

# 小波矩阵分析的 新视野 及其应用

张旭俊 上官帖 张爱民 著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

# 小波矩阵分析的 新视野 **及其应用**

张旭俊 上官帖 张爱民 著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

## 内 容 提 要

本书从小波矩阵分析的全新角度解析小波的本质,能从时域中直接理解正交小波的分解与重构,绕开了傅立叶积分运算的困惑。为了和经典理论学习相衔接,本书对 Daubechies 正交小波族、样条小波和双正交小波作了另类的分析与推导。本书也介绍了“经验模态分解法(EMD)”、“Hanning 窗”、“Prony 分解”等。本书最后介绍了小波矩阵分析在电力系统中的应用,如状态检修、故障预测等。

本书公式推导详尽,图文并茂,并和经典小波理论建立有机联系,有利于读者对比理解。本书可供高等院校计算机、信息、电力类专业师生以及一般工程技术人员参考使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

小波矩阵分析的新视野及其应用/张旭俊,上官帖,张爱民著. —北京:中国电力出版社,2017.8  
ISBN 978-7-5198-0224-0

I. ①小… II. ①张… ②上… ③张… III. ①小波理论-矩阵分析-应用-电力系统 IV. ①TM7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 092687 号

---

出版发行:中国电力出版社

地 址:北京市东城区北京站西街 19 号(邮政编码 100005)

网 址:<http://www.cepp.sgcc.com.cn>

责任编辑:潘宏娟 崔素媛(010-63412398)

责任校对:常燕昆

装帧设计:左 铭

责任印制:蔺义舟

---

印 刷:北京市同江印刷厂

版 次:2017 年 8 月第一版

印 次:2017 年 8 月北京第一次印刷

开 本:787 毫米×1092 毫米 16 开本

印 张:15.5

字 数:345 千字

印 数:0001—2000 册

定 价:52.00 元

---

版权专有 侵权必究

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换



## 前 言

---

小波分析是近 20 多年来迅速发展起来的新兴学科，它可对非平稳过程的波形进行时频分解，是继傅立叶分析方法之后的重大进展，经典小波理论由数学家 Y. Meyer 与 S. Mallat 合作建立多尺度分析方法，它涉及的数学深奥难懂，推广比较困难。除了 Haar 小波具有显式的公式外，其他人们追求的小波都没有明显的表示式。本书的目的是从小波矩阵另一个角度解析小波的本质，能从时域中直接理解正交小波的分解与重构，绕开了傅立叶积分运算的困惑，概念清晰，理解容易，小波理论不再神秘，只要具有高等数学和线性代数的基础就可理解。

——本书认为任何复杂的函数均可由密集的等距采样数据序列予以描述，所以用离散小波分析仍不失一般性。把 Haar 小波的正交性用矩阵表达，又引出双尺度分解的 Mallat 循环小波矩阵，使得 Daubechies 正交小波族、双正交小波、样条小波也能用 Mallat 小波矩阵予以表达，并可进行多分辨率分解与重构。多分辨率分析采用二进尺度扩展，正是这一点保证小波矩阵分解能得到唯一的重构结果，且信息没有冗余。本书对各种小波族用小波矩阵进行大量的实例分析。

为了和经典理论学习相衔接，本书对 Daubechies 正交小波族的推导作了更简易明了的分析，对样条小波和双正交小波作了另类的分析与推导。本书公式推导详尽，图文并茂，并和经典小波理论建立有机联系，有利于读者对比理解，使之豁然开朗。

本书也介绍了“经验模态分解法 (EMD)”、“Hanning 窗”、“Prony 分解”等。对状态检修、故障预测作了系统叙述。

本书作者曾参与国网江西省电力科学研究院马建教授级高工主持的“广义电能质量分析仪”课题研究，包括三相电参数测量、谐波分析和用“异步电流能量”新观点构成新仪器，对现场电炉炼钢、电气化机车进行大量的测量分析，在书中有大量的引用。特别是后续的“采算分离”课题，在硬件上采用直流电流互感器，能对包括非周分量在内的波形进行采样和数据序列的存储，并应用经典的 MATLAB 软件中“Hanning 窗”、“Prony 分解”、“小波分解”等程序作谐波、小波分析等，以便于仪器测量分析人员学习和理解。

本书由国网江西省电力科学研究院张旭俊、上官帖、张爱民三位教授级高工著。其中，张旭俊教授级高工主笔第1~7章，提出小波矩阵分析理论和有关时频分析方法的改进等。上官帖教授级高工主笔第8章，从状态检修、故障预测方面作了系统叙述，介绍了小波矩阵分析在电力系统中的应用。张爱民教授级高工是互感器设计制造方面的专家，主笔有关抗铁磁谐振三相电压互感器的特性试验、运行分析等内容。衷心感谢国网江西省电力公司电力科学研究院对本书研究、出版工作的大力支持。

