

河北省高校人文社科研究项目成果
高职高专高等数学基础特色教材系列

高职数学

(各专业通用)

李同贤 编著

GAO ZHI SHU XUE



中国人民大学出版社

河北省高校人文社科研究项目成果
高职高专高等数学基础特色教材系列

高职数学

(各专业通用)

李同贤 编著

GAO ZHI SHU XUE

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

高职数学/李同贤编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2015. 10

ISBN 978-7-300-21689-8

I. ①高… II. ①李… III. ①高等教学-高等职业教育-教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 163212 号

河北省高校人文社科研究项目成果

高职高专高等数学基础特色教材系列

高职数学

李同贤 编著

Gaozhi Shuxue

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511770 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 北京东方圣雅印刷有限公司

规 格 170 mm×228 mm 16 开本

版 次 2015 年 10 月第 1 版

印 张 17.5

印 次 2015 年 10 月第 1 次印刷

字 数 312 000

定 价 36.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

近十多年来,随着我国高等职业教育的快速发展,高职教材也百花齐放.其中大量涌现的《高等数学》教材与二十年前的专科教材相比,无论是体系结构还是具体知识点等方面的处理,都多有创新和成功之处.

职业教育招生规模的扩大,单独招生政策的实施,高职教学改革的推进,都对高职教材的编写提出了新的要求.集各家之长,提供符合当前教学实际的教材,是一项非常重要而紧迫的任务!

近年来,编者开展了“高职院校财经类专业数学教学内容适应性研究”(河北省高校人文社科研究项目,课题编号 SZ123007).在调研过程中,编者发现高职专科数学教材必须在为专业课学习提供必要的基础知识和方法的前提下,做到严格控制难度,注重实际应用,注重通俗性.

在此基础上,编者结合多种版本教材使用及其研究的经验,以数学教育学理论为指导,边编、边用、边改,经过几轮的试用与定稿,锤炼成了这本《高职数学》,其主要特点如下:

- (1) 体系结构简单、层次分明、脉络清晰.
- (2) 内容浅显易懂,淡化理论,注重头用.
- (3) 相关内容过渡自然,注重体现思维过程,注意渗透学法指导.
- (4) 原函数和矩阵秩以及随机事件和随机变量的概念、初等变换和初等矩阵的记号、微分和定积分的计算、连续型随机变量的密度函数和概率分布等多处具体疑难点内容的处理,具有创新性、简明性和准确性.
- (5) 例题、习题和自测题的选配贴切、典型、新颖.
- (6) 表述运用文字、符号和图形三种数学语言,力求通俗、简明、直观.

本书共有 12 章,包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、矩阵、 n 维向量、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征.每章开头有导读、章末有拓展阅读和自测题,每节配有习题,书末附有参考答案.

本书可作为高职专科财经类各专业的文化基础课教材,也可供其他各级各类

高校新生和中等学校高年级学生等初学者阅读。

此外，本教材还以教学资源的形式配套提供了本书各节习题和各章自测题的详细解答以及教学答疑等。

本教材建议在一年级使用，需要 90~120 学时。

在本教材编写过程中，参考了大量同类教材，得到了专家、同行、学生们的大力支持，得到了出版社编辑和领导以及工作单位领导的大力支持，在此一并致谢！

编者试图打造精品，但限于水平，其中谬误难免，请专家、同行和广大读者不吝赐教！意见反馈邮箱：bsltx@163.com.

李同贤

2015 年 8 月

目 录

绪论：老话新说学数学	1
第 1 章 函数	5
第 1 节 函数的概念	5
第 2 节 函数的性质	10
第 3 节 初等函数的概念	14
第 4 节 经济函数	19
拓展阅读：数学建模	22
自测题 1	24
第 2 章 极限与连续	26
第 1 节 极限的概念	26
第 2 节 极限的运算	33
第 3 节 函数的连续性	38
拓展阅读：微积分发展简史	45
自测题 2	47
第 3 章 导数与微分	49
第 1 节 导数的概念	49
第 2 节 求导公式和四则运算法则	52
第 3 节 复合函数求导法则	55
第 4 节 微分	58
第 5 节 边际分析和弹性分析	59
拓展阅读：求导公式和法则的证明	63

自测题 3	66
第 4 章 导数的应用	68
第 1 节 函数的单调性	68
第 2 节 函数的极值和最值	71
第 3 节 函数曲线的凹凸性	76
第 4 节 函数图像的描绘	79
第 5 节 洛必达法则	83
拓展阅读: 函数曲线斜渐近线的求法	85
自测题 4	87
第 5 章 不定积分	89
第 1 节 不定积分的概念	89
第 2 节 不定积分公式和法则	91
第 3 节 换元积分法	93
第 4 节 分部积分法	98
拓展阅读: 关于原函数定义的表述	101
自测题 5	102
第 6 章 定积分	104
第 1 节 定积分的思想方法和概念	104
第 2 节 定积分的几何意义	107
第 3 节 定积分的性质	108
第 4 节 定积分的计算	110
第 5 节 无限区间上的积分	112
第 6 节 定积分的应用	114
拓展阅读: 微元法	119
自测题 6	121
第 7 章 矩阵	123
第 1 节 矩阵的概念	123
第 2 节 矩阵的线性运算和乘法运算	126
第 3 节 矩阵的转置和初等变换	133

第 4 节 可逆矩阵和逆矩阵	141
拓展阅读: 用矩阵运算编译密码	145
自测题 7	146
第 8 章 n 维向量	149
第 1 节 n 维向量及其线性运算	149
第 2 节 向量的线性相关性	151
第 3 节 向量组的秩与极大无关组	156
拓展阅读: 线性代数概述	164
自测题 8	165
第 9 章 线性方程组	168
第 1 节 高斯消元法	168
第 2 节 方程组解的情况判定	173
第 3 节 方程组解的结构	178
拓展阅读: 高斯消元法拾遗	185
自测题 9	187
第 10 章 随机事件及其概率	190
第 1 节 随机事件及其运算	190
第 2 节 事件的概率	196
第 3 节 概率的计算	199
第 4 节 事件的相互独立性	207
拓展阅读: “双色球” 游戏及其中奖概率	211
自测题 10	213
第 11 章 随机变量及其概率分布	215
第 1 节 随机变量的概念	215
第 2 节 离散型随机变量的概率分布	217
第 3 节 连续型随机变量的概率分布	221
拓展阅读: 随机变量的分布函数	230
自测题 11	234

第 12 章 随机变量的数字特征	236
第 1 节 数学期望	236
第 2 节 方差与标准差	241
拓展阅读: 概率论发展概述	245
自测题 12	246
习题、自测题参考答案	248
附表 1 标准正态分布表	265
附表 2 泊松分布表	267
主要参考书目	269

绪论

老话新说学数学

经常听到包括重点高校在内的各级各类学校的学生抱怨数学难学，质疑耗费这么多的精力学数学是否值得。

关于数学学习的相关话题，早有大量数学教育学、方法论方面的著作供大家阅读。在此，仅谈几点认识，与大家分享。

1. 为什么要学数学？

伽利略指出：世界的奥秘是一部巨大的书，而这部书是用数学语言写成的。华罗庚指出：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。

(1) 学习、生活、工作的需要。

数学是一门基础性、工具性的学科，在各级各类学校学习其他课程时，都离不开它。也正因如此，在中考和高考中，数学占的分数比重也比较大。

在日常生活中，购物、理财、结算存贷款利息、装修及预算、看电视、听广播、语言交流等也都离不开数学。

在工作中，各行各业都会用到数学。例如，各行业的管理越来越多地引入量化处理、统计分析，制图设计需要较强的空间观念和几何知识，航海、航空、测量等离不开三角，财政、金融和经济等问题的解决更是离不开微积分、线性代数、概率论和数理统计。

(2) 健全素质结构、提高素质水平的需要。

人的素质包括身体素质、心理素质、思想素质、文化素质和专业素质。

数学素质是现代公民必备的一种文化素质。因而，数学学习能够健全人的素质结构，提高人的素质水平。具体来讲，它能够使人养成理性思维的习惯，增强量化思维的意识，提高思维的深刻性、严谨性、敏捷性、灵活性和创造性，养成

求真务实、崇尚科学与正义的优秀品质，等等。

(3) 自然规律的探索发现、科学技术的发明创造离不开数学。

爱因斯坦用黎曼几何理论建立了广义相对论；哈雷彗星和海王星都是先通过数学计算预测到而后观察发现的；英国著名数学家 G. 哈代认为最纯粹、最无用的数论，近代在计算机科学、密码学、自动控制、卫星数据传输等领域被广泛应用；地震预报、天气预报、B 超、核磁共振、模拟设计等无不用到数学。

王选院士的“汉字激光照排系统”居世界领先水平，获得了国家科技最高奖。他说：“我是数学系毕业，容易想到信息压缩，即用轮廓描述和参数描述相结合的方法描述字形，并于 1976 年设计出了一套把汉字轮廓快速复原成点阵的算法。”

2. 为什么许多人厌学数学？

(1) 数学科学具有高度的抽象性、符号化的特点。

数学最本质的特点是抽象性，它要通过符号化来实现。

数学家们创造的符号，具有压缩信息、简化记述、简化思维过程、简化推理表述过程和实现运算自动化等功能，这使得数学成为不分国家和民族的通用语言，成为自然科学通用的语言工具。

例如， $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 记作 $n!$ ，多么简单！直线 a 在平面 α 内记作 $a \subset \alpha$ ，多么精炼！

但是，抽象性、符号化，导致许多人感到数学深奥、难学、枯燥，从而厌学。

(2) 传统教材忽视通俗性、应用性、趣味性。

在传统数学教材中，过早、过多、过度强调形式化与符号化，忽视通俗性、趣味性与生活化。

(3) 不少中小学教师照本宣科，机械训练、甚至误导学生。

有的教师对数学科学缺乏广泛的了解，对数学学科知识内容和思想方法缺乏透彻的理解，教学照本宣科；而又过度强调解题的多、快、巧，用大量、低层次、重复性的题目模式化和机械化地训练学生；甚至用高难度的问题惩罚学生，用错误的观点误导学生（例如，批评学生不是学数学的料，宣传个别文史奇才或艺术家不懂数学照样成功）。凡此种种，必然导致学生丧失学习勇气和兴趣，怕学、厌学数学。

3. 怎样快乐地学好数学？

(1) 明确学习目标，制订学习计划。

明确不同阶段的学习目标、制订学习计划，由小到大、由低到高，逐步逐层完成计划并实现目标，增强自信。

(2) 掌握各学科通用的和符合学科特点的学习方法。

①把薄书读厚。学贵存疑，要深入进去、敢于质疑并且不放过任何疑点。不仅要理解每个知识点，更要悟通、理解数学的思想方法。

②牢记概念和符号含义。符号简洁明了，文字通俗易懂，图形直观形象。要随时注意这三种数学语言的相互翻译，逐步提高理解和运用符号语言的能力。

③要学会常用的数学思想方法。如数形结合、分类、类比、命题变换、一般化、特殊化方法，等等。

④有时“倒读”易懂。教材中的内容一般按照演绎推理过程（由已知到未知）表述，但这恰恰与人们分析问题的思考过程（由未知到已知）相反。因此，当读不懂、想不通时，“倒读”就回到了作者的原来思路。例如，积分运算经常用到的等式 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 由左化右难想通，而反之则易得。

⑤适度做题。学数学只看不练、袖手旁观，会在“岸”上干死；若是一味沉入题海、不习“水性”，又会被淹死。因此，要适度做题，学会在题海中畅游。即不断对照概念和原理反思正误对错，不断修正、深化对概念或方法的理解，不断追求过程和方法的最优化，使得每个题目起到以一当十的作用。

⑥把厚书读薄。要勤于归纳、总结，不断建构、丰富自己的数学知识树，使知识点成为“串”上的而非散放在盘中的葡萄粒，即要能够纲举目张。

(3) 理论联系实际，学会欣赏数学美。

对学过的数学概念、原理和方法，在日常生活、各科学学习中，留心观察和思考两者之间的联系，这会增强数学的应用意识和学习兴趣。与此同时，更要随时留意和欣赏无处不在的数学美，这能愉悦心情、乐而思学。在此仅举几例加以说明。

①对称美。

大家知道许多几何图形具有对称美，看下面的三角问题：若 $\triangle ABC$ 的三条边为 a, b, c ，则 $\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$ 。易见，等号左边只有三边且三边有对称性（可轮换），等号右边的边角都没有对称性（但三项有对应相似性），若三角用边表示，则即刻得到左边。

②统一美.

大家在高中学过的圆锥曲线、椭圆、双曲线和抛物线各有其直角坐标方程,但可以用一个极坐标方程统一表示为 $\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$.

③简洁美.

当我们知道微分、不定积分、定积分三大项数学内容可以用一个简单公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 揭示其内在联系时,就会赞叹其简洁和漂亮,就会赞叹数学家的洞明与睿智.

④奇异美.

数学方法的奇异大家一定体验过.在此仅举一例指出数学内容与大自然内在联系的奇异美.

螺旋是一种异常迷人的数学对象,涉及生活的方方面面,如螺丝钉、螺帽、弹簧、羚羊的角、蜗牛的壳、飓风、漩涡、松鼠上树的路线,等等.更为迷人的是等角螺线(其极坐标方程为 $\ln\rho = k\theta$,故也称为对数螺线):每点处的切线与相应的半径成等角,任一半径被螺线所截得的线段长度成公比为 $e^{2\pi}$ 的等比数列.如鹦鹉螺的壳(见图1)、向日葵的种子盘等都是等角螺线.螺旋与DNA分子的关系本质上由生物遗传基因控制(见图2),因此,自然界出现众多螺旋、螺线现象不足为奇,而螺丝钉、楼梯等人造螺旋则完全是因为经济、实用和美观!

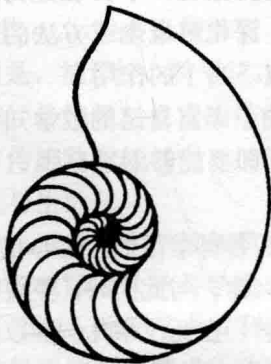


图1 鹦鹉螺



图2 DNA 双重螺旋

有了对数学的上述认识和体验,就会进入“想学—会学—学会—乐学—学好—会用—更想学”的良性循环、螺旋上升的轨道了!大家不妨一试.

第 1 章

函 数

本章导读

函数论是数学的一个重要分支. 我们在后面几章将要介绍的极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分等微积分内容都是函数论的内容.

本章将在中学学过的有关函数知识的基础上, 进一步复习、巩固函数的概念和简单性质, 介绍常用的经济函数, 为后面的学习奠定基础.

第 1 节 函数的概念

经过中学阶段的数学学习, 大家已经知道, 函数在生活和生产中广泛存在、经常用到. 函数概念是一个非常重要的数学概念. 为了进一步深入地理解和应用, 下面我们进行必要的复习和补充.

1. 函数的概念

我们在观察一种现象或事物的变化过程时, 往往会遇到几个相互关联的变量, 它们具有确定的对应关系. 这种相互关联、关系确定的数量关系就是函数关系.

引例 1. 一辆汽车以 80 千米的时速匀速行驶, 经过时间 t 通过的路程为 s , 则 $s=80t$.

引例 2. 把 3 万元本金存入银行, 定期一年, 年利率 2%, 到期把本金和利息全部存入银行, 每年如此, 则本金与利息之和 (简称本息和) $f(x)$ 与存款年数

x 的关系为

$$f(x) = 3(1+2\%)^x \quad (x=1, 2, 3, \dots)$$

在上述两个引例中, 各有两个具有确定对应关系的变量, 当其中一个变量在一定范围内取定一个数值后, 由相应的对应关系, 就能得到另一个变量的唯一确定的值.

对于两个变量之间的这种关系, 我们有如下的定义.

定义 1. 设 x, y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 若对于每个 $x \in D$, 按照某种对应法则, y 总有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 其中, x 叫做自变量, y 叫做因变量, 数集 D 叫做函数的定义域, 当 x 取定 D 中的值 x_0 时, 与 x_0 对应的 y 值叫做函数在 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 y_0 , 函数值的集合叫做函数的值域.

在上述的引例 1 中, s 是 t 的函数, 其定义域为 $(0, +\infty)$; 在引例 2 中, f 是 x 的函数, 其定义域为正整数集.

函数的定义域和对应法则是确定一个函数的两个要素. 因此, 我们说两个函数相同, 当且仅当两个函数的定义域相同, 且对应法则相同或等价.

在不至于引起误解的情况下, 定义域可以省略不写. 因此, 当只给出一个函数的表达式而不给出其定义域时, 默认其定义域为使表达式有意义的自变量的允许值范围.

例 1. 判断下列各组中的两个函数是否相同, 并说明理由.

(1) $s=80t, t \in (0, +\infty), y=80x, x \in (0, +\infty)$

(2) $y=\sin x, y=\sqrt{1-\cos^2 x}$

(3) $y=|x|, y=\sqrt{x^2}$

解: (1) 是, 因为定义域相同, 对应法则相同.

(2) 不是, 因为虽然定义域相同, 但对应法则不同且不等价.

(3) 是, 因为定义域相同, 对应法则等价.

例 2. 求函数 $y=\sqrt{x^2-4}+\ln(x+2)$ 的定义域和在 $x=2$ 处的函数值.

解: 自变量应满足:

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2 \\ x > -2 \end{cases}$

故, 函数的定义域为 $[2, +\infty)$.

由题意知:

$$f(2) = \sqrt{2^2 - 4} + \ln(2 + 2) = \ln 4 = 2\ln 2$$

大家在中学已经知道，函数的表示方法有解析式法、图像法和表格法三种，这三种表示方法各有其优缺点，因此，在讨论函数时，往往根据需要采用一种、两种或三种。

一个函数的对应法则不一定能用解析式表示。例如，某班某学科一次考试的成绩与学生学号之间的函数关系，一般说来不大可能用解析式表示。

一个函数也不一定能画出其图像。例如，狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \overline{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

就画不出图像。

一个函数的定义域是无穷数集时，也不能用列表的方法列全其函数值。

在本课程中，我们只讨论可以用解析式表示的函数，其中包括在定义域的不同范围内用不同解析式表示的函数（即分段函数）。

2. 分段函数的概念

定义 2. 在定义域的不同范围内用不同解析式表示的函数，叫做分段函数。

例 3. 出租车载客收费金额 y 是行车路程 x 的分段函数：路程不足 3 千米时车费 5 元，超过 3 千米时，超过部分每千米加收 2 元，则函数关系为：

$$y = \begin{cases} 5, & 0 < x \leq 3 \\ 5 + 2(x - 3), & x > 3 \end{cases}$$

例 4. 已知分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

求定义域、函数值 $f(-1)$, $f(1/2)$ ，并画出草图。

解：分段函数在整个定义域内是一个函数，而不是几个函数，因此，定义域是其各段取值范围的并集。

故定义域为： $[-1, 0) \cup [0, 1] = [-1, 1]$ 。

函数值 $f(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$, $f(1/2) = -1/2$ 。

按照函数在定义域各段上相应的解析式分别作图，即可得到如图 1—1—1 所示的函数图像。

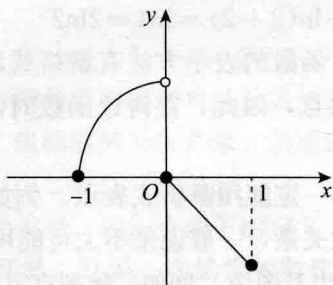


图 1—1—1

例 5. 个人所得税计算方法:

个人因任职或受雇所得到的工资、薪金、津贴、补贴、奖金等收入的资金总额,叫做工资、薪金所得额。

月工资、薪金所得额,减去起征额(2011年9月1日起国家统一规定为3 500元),再减去社保基金、养老基金、住房公积金等个人承担额,叫做应纳税所得额。

国家规定,应纳税所得额要分级按不同税率纳税,税率表见表 1—1—1.

表 1—1—1 个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率(%)	速算扣除数
1	不超过 1 500 元的	3	0
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10	105
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20	555
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25	1 005
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30	2 755
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35	5 505
7	超过 80 000 元的部分	45	13 505

例如:李某当月工资、薪金收入 9 400 元,当月个人承担社保基金、养老基金、住房公积金、失业保险金共 1 000 元,问他应缴的个人所得税金额是多少?

解:李某应纳税所得额为: $9\,400 - 1\,000 - 3\,500 = 4\,900$ 元. 将其分成“不超过 1 500”、“超过 1 500 至 4 500”和“超过 4 500”三级分别计算,然后相加即可. 即: $1\,500 \times 3\% + 3\,000 \times 10\% + 400 \times 20\% = 425$ (元).

如此分级计算比较繁琐,税务部门用如下公式速算: