则有如下命题.

命题 1.3 无穷小数列乘以任意有界数列仍为无穷小数列.

证明 设 $\{a_n\}$ 为无穷小数列，$\{b_n\}$ 为任意有界数列.

因 $\{b_n\}$ 有界，故存在 $M>0$ 及 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有

$$|b_n|<M.$$

又 $\{a_n\}$ 为无穷小数列，故 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有

$$|a_n|<2/M.$$

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，则当 $n>N$ 时，

$$|a_nb_n|=|a_n|\cdot|b_n|<M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon.$$

即 $\{a_nb_n\}$ 为无穷小数列.

但需要注意的是：无穷大数列乘以任意有界数列未必仍为无穷大数列.

例 1.23 取

$$a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}\quad b_n=n,$$

则 $\{a_n\}$ 为有界数列，$\{b_n\}$ 为无穷大数列．但

$$a_nb_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

不是无穷大数列．

另外，无穷多个无穷小数列之和未必仍为无穷小数列．

例 1.24　对于每一个

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\ \frac{1}{\sqrt{n^2+2}},\ \frac{1}{\sqrt{n^2+3}},\ \cdots,$$

它们都是无穷小数列，但其和不是无穷小数列，因

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}=\infty.$$

两个非无穷小数列之积可能为无穷小数列；两个非无穷大数列之积可能为无穷大数列．

例 1.25　设

$$a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

它们均非无穷小数列，但 $\{a_n,b_n\}$ 为无穷小数列．

设

$$c_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}\qquad d_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

它们均非无穷大数列，但 $c_n\cdot d_n=n$．即 $\{c_n\cdot d_n\}$ 为无穷大数列．

下面，我们讨论发散数列．

若数列 $\{a_n\}$ 不存在极限，则称 $\{a_n\}$ 不收敛，或称 $\{a_n\}$ 为发散数列．对于之前提及的 $\{a_n\}$ 存在广义极限 ∞ 的情况，我们称数列 $\{a_n\}$ 发散于无穷大．

两个发散数列的和、积未必发散．

例 1.26　设

$$a_n=(-1)^n,\ b_n=(-1)^{n+1},$$

它们都是发散数列，但 $a_n+b_n=0$，即 $\{a_n+b_n\}$ 为收敛数列．

设

$$C_n=\frac{1+(-1)^n}{2},\ d_n=\frac{1-(-1)^n}{2},$$

同样它们也都是发散数列，但 $c_n\cdot d_n=0$，即 $\{c_n\cdot d_n\}$ 为收敛数列．

而一个发散数列与一个收敛数列的乘积则不确定其是否收敛．

例 1.27　设

$$a_n=n,\ b_n=\frac{1}{n},$$

则$\{a_n\}$发散，$\{b_n\}$收敛，$a_n \cdot b_n = 1$，即$\{a_n \cdot b_n\}$收敛.

设

$$c_n = n^2,\ d_n = \frac{1}{n},$$

则$\{c_n\}$发散，$\{d_n\}$收敛，$c_n \cdot d_n = n$，即$\{c_n \cdot d_n\}$发散.

但对于发散数列与收敛数的和，我们可以确定其敛散性. 即一个发散数列与一个收敛数列之和仍为发散数列.

证明 1 设$\{a_n\}$收敛到A，$\{b_n\}$发散，则

(1) $\forall \varepsilon > 0$，存在$N_1 \in \mathbb{N}_+$，当$n > N_1$时，$|a_n - A| < \varepsilon$.

(2) $\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall B \in \mathbb{R}$，$\forall N_2 \in \mathbb{N}_+$，$\exists n_0 > N_2$，$|b_{n_0} - B| \geqslant \varepsilon_0$.

不妨限制$\varepsilon < \varepsilon_0$，$\forall C \in \mathbb{R}$，可将$C$表示为$C = A + B$，则$\exists \varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon$，取$N = N_1 + N_2$，$\exists n_1 > N$，

$$\begin{aligned} |a_{n_1} + b_{n_1} - c| &= |a_{n_1} + b_{n_1} - A - B| = |a_{n_1} - A + b_{n_1} - B| \\ &\geqslant |b_{n_1} - B| - |a_{n_1} - A| \geqslant \varepsilon_0 - \varepsilon = \varepsilon_1. \end{aligned}$$

即证$\{a_n + b_n\}$是发散的.

证明 2 设$\{b_n\}$收敛，$\{a_n\}$发散，假设$\{a_n + b_n\}$收敛，则由极限的四则运算法则，$\{(a_n + b_n) - b_n\}$收敛，即$\{a_n\}$收敛，这与假设矛盾，因此$\{a_n + b_n\}$发散.

在上述证明中用到了极限的四则运算法则，它是收敛数列的一条重要性质. 下面，我们选择另一条收敛数列的性质进行讨论.

性质 1.1 （保不等式性）设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为收敛数列. 若存在正数N_0，使得当$n > N_0$时有$a_n \leqslant b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

在此性质中若将等号去掉，则结论未必正确. 即在上述性质中，若$a_n < b_n$，未必有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

例 1.28 设$a_n = \dfrac{1}{n}$，$b_n = \dfrac{2}{n}(n = 1, 2, \cdots)$. 此时$a_n < b_n$，但

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

最后我们以两个反例来结束本节的讨论.

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. 但其逆不真.

例 1.29 设$a_n = (-1)^n$，显然$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$，但$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在.

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$（$l \neq 0$为一常数），则必有$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. 但其逆不真.

例 1.30 设$a_n = \alpha_n^{\ \beta} + \gamma$，$\alpha$，$\gamma \in \mathbb{R}$，$\beta \in \mathbb{Z}_+$. 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

但$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在.