由于本书许多内容是新观点的突破，书中难免有不妥之处，恳请同行专家和读者批评指正。

作者

2017年1月

# 目 录

前言

绪论 .....	1
<b>第 1 章 小波分析快速入门和应用 .....</b>	<b>3</b>
1.1 傅立叶级数 .....	3
1.2 傅立叶积分 .....	4
1.3 窗口傅立叶变换 .....	5
1.4 经典小波定义 .....	9
1.5 Haar 小波和 Haar 小波矩阵 .....	10
1.6 离散数据的小波分析 .....	15
1.7 用 Haar 小波矩阵来分析双尺度分解 .....	16
1.8 Haar 小波和 Mallat 矩阵的引出 .....	21
1.9 Haar 小波矩阵的多尺度分解 .....	26
1.10 用 Haar 小波进行多尺度分解的实例 .....	32
<b>第 2 章 Daubechies 小波和 Mallat 矩阵 .....</b>	<b>34</b>
2.1 Db4 小波和它的 Mallat 矩阵引出 .....	34
2.2 Db4 小波矩阵正交性的改进 .....	35
2.3 Db4 小波大数据矩阵的形成 .....	39
2.4 Db4 小波矩阵的多尺度分解 .....	42
2.5 多尺度分解的唯一性 .....	48
2.6 用 Db4 小波进行多尺度分解的实例 .....	49
2.7 用 Db6、Db10、Db20 小波在尺度 3 分解的对比实例 .....	53
2.8 用 Db6 小波 16 阶矩阵进行双尺度分解 .....	56
<b>第 3 章 经典理论 Daubechies 小波族 .....</b>	<b>60</b>
3.1 用经典理论推出 Daubechies 小波族 .....	60
3.2 Daubechies 小波族 Db4 .....	63
3.3 Daubechies 小波族 Db6 .....	65
3.4 用 Riesz 定理计算 Db2N 高阶系数 .....	67
3.5 用 Riesz 定理计算 Db2N 高阶系数的程序 .....	68



3.6	Daubechies 小波族 Db8 .....	75
3.7	Db8 系数计算的程序调用步骤.....	78
3.8	Daubechies 思路的分析 .....	82
3.9	Daubechies 小波族的尺度波形系数 .....	84
<b>第 4 章</b>	<b>样条小波和双正交小波矩阵的引入 .....</b>	<b>87</b>
4.1	样条小波和双正交小波 $H(4)$ 的引入 .....	87
4.2	Franklin 双正交小波 $H(3)$ 的引入 .....	99
4.3	双正交小波 $H(6)$ 、 $H(8)$ 、 $H(10)$ 的引入 .....	101
4.4	用样条函数 $H(7)$ 双正交小波的引入 .....	104
4.5	用样条函数 $H(11)$ 双正交小波的引入 .....	109
4.6	Haar 小波分解和双抛物线光滑插值重构.....	114
4.7	三次样条函数的引入 .....	121
4.8	CHaar 小波的定义 .....	126
4.9	二维图像的低频滤波过程 .....	127
4.10	二维图像的高频滤波过程.....	130
4.11	彩色图像的处理原则.....	130
4.12	用小波矩阵分析二维图像的经典分解.....	131
<b>第 5 章</b>	<b>对采样数据序列进行时频分解法的改进.....</b>	<b>134</b>
5.1	经验模态分解 (EMD) .....	134
5.2	按时间尺度分层 CHaar 小波分解方法 .....	136
5.3	按时间双尺度的数学模态分解的方法 .....	138
5.4	数学模态分解的实例 .....	139
5.5	CHaar 小波分解和 Haar 小波分解的关系 .....	140
5.6	Prony 分解的本质及算法的思路 .....	140
5.7	用分段平均值压缩滤波改善 Prony 算法 .....	143
5.8	高次方程阶 $k$ 的自动确定.....	144
5.9	压缩滤波倍数对 Prony 计算结果的影响 .....	145
5.10	根的排序和病态项的剔除.....	147
5.11	Prony 分析对采样数据的要求 .....	148
5.12	四种分析方法的对比.....	149
<b>第 6 章</b>	<b>多项式方程求复根和稳定判据 .....</b>	<b>151</b>
6.1	林士铎—Bairstow 方法 .....	151
6.2	多项式方程求复根实例 .....	154
6.3	多项式方程求复根的迭代初值选择 .....	154
6.4	对特征多项式方程的各种稳定判据的优缺点分析 .....	155
6.5	连分式负定判据 .....	156
6.6	劳斯判据、古尔维茨判据和连分式判据之间的关系 .....	157

6.7	连分式判据、劳斯判据、古尔维茨判据三者之间的关系 .....	159
6.8	米哈伊洛夫判据 .....	161
<b>第7章</b>	<b>Hanning窗的本质及其应用 .....</b>	<b>163</b>
7.1	非同步采样时谐波分解和频谱泄漏 .....	163
7.2	Hanning窗分解 .....	165
7.3	非同步采样数据的谐波分解 .....	169
7.4	含分次谐波非同步采样的谐波分解 .....	170
7.5	谐波幅值变化的非同步采样的分析 .....	171
7.6	非正弦波形下各种无功功率定义的本质 .....	173
7.7	三相功率因素多种定义的剖析 .....	178
7.8	对三相瞬时无功功率理论本质及其缺陷的分析 .....	181
<b>第8章</b>	<b>小波矩阵分析在电力系统中的应用 .....</b>	<b>187</b>
8.1	故障分析 .....	188
8.2	接地选线 .....	195
8.3	故障测距 .....	198
8.4	波形识别 .....	199
8.5	电能质量分析的新判据 .....	203
8.6	化工厂12相全波可控整流负荷 .....	208
8.7	电动机转子断条的特征 .....	211
8.8	变压器励磁涌流和内部故障电流的分辨 .....	214
8.9	半波整流负荷对电能计量的影响 .....	216
8.10	抗铁磁谐振三相电压互感器的暂态响应 .....	217
8.11	绝缘子放电 .....	221
8.12	故障时刻判断 .....	222
8.13	电力负荷预测 .....	222
8.14	小波分析在智能变电站的应用 .....	223
<b>参考文献</b>	<b>.....</b>	<b>236</b>



## 绪 论

小波分析是 20 世纪的数学里程碑,随着非平稳过程分析的出现,需要对等时间隔采样数据序列进行时频波形分解,这样以往傅立叶级数分解的方法已不能满足要求。小波分析理论发展,是从加窗的傅立叶变换开始,它涉及广义积分,积分范围从  $-\infty$  到  $+\infty$ ,理解比较困难。除了 Harr 小波具有显式的公式外,其他小波  $\Psi(t)$  都没有明显的表示式,在提出小波需满足正交条件下,作了一系列的推导,而最后小波  $\Psi(t)$  公式依然是“犹抱琵琶半遮面”未能出现。

法国数学家 Mayer 指出 Haar 小波是唯一能进行全频次的小波分解<sup>[2]</sup>,它具有完备的正交基。但由于 Haar 小波分解的结果,包括各个频次的波形都是带有棱角的台阶波,显然它不符合工程上对参数变化函数都具有光滑可微的经验,它的不连续、不可微特点也不被数学家接受。小波理论又提出双尺度分解得以解决<sup>[2][4]</sup>,即它把原始波形  $F$  每次只进行一个尺度的分割,把它分解为“低频的主波  $F_1$ ”和“高频的细波  $X_1$ ”,接着又把“低频的主波  $F_1$ ”进行第二次分割为“低频的主波  $F_2$ ”和“高频的细波  $X_2$ ”,从而达到多分辨率分解。为此数学家 Mallat 作出了重大贡献<sup>[4]</sup>,它给出了小波分解和小波重构的公式,称作 Mallat 分解,可与傅立叶快速分解的 FFT 媲美。为了寻找正交的小波,Daubechies 以她高超和敏锐的数学技巧,找出了一系列的正交小波<sup>[3][4]</sup>,特称之为 Db2N 小波,其中 Db2 就是 Haar 小波,而 Db4、Db6、 $\dots$ 、Db20 等都是 Daubechies 的不同支撑区小波,它们支撑区为  $2N$  个数据点,本书对 Daubechies 小波推导详尽、严谨,推演方法巧妙,读者容易理解。小波分析理论从连续函数  $f(t)$  的时频分解开始,而其后的的小波推导牵涉的数学内涵更为复杂,难怪有些工程专家也感到“小波理论令人眼花缭乱,不得要领”。

本书写作的要旨是开门见山,循序渐进,任何复杂的函数总是可以用等距采样的数据序列来描述,所以本书主要讨论二进小波分析<sup>[9][11]</sup>,避开连续函数的小波分析,反而使小波分析概念变得清晰,它保证原始函数小波分解的唯一性,同时小波重构原函数时信息没有冗余,所以也不失讨论问题的一般性。用矩阵方法阐明 Haar 小波、Daubechies 小波、Mallat 分解等的意义。把尺度系数、小波系数放入矩阵,验证其正交特性,阐明“二倍压缩分解”和“二倍膨胀重构”的机理,一目了然。用矩阵表达概念相当于从时域理解小波的正交性,绕开了傅立叶积分变换,更便于理解,但当数据很长时,矩阵阶数必然很大,书写就很困难,所以也给出分解程序和重构程序,及其相应的计算公式。本书还改进了 Haar 小波,称作 CHaar 小波分解,它是用 Haar 小波作分解,只保留中心值,再用样条函数插值,能得到光滑可微的低频主波的重构结果,并进行大量的实例应用,能使

读者开卷受益。

本书还指出由连续函数推导出的 Daubechies 小波, 在应用于有限的数据序列时, 会产生正交性的损失<sup>[15]</sup>, 本书对它加以改进, 使 Daubechies 小波正交性分析的光彩无损。本书着重于分析离散的采样数据序列, 借用矩阵正交性的概念避免了必须用傅立叶积分变换的理论, 本书并给出各种尺度下的小波波形的矩阵公式, 一开始就摘下小波隐隐约约的面纱, 读了本书的方法后, 对于阅读经典小波论著有对比启发之功效。

用小波矩阵来说明双正交小波的形成更为方便, 也更易于理解。所谓的双正交小波, 从矩阵的角度看, 就是小波矩阵  $A$  和它的小波逆矩阵  $A^{-1}$  组成的双正交小波矩阵, 它们彼此不同但互为逆矩阵。至于正交小波矩阵  $B$ , 需要满足  $B \cdot B^T = E$ , 即正交小波矩阵和它的转置矩阵是互逆矩阵。事实上寻找正交小波矩阵艰难, 而构成双正交小波矩阵还更容易些<sup>[2]</sup>, 据此还可以给样条小波分解开辟新途径。

1998年由美籍华人黄博士提出的“经验模态分解法 (EMD)”<sup>[24]</sup>, 也是对数据序列进行时频分解的新方法, 这个方法的麻烦在于需要极大值的上包络线和极小值的下包络线, 本书简化和规范了这个方法, 更便于工程实际上的应用, 它和 Haar 小波的改进有密切的关系<sup>[16]</sup>。

为了配合电力系统中实例应用, 本书有专门一章讨论小波在电力系统故障检测中的应用, 其中包括电能质量分析方面的创新理念<sup>[28][13]</sup>。

本书还介绍了对具有振荡衰减函数的分析, 即 Prony 分解, 它也是属于非平稳过程的分析。Prony 分解对噪声影响非常敏感, 为了计算过程稳定和简化, 关键是要能自动确定主模态的项数, 本书都有重要的改进算法<sup>[30]</sup>。

作为相应数学知识的补充, 书中也介绍了三次样条光滑拟合算法, 和高次多项式方程求复根的迭代计算方法<sup>[8]</sup>, 这对于小波分析和线性系统暂态过程的稳定分析有帮助。当高次多项式方程求复根的迭代过程不能收敛时, 本书也介绍了几个利用高次多项式方程系数来判定稳定的方法<sup>[7][29]</sup>。

随着数字变电站的出现, 数据采样是按定时间间隔采样, 它和实际的周期函数不同步, 它不便于谐波分析 FFT 计算, 本书也介绍了“Hanning 窗”的分析, 它也体现了傅立叶积分变换具体应用的一个很好的例子。本书还论述了非正弦波形下两种无功功率定义的优劣分析<sup>[26]</sup>, 三相不对称负荷下三相功率因素定义<sup>[27]</sup>, 以及非正弦波形下三相瞬时无功功率概念的本质及其缺陷<sup>[17]</sup>等。

本书的宗旨是籍高等数学和线性代数的有限知识, 用全新的角度阐明小波矩阵分析的意义, 书中公式推导详尽, 图文并茂, 并和经典小波理论建立有机联系, 有利于读者对比理解, 使之豁然开朗。

## 小波分析快速入门和应用

小波分析是当前应用数学中一个迅速发展的新领域，与傅立叶级数主要是研究周期函数频谱分析相比，小波分析着重于非平稳过程中的时频分解，它除了与傅立叶积分变换、加窗的傅立叶变换有关外，还涉及更多数学领域问题。本章先简单回顾傅立叶级数和傅立叶积分变换之间的关系，点明经典小波定义，然后快速转入 Haar 小波和 Haar 小波矩阵的描述，使正交小波的概念先从时域中建立起来，使小波不再神秘。

### 1.1 傅立叶级数

任何周期函数总是可以分解为由一系列频率递增的正弦波所组成，即傅立叶级数：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t] \quad (1-1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1-2)$$

$T$  是基波周期； $\omega_0$  是基波角频率；

式中， $\sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t, \dots, \sin k\omega_0 t, \cos k\omega_0 t \dots$  组成正交基。如果把  $\sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t$  看成是基波的姐妹，而把  $\sin k\omega_0 t, \cos k\omega_0 t$  看成是基波的子孙，则傅立叶级数展开具有“各代子孙波形都相似；各代子孙波形都正交”的特点

它们各次正弦和余弦之间符合正交的关系，其复数形式为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1-3)$$

从而可得出傅立叶分解的各项系数如下：

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \cdot dt \quad (1-4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t \cdot dt \quad (1-5)$$

一旦求出了傅立叶各项系数，人们自会联想起各个分项的波形，它们在全数轴都是周期波。用傅立叶级数反演重构时，只要傅立叶级数包含谐波的项数足够多，则不论原始波形多么怪异复杂，都能“鬼斧神工”般地把原始波形再现出来，它适用于平稳过程的研究。

用复数表示傅立叶分解系数，将有：

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt \quad (1-6)$$

图 1-1 所示为一个周期函数的谐波分解图。

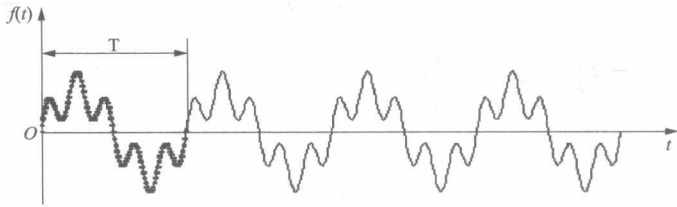


图 1-1 周期函数的谐波分解

## 1.2 傅立叶积分

将周期函数积分区间扩大  $m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) 个周期, 并将结果缩小  $m$  倍, 则所得结果  $a_k$ 、 $b_k$  也应相同, 即

$$c_k = \frac{1}{mT} \int_{-mT/2}^{mT/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt \quad (1-7)$$

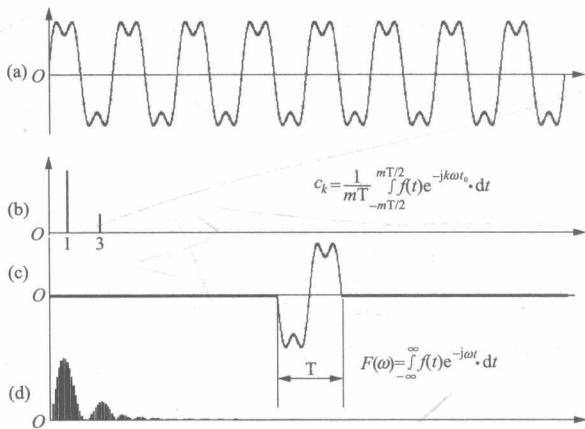


图 1-2 用频谱图来理解傅立叶级数和傅立叶积分之间的关系

(a) 周期函数; (b) 频谱; (c) 单周小波; (d) 频谱

为了揭示傅立叶级数和傅立叶积分的内在联系, 现假设  $f(t)$  除了一个周期  $T$  内有值, 其他都是零, 于是  $f(t)$  就变成小波, 如图 1-2 所示。即  $f(t)$  只在时轴上某个  $T$  区间有值, 而且很快就会向两侧衰减趋于零, 用数学方式表达就是  $\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 \cdot dt < A$ 。

若令:  $\omega = k\omega_0; m \rightarrow \infty$

$$c_k \cdot mT = F(\omega) \quad (1-8)$$

令积分的区间  $mT$  趋向无穷大, 则可得到傅立叶积分式 (1-9), 这是

广义积分, 它省略了式 (1-7) 前面的  $\frac{1}{mT}$  系数, 这是为了避免整个数值趋于零的缘故。傅立叶变换公式为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \cdot dt \quad (1-9)$$

对比式 (1-9) 和式 (1-7), 可以看出傅立叶积分和傅立叶级数之间的差别与联系。傅立叶积分的反演公式可以按  $m \rightarrow \infty$ , 而  $\frac{2\pi}{mT} = \frac{\omega_0}{m} \Rightarrow d\omega$  如下思路推出, 即

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{mT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\
 &= \frac{\omega_0}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \frac{\omega_0}{m} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned} \tag{1-10}$$

傅立叶积分是广义积分，一般函数的傅立叶积分通常不能用显式表达，而经典小波理论就是由广义积分即傅立叶积分导出的，这往往是困扰读者的原因。小波快速入门就是想直接由时域的正交理论导出小波分解，就像傅立叶级数分解那样容易理解。有时为了对小波的傅立叶积分有粗略理解，也可以通过 FFT 变换的频谱图加以理解，如图 1-2 所示。

**例 1:** 高斯函数  $g(t) = e^{-t^2}$  (1-11)

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+j\omega/2)^2 - \omega^2/4} dt = e^{-\omega^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\
 &= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}
 \end{aligned} \tag{1-12}$$

本例说明时域中的高斯函数  $e^{-t^2}$  经过傅立叶积分变换后仍然是频域中高斯函数  $\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$ 。

### 1.3 窗口傅立叶变换

经典小波定义是从采样数据要进行时频分解的要求开始的，如图 1-3 所示  $f(t)$  是等幅的变频曲线，在每一时区其频率不同，为了提取出某一个时区内的波形作分析，需要加一个具有高斯函数的窗口  $g(t-\tau)$  来提取函数  $f(t) \times g(t-\tau)$ ，其中  $\tau$  是沿时轴方向的位

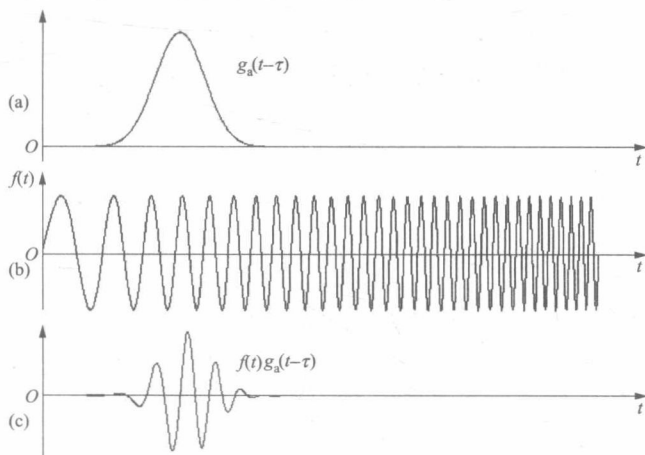


图 1-3 变频函数及其加窗后的波形

(a) 窗口函数波形；(b) 待分析的函数波形；(c) 加窗后的波形

移。之所以采用  $g(t-\tau)$  窗口，主要是为了避免方波窗口会引起的边缘频谱。

如图 1-4 所示，为了分析时区内的频率，对应窗口的宽度必须要保持两个周波内容，才能较好确定时频分布。

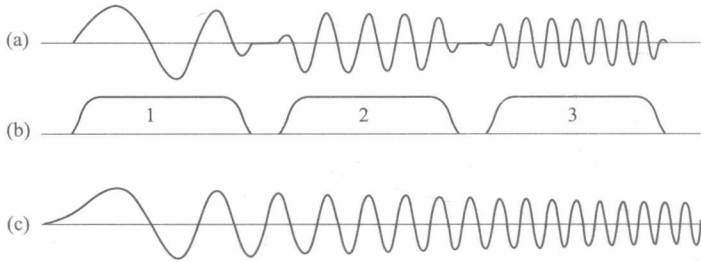


图 1-4 用较宽窗口提取变频波形  
(a) 窗口波形；(b) 窗口；(c) 原始波形

如图 1-5 所示，对应窗口的宽度没有保持两个周波内容，就不能确定此刻的时频分布。

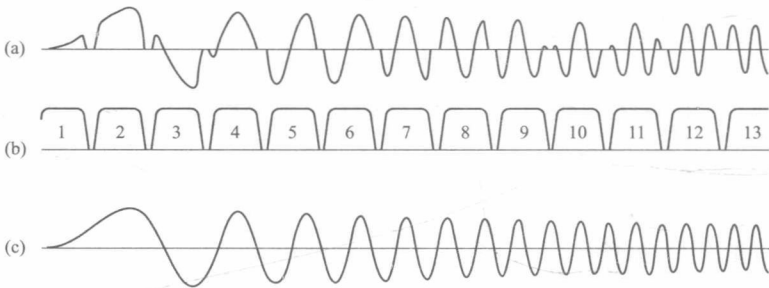


图 1-5 用较窄窗口提取变频波形  
(a) 窗口波形；(b) 窗口；(c) 原始波形

时频分解的本意，是要能够依据分解得到的信息重构原函数，这有点像傅立叶级数那样分解又重构的做法。因而最关键的是如何确定窗口的宽度和彼此窗口之间的移位间距。移位间距太密会导致重构时的信息冗余。例如，Gabor 变换如下：

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-(t/2a)^2} \quad (1-13)$$

用尺度为  $2a$  的 Gabor 函数对  $f(t)$  加窗进行变换，公式如下：

$$Gf(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_a(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \quad (1-14)$$

再把  $Gf(\omega, \tau)$  函数进行连续移位积分，却得到  $f(t)$  不加窗时的变换结果，推导过程如下：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(\omega, \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_a(t-\tau) e^{-j\omega t} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t-\tau) d\tau \right) dt \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-[(t-\tau)/2a]^2} d\tau \right) dt \quad (1-15)$$

令  $(t-\tau) = -2au$ ，得到  $d\tau = 2adu$ ，将其代入上式，得出

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(\omega, \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-u^2} \cdot 2adu \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega) \end{aligned} \quad (1-16)$$

从此可以看出  $f(t)$  对于任何一个尺度  $2a$  的 Gabor 函数加窗后作傅立叶变换，经过连续移位积分复原，最后都得到  $F(\omega)$ ，这是信息极大冗余的结果，其中关键是下一个恒等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-[(t-\tau)/2a]^2} d\tau \equiv 1 \quad (1-17)$$

如前述一个固定的窗口是不能做好时频分解的，如果我们对  $f(t)$  用同一尺度的 Gabor 函数加窗后作 FFT 变换，可得出中心位置的频率，适当的位移，可得出不同时刻的中心位置的频率，如图 1-6 和图 1-7 所示。图中所说汉宁次数，是把 1024 点的宽度，称作汉宁基波 1 次，从而把窗口波形做汉宁频谱分解，得出谐波次数，特称之为汉宁次数。改变  $f(t)$  加窗 Gabor 函数的尺度，再做 FFT 变换，不同窗口宽度但在同一位移地点所得出中心位置的频率是一样的，详见表 1-1 和表 1-2。

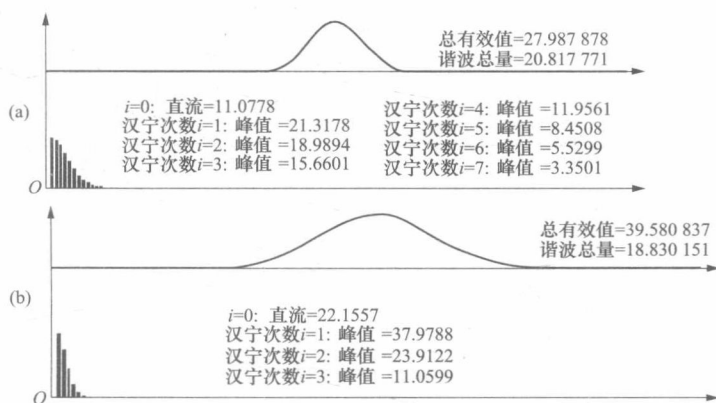


图 1-6 不同宽度的高斯窗口波形及其频率含量

(a) 窄窗口；(b) 宽窗口

表 1-1

用窄窗口移位提取中心频率

宽度 $a$	窗口中心移位	中心频率谐波次数	中心频率相角	最大幅值
窄窗口 64 点	256	19 次	-181.9686	10.1823
	512	32 次	-127.9289	10.1936
	768	45 次	-181.9685	10.1823
基波点数	1024 点			



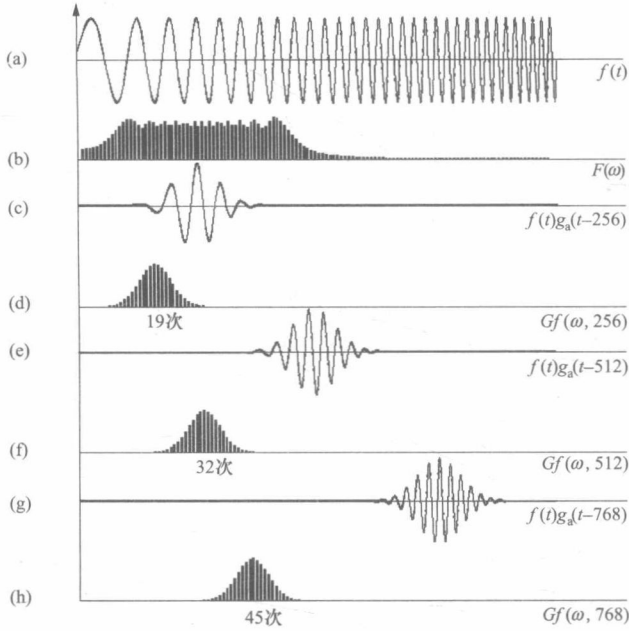


图 1-7 以窄窗口在不同时刻提取波形做频谱分析

(a) 原始波形；(b) 总频谱分布；(c) A 窗口小波；(d) 19 次频谱分布；  
 (e) B 窗口小波；(f) 32 次频谱分布；(g) C 窗口小波；(h) 45 次频谱分布

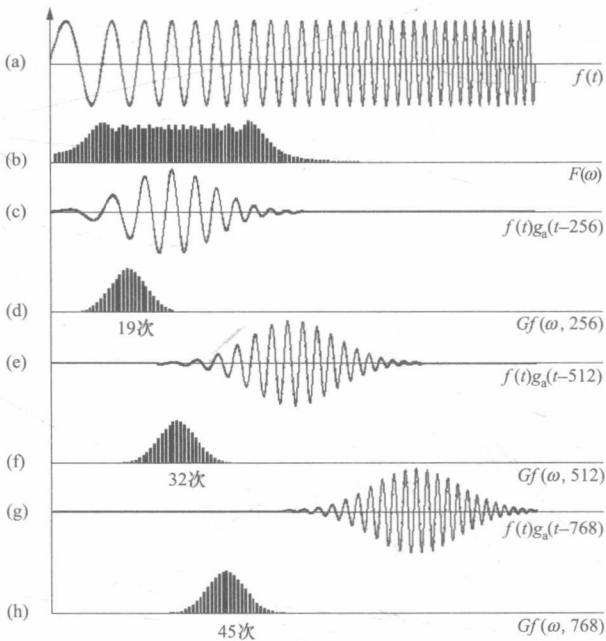


图 1-8 以宽窗口在不同时刻提取波形做频谱分析

(a) 原始波形；(b) 总频谱分布；(c) A 窗口小波；(d) 19 次频谱分布；  
 (e) B 窗口小波；(f) 32 次频谱分布；(g) C 窗口小波；(h) 45 次频谱分布

表 1-2

用宽窗口移位提取中心频率

宽度 $a$	窗口中心移位	中心频率谐波次数	中心频率相角	最大幅值
宽窗口 128 点	256	19 次	-163.9446	13.4684
	512	32 次	-109.8484	13.4713
	768	45 次	-183.8901	13.4741
基波点数	1024 点			

对比表 1-1 和表 1-2 可知,窄窗口和宽窗口在相同的位移点的中心频率是相等的,同一窗口下各位移点的最大幅值是相同的,而不同窗口下各位移点的最大幅值是不同的。

## 1.4 经典小波定义

经典小波  $\Psi(t)$  如图 1-9 所示,它是一个数值集中在某个小区间之内,并向两侧很快衰减的波形,小波可以通过伸缩尺度  $a$  和移位间隔  $b$  来形成它的子小波  $\Psi_{a,b}(t)$ ,即

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1-18)$$

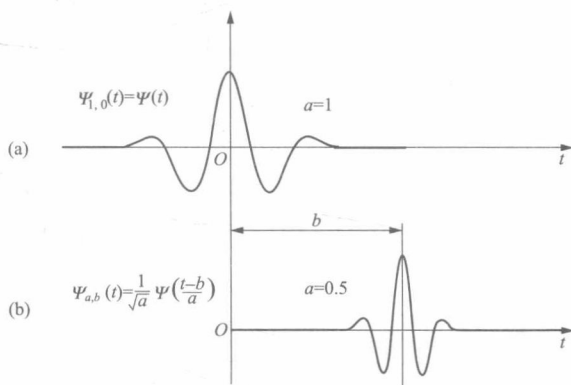


图 1-9 经典小波理论小波图像的伸缩和位移示意图

(a) 原图; (b) 伸缩和位移后

如图 1-9 所示,其中  $\Psi(t) = \Psi_{1,0}(t)$  是母小波,它只在原点附近某区间内有值,并向两侧快速衰减到零, $\Psi_{a,b}(t)$  是和  $\Psi_{1,0}(t)$  相似的波形,由式 (1-18) 可知,  $b$  是在时轴上的位移,  $a$  是小波在时轴上的伸缩系数。当  $a=1$  且  $b=0$  时,是母小波,  $a>1$ ,小波伸展,  $a<1$ ,小波收缩,但各类小波彼此相似,这就是“各代子孙波形都相似”的概念,且保证

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,b}^2(t) \cdot dt \equiv \text{定数} \quad (1-19)$$

函数  $f(t)$  按小波展开的系数为  $W_f(a,b)$ , 即: