Hilbert Kongjian Zhong Suanzi Juzhen De
Pu He Banqun Lilun

Hilbert 空间中算子矩阵的谱和半群理论

刘 杰 青 梅 李光芳 编 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

Hilbert 空间中算子矩阵的谱和半群理论

刘 杰 青 梅 李光芳 编 著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书从Hilbert空间的一些基本理论出发，讨论了Hilbert空间中2×2算子矩阵的谱和半群生成性质．全书共分为4章．第1章简单介绍了与该书相关的Hilbert空间和线性算子的一些基本概念和理论．第2章描述了上三角算子矩阵的近似点谱、亏谱的包含性质，并讨论了上三角Hamilton算子矩阵的近似点谱分布的估计．第3章深入、详细地刻画了2×2上三角算子矩阵广义Weyl谱的交集和并集，并用一些具体的例子验证所得结论的正确性．第4章讨论了上三角Hamilton算子矩阵和一般Hamilton算子矩阵生成C_0半群的问题及实际应用问题．

本书适用于数学专业高年级本科生及研究生阅读，也可供相关专业的教师和科学工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

Hilbert空间中算子矩阵的谱和半群理论 / 刘杰，青梅，李光芳编著. -- 北京：北京邮电大学出版社，2017.3

ISBN 978-7-5635-5002-9

Ⅰ. ①H… Ⅱ. ①刘… ②青… ③李… Ⅲ. ①希尔伯特空间—线性算子理论 Ⅳ. ①O177.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第020883号

书　　名	Hilbert空间中算子矩阵的谱和半群理论
著　　者	刘　杰　青　梅　李光芳
责任编辑	张保林　陈世明
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京九州迅驰传媒文化有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	10
字　　数	169千字
版　　次	2017年3月第1版　2017年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-5002-9　　定价：42.00元

前　言

线性算子理论作为泛函分析的一个重要分支，在数学、物理和其他学科领域中有着广泛的应用价值，其理论体系创建于20世纪初，并很快得到了迅猛的发展，这归功于该理论的奠基人 S. Banach、I. Fredholm、D. Hilbert 和 F. Riesz 等著名的学者. 目前，线性算子理论不仅深入到微分方程、积分方程和最优化理论等数学的各个分支，也成为解决量子力学、弹性力学、流体力学等领域中实际问题的重要工具.

线性算子的谱从结构上分析算子作用的本质，通过研究线性算子的谱，不仅能知道算子的结构，还能掌握系统能量的变化、稳定性以及解的构造等. 线性算子谱理论的最早成果是关于紧线性算子和自伴线性算子谱的结构，产生于 I. Fredholm、D. Hilbert 和 F. Riesz 等人有关积分方程的工作中. 到目前为止，自伴算子的谱理论已具有完善的理论框架，而很多实际问题，如弹性力学和量子力学中出现的很多算子均为非自伴算子，由此可知，非自伴算子的谱理论同样重要. 然而，非自伴算子理论没有形成统一的理论框架，只能对个别算子进行个别研究. 一类非常重要的线性算子-算子矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 在数学及应用数学的各个领域均有广泛的应用，其谱理论在量子力学、弹性力学、流体力学等学科中具有重要的作用，其中 A、B、C 和 D 均为线性算子. 因此，在纯粹数学和应用数学的研究领域，算子矩阵谱的研究十分重要.

另一方面，弹性力学、材料力学以及控制理论等很多领域中的复杂问题均可转换为一阶抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=Mu(t), \\ u(0)=u_0, \quad u_0\in\mathcal{D}(M), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 为算子矩阵，A、B、C 和 D 通常是 Hilbert 空间中的微分算

子.问题(1)的解的适定性和其对应的算子矩阵$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$是否能生成$C_0$半群有紧密的联系,而$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$能否生成$C_0$半群和其谱的分布有关.

无穷维 Hamilton 系统 $\dot{u}=Hu$ 作为一类特殊的微分方程,在力学等很多领域中都具有非常重要的应用价值,其中$H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$是 Hamilton 算子矩阵,$u$ 是取值于函数空间 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 中关于时间 t 的向量值函数.因此,Hamilton 算子矩阵 H 的半群生成问题也显得尤为重要.鉴于上述原因,我们在讨论算子矩阵谱的基础上,进一步讨论算子矩阵(特别是 Hamilton 算子矩阵)的 C_0 半群生成和应用问题.

本书从 Hilbert 空间的一些基本理论出发,讨论了 Hilbert 空间中 2×2 算子矩阵的谱和半群生成性质.全书共分为 4 章.第 1 章由刘杰、青梅、李光芳执笔,介绍与该书内容相关的赋范线性空间、Hilbert 空间理论、Hilbert 空间中线性算子谱和有界线性算子半群理论的一些基本概念和性质.第 2 章由青梅执笔,描述了上三角算子矩阵的近似点谱、亏谱的包含性质,并讨论了上三角 Hamilton 算子矩阵的近似点谱分布的估计.第 3 章由李光芳执笔,介绍线性算子 Weyl 谱的基础上,深入、详细地刻画了 2×2 上三角算子矩阵广义 Weyl 谱的交集和并集,并举出一些具体的例子验证了所得结论.第 4 章由刘杰执笔,基于介绍算子矩阵生成 C_0 半群的特点和性质,讨论了上三角 Hamilton 算子矩阵和一般 Hamilton 算子矩阵生成 C_0 半群问题,并用一致连续半群作逼近的方法求解了若干混合问题以及弹性力学中的实际问题.刘杰完成了全书的排版和初校工作.本书的出版得到了内蒙古自治区高等学校科学研究项目(项目编号:NJZY16558)和内蒙古大学满洲里学院科研启动基金(项目编号:MYKZ16013)的支持.

因编者水平有限,书中难免有不妥之处,望专家和读者批评指正!

刘杰　青梅　李光芳

2016 年 12 月

目 录

第1章

Hilbert 空间和线性算子

§1.1 赋范线性空间和 Hilbert 空间

在线性空间中，向量间不仅有了加法和数乘的代数结构，而且有了引进距离之后的拓扑结构. 问题的深入研究需要寻求更多的视角，有必要引进元素之间的几何结构. 这迫使对线性空间定义元素的“长度”以及元素间的“夹角”. 因此，本章介绍赋范线性空间和 Hilbert 空间的一些基本概念.

1.1.1 赋范线性空间和 Banach 空间

在一般的线性空间中，引入向量模的概念.

定义 1.1.1 设 $\mathcal{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{X}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，若对任意的 $x,y\in\mathcal{X}$ 都有：

(1) (非负性) $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) (正齐次性) 对任意 $\alpha\in\mathbb{K}$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$；

(3) (三角不等式) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则 $\|\cdot\|$ 称为 $\mathcal{X}$ 上的一个范数，$\mathcal{X}$ 称为赋范线性空间，记作 $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$，也可简记为 $\mathcal{X}$.

注 1.1.1 上述范数即为 $\mathcal{X}$ 中向量的模(或者称为“长度”). 显然，在同一个线性空间上，可以定义不同的范数.

例 1.1.1 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,n\}$，

$\mathbb{C}^n$按下列加法与数乘公式是线性空间

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$
$$\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).$$

令

$$\| x \|_1=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n,$$

则容易验证，$\mathbb{C}^n$按照范数$\| x \|_1$是赋范线性空间. 也可定义$\mathbb{C}^n$上的范数

$$\| x \|_2=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|,$$

容易验证，$\mathbb{C}^n$按照范数$\| x \|_2$也构成赋范线性空间. 但$(\mathbb{C}^n,\| \cdot \|_1)$和$(\mathbb{C}^n,\| \cdot \|_2)$是不同的赋范线性空间

例 1.1.2 连续函数空间$C[a,b]=\{f(x)\,|\,f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数$\}$. $C[a,b]$按下列加法与数乘公式是线性空间：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

令

$$\| f \|_1=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,\quad f=f(x)\in C[a,b],$$

则容易验证，$C[a,b]$按照范数$\| f \|_1$是赋范线性空间. 也可在$C[a,b]$上定义范数

$$\| f \|_2=\left(\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证，$C[a,b]$按照范数$\| f \|_2$也构成赋范线性空间.

三角不等式是范数的不可缺少的一个性质. 下面是在验证范数三角不等式时经常用到的两个非常重要的不等式 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式，其详细证明参见文献[1,2].

引理 1.1.1 （Hölder 不等式）设E是 Lebesgue 可测集，$x(t)$，$y(t)$是E上的可测函数，p，q为正数，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\int_E|x(t)y(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别地，当$p=2$时，不等式为

$$\int_E|x(t)y(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_E|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E|y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 1.1.2 (Minkowski 不等式)设 E 是 Lebesgue 可测集，$x(t)$，$y(t)$ 是 E 上的可测函数，$p\geqslant 1$，则

$$\left(\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

注 1.1.2 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的离散形式：

设 $\xi_k,\eta_k\in\mathbb{R}\,(k=1,2,\cdots)$，$p,q$ 为正数，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\quad p\geqslant 1$$

和

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

例 1.1.3 空间 $L^p[a,b]=\{x(t)\,|\,x(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可测函数，且 $\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t<\infty\}$，其中 $1\leqslant p<\infty$. 定义 $L^p[a,b]$ 中加法与数乘同例 1.1.2. 令

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\quad x=x(t)\in L^p[a,b].$$

对任意 $x=x(t)$，$y=y(t)\in L^p[a,b]$，易证 $\|x\|\geqslant 0$，且有 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x(t)=0$；又

$$\left(\int_a^b |\alpha x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

因此

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|,$$
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

综上，$L^p[a,b]$ 是赋范线性空间.

例 1.1.4 考虑空间 $l^p=\left\{x=\{\xi_k\}\,\middle|\,\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty\right\}(1\leqslant p<\infty)$. l^p 按下列加法与数乘公式是线性空间.

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)+(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots),$$
$$\alpha(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n,\cdots).$$

令

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots) \in l^p.$$

对任意 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\} \in l^p$，易证 $\|x\| \geqslant 0$，且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $\xi_k=0$，$k=1,2,\cdots$，即 $x=0$；又

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

因此

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|,$$
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

综上，l^p 是赋范线性空间.

范数也是将 x 映射为 $\|x\|$ 的函数. 利用范数可以定义赋范线性空间 $\mathcal{X}$ 上两个向量之间的距离.

定理 1.1.1 赋范线性空间是距离空间.

证明 设$(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$是赋范线性空间，令

$$d(x,y)=\|x-y\|, \quad x,y\in\mathcal{X},$$

则有

(1) $d(x,y)=\|x-y\|\geqslant 0$;

(2) $d(x,y)=\|x-y\|=0$ 当且仅当 $x=y$;

(3) $d(y,x)=\|y-x\|=|-1|\,\|x-y\|=\|x-y\|=d(x,y)$;

(4) $d(x,y)=\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$.

显然

$$d(x,y)=\|x-y\|, \quad x,y\in\mathcal{X}$$

是 $\mathcal{X}$ 上的一个距离，称为由范数诱导的距离. 从而$(\mathcal{X}, d(\cdot,\cdot))$是距离空间.

注 1.1.3 由范数诱导的距离需满足

$$d(x+z,y+z)=d(x,y), \quad d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y), \quad x,y,z\in\mathcal{X}, \alpha\in\mathbb{K}.$$

因此，上述结论反之不一定成立，即距离空间中距离未必均可由范数诱导. 例如，对

$$\mathcal{X}=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\,|\,\xi_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots\}$$

定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in\mathcal{X}$.
容易验证,$(\mathcal{X},d(\cdot,\cdot))$是距离空间,但当 $\alpha\neq 0$ 时,

$$d(\alpha x,0)\neq|\alpha|d(x,0),$$

因此,$\mathcal{X}$中的距离 $d(\cdot,\cdot)$不是由任何一个范数诱导出来的.

定义 1.1.2 设 $\mathcal{X}$是赋范线性空间,$\{x_n\}\subset\mathcal{X}$,$x\in\mathcal{X}$,如果

$$\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

则称$\{x_n\}$依范数收敛于 x,记作 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x(n\to\infty)$(或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$).

注 1.1.4 由于 $d(x_n,x)=\|x_n-x\|$,依范数收敛等价于依范数诱导的距离收敛.

定义 1.1.3 设 $\mathcal{X}$是距离空间,$\{x_n\}\subset\mathcal{X}$,若对任意 $\varepsilon>0$,存在正数 N,当 $n,m>N$ 时,都有

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

则称$\{x_n\}$是 $\mathcal{X}$中的 Cauchy 列.

定义 1.1.4 如果距离空间 $\mathcal{X}$中的每个 Cauchy 列都收敛于 $\mathcal{X}$中的某一点,则称 $\mathcal{X}$是完备的.

注 1.1.5 距离空间中的任何一个收敛序列是 Cauchy 列;完备距离空间的任何一个闭子空间也是完备的.

定义 1.1.5 完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

因此,证明一个空间是 Banach 空间,需要按以下三个步骤进行:

(1) 先定义线性运算,验证是线性空间;

(2) 定义范数,验证是赋范线性空间;

(3) 验证完备性.

前面讨论过的赋范线性空间$\mathbb{C}^n$,$C[a,b]$,$L^p[a,b]$,l^p 也都是 Banach 空间.

例 1.1.5 $C[a,b]$按范数

$$\|f\|_1=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

是完备的.

证明 设$\{x_n(t)\}\subset C[a,b]$是 Cauchy 列,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n,m\geqslant N$ 时,有

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

因此，对每个 $t\in[a,b]$，都有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon,$$

故对确定的 $t\in[a,b]$，$\{x_n(t)\}$ 是$\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，又$\mathbb{R}$ 完备，于是存在一个与 t 相关的实数 x，使得 $x_n(t)\to x(n\to\infty)$. 当 t 取遍$[a,b]$内每一个数时，x 也随之变化，记为 $x(t)$.

在 $|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$ 中，令 $m\to\infty$，得

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,\quad t\in[a,b].$$

因此，$\{x_n(t)\}$ 在$[a,b]$上一致收敛到$\{x(t)\}$，且当 $n>N$ 时，

$$\|x_n(t)-x(t)\|_1=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

故$\{x(t)\}\in C[a,b]$，且 $x_n(t)\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x(t)(n\to\infty)$.

注 1.1.6 $C[a,b]$按范数 $\|f\|_2=\left(\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 不完备. 例如，取 $c\in(a,b)$，令

$$x(t)=\begin{cases}-1, & t\in[a,c),\\ 0, & t=c,\\ 1, & t\in(c,b].\end{cases}$$

显然，$x(t)\notin C[a,b]$. 但

$$\left(\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\int_a^b 1\mathrm{d}t=a-b<\infty,$$

故 $x(t)\in L^2[a,b]$. 又 $C[a,b]$在 $L^2[a,b]$中稠密，因此，存在$\{x_n\}\subset C[a,b]$，使得

$$x_n(t)\xrightarrow{\|\cdot\|_2}x(t)\quad(n\to\infty),$$

但 $x(t)\notin C[a,b]$. 所以 $C[a,b]$按范数 $\|\cdot\|_2$不完备. 但在 $C[a,b]$中增加一些新元素得到的空间 $L^2[a,b]$是完备的.

范数的定义使得空间元素有了距离，进而可以讨论极限运算. 赋范空间作为距离空间也可以完备化，完备的距离空间中极限运算才能很好地进行. 下面定理的证明参见文献[1].

定理 1.1.2 赋范线性空间可以完备化.

定理 1.1.3 设$(\mathcal{X},\|\cdot\|)$是赋范线性空间，则

(1) 对任意 $x,y\in\mathcal{X}$,都有
$$|\|y\|-\|x\||\leqslant\|y-x\|;$$
(2) $\|\cdot\|$ 是连续函数;

(3) 若 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, $y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}y(n\to\infty)$,则 $x_n+y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x+y(n\to\infty)$;若 $\alpha_n\to\alpha$, $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x(n\to\infty)$,则 $\alpha_nx_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\alpha x(n\to\infty)$.

证明 (1) 根据三角不等式,有
$$\|y\|=\|y-x+x\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|,$$
$$\|x\|=\|x-y+y\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|=\|y-x\|+\|y\|,$$
因而
$$|\|y\|-\|x\||\leqslant\|y-x\|.$$
(2) 由(1)可知
$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|.$$
因此,当 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x(n\to\infty)$ 时,$\|x_n\|\to\|x\|(n\to\infty)$,即 $\|\cdot\|$ 是连续函数.

(3) 根据三角不等式,有
$$\|x_n+y_n-x-y\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to0\quad(n\to\infty),$$
又 $|\alpha_n|$ 有界,所以
$$\begin{aligned}\|\alpha_nx_n-\alpha x\|&\leqslant\|\alpha_nx_n-\alpha_nx+\alpha_nx-\alpha x\|\\&\leqslant|\alpha_n|\,\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\,\|x\|\to0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$
类似于线性空间,在赋范空间引进"空间基"的概念.

定义 1.1.6 设 $\mathcal{X}$ 为赋范线性空间,若存在 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\subset\mathcal{X}$,使得任一 $x(x\in\mathcal{X})$ 都可唯一地表示为
$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k,\quad\alpha_k\in\mathbb{K},$$
则称 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathcal{X}$ 的一组基,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 称为 x 在基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下的坐标,n 称为 $\mathcal{X}$ 的维数,记为 $\dim\mathcal{X}=n$.

若 $\dim\mathcal{X}<n$,则称 $\mathcal{X}$ 为有限维赋范线性空间;若 $\mathcal{X}$ 不是有限维赋范线性空间,称为无限维赋范线性空间.

定义 1.1.7 设 $\mathcal{X}$ 为无限维 Banach 空间,若存在 $\{e_1,e_2,\cdots\}\subset\mathcal{X}$,使得任一 $x(x\in\mathcal{X})$ 都唯一地表示为

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K},$$

则称$\{e_1, e_2, \cdots\}$为$\mathcal{X}$的一组 Schauder 基.

例如,$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$是$l^2$的一组 Schauder 基.

定义 1.1.8 设$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$为赋范线性空间,若存在线性双射$T: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$满足$T$和$T^{-1}$都是连续,则称$\mathcal{X}$与$\mathcal{Y}$同构,$T$称为$\mathcal{X}$到$\mathcal{Y}$的同构映射. 进一步,若有

$$\| Tx \| = \| x \|, \quad x \in \mathcal{X},$$

则称$\mathcal{X}$与$\mathcal{Y}$等距同构.

引理 1.1.3 设$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$为赋范线性空间,$T: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$为满的线性映射,则$T$是$\mathcal{X}$到$\mathcal{Y}$的同构映射的充要条件是存在$a, b > 0$,使得

$$a \| x \| \leqslant \| Tx \| \leqslant b \| x \|, \quad x \in \mathcal{X}. \tag{1.1}$$

证明 由于$\| Tx \| \geqslant a \| x \|$,即$\| T^{-1} y \| \leqslant \frac{1}{a} \| y \|$,根据线性算子连续性和有界性的等价关系,我们只需证明T是单射. 若$Tx_1 = Tx_2$,则由式(1.1)可知

$$a \| x_1 - x_2 \| \leqslant \| T(x_1 - x_2) \| = \| Tx_1 - Tx_2 \| = 0.$$

由$a > 0$可知$\| x_1 - x_2 \| = 0$,进而$x_1 = x_2$,所以T是单射.

定理 1.1.4 任一n维赋范线性空间都与$\mathbb{R}^n$同构.

证明 设$\mathcal{X}$为n维赋范线性空间,则$\mathcal{X}$存在一组基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 因而对$x \in \mathcal{X}$,有唯一表达式

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

记$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,定义$T: \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, $Tx = \xi$. 易证,T是双射. 又因为

$$\begin{aligned} \| x \| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} | \xi_k | \, \| e_k \| \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} | \xi_k |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \| e_k \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a} \left(\sum_{k=1}^{n} | \xi_k |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \| \xi \| \\ &= \frac{1}{a} \| Tx \|, \end{aligned}$$

其中$a = 1 \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} \| e_k \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} > 0$. 因而

$$a \| x \| \leqslant \| Tx \|.$$

定义

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad f(\xi)=\|x\|,\quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n,$$

则 f 连续. 事实上,对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$,都有

$$\begin{aligned}|f(\xi)-f(\eta)|&=\left|\left\|\sum_{k=1}^n\xi_ke_k\right\|-\left\|\sum_{k=1}^n\eta_ke_k\right\|\right|\\&\leqslant\left\|\sum_{k=1}^n\xi_ke_k-\sum_{k=1}^n\eta_ke_k\right\|\\&\leqslant\frac{1}{a}\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k-\eta_k|^2\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{a}\|\xi-\eta\|.\end{aligned}$$

记$\mathbb{R}^n$的单位球面为

$$S(\mathbb{R}^n)=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n:\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2=1\right\},$$

则 $S(\mathbb{R}^n)$是有界闭集,所以是紧的,于是 f 在 $S(\mathbb{R}^n)$上能取到最小值. 又因为在 $S(\mathbb{R}^n)$上,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 不同时为 0,且$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$线性无关,故

$$\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n\neq0.$$

因此 $f(\xi)>0$,从而存在 $\beta>0$,使得

$$f(\xi)\geqslant\beta,\quad x\in S(\mathbb{R}^n).$$

于是,对 $x\in\mathcal{X}$,记 $x=\sum\limits_{k=1}^n\xi_ke_k$,令 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,则有

$$\begin{aligned}f(\xi)=\|x\|&=\left\|\frac{x}{\|\xi\|}\right\|\cdot\|\xi\|\\&=\left\|\sum_{k=1}^n\frac{\xi_k}{\|\xi\|}e_k\right\|\cdot\|\xi\|\geqslant\beta\|\xi\|=\beta\|Tx\|.\end{aligned}$$

令 $b=\dfrac{1}{\beta}$,则有

$$\|Tx\|\leqslant b\|x\|,\quad x\in\mathcal{X}.$$

综上,$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|$,$x\in\mathcal{X}$. 因此 $\mathcal{X}$ 与$\mathbb{R}^n$同构.

1.1.2 Hilbert 空间

n 维欧式空间中,为研究方便引入了“长度”、“角度”等可以数量化的几何概念,这些概念都可由一个工具——内积表示出来,例如,对 $a=(a_1,a_2)$,$b=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$,定义内积为

$$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2,$$

则

$$\|a\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\sqrt{(a,a)},$$

$$\cos(a,b)=\frac{(a,b)}{\|a\|\ \|b\|},$$

$$a\perp b=(a,b)=0.$$

定义 1.1.9 设 $\mathcal{X}$ 是数域$\mathbb{K}$上的线性空间，若对任意 $x,y\in\mathcal{X}$ 都有$\mathbb{K}$中一个数与之对应，记作(x,y)，满足：

(1) $(x,x)\geqslant 0$，$(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) $(x,y)=\overline{(x,y)}$；

(3) 对任意 $\alpha\in\mathbb{K}$，$(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$；

(4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$，

则$(\cdot,\cdot)$称为 $\mathcal{X}$ 上的一个内积，定义了内积的空间 $\mathcal{X}$ 称为内积空间.

注 1.1.7 当$\mathbb{K}=\mathbb{R}$时，(x,y)关于 x,y 是线性的，即

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,x)=\alpha_1(x_1,x)+\alpha_2(x_2,x),$$

$$(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\alpha_1(x,y_1)+\alpha_2(x,y_2).$$

当$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时，显然(x,y)关于 x 是线性的，而关于 y 是共轭线性的，即

$$(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\bar{\alpha}_1(x,y_1)+\bar{\alpha}_2(x,y_2).$$

例 1.1.6 n 维复向量空间$\mathbb{C}^n$中定义内积

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\,\bar{y}_k,\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n,$$

则$\mathbb{C}^n$是一个内积空间，成为酉空间.

例 1.1.7 l^2 中定义内积

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\,\bar{\eta}_k,\quad x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2,$$

则 l^2 是一个内积空间.

例 1.1.8 $L^2[a,b]$中定义内积

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\mathrm{d}t,\quad x=x(t),y=y(t)\in L^2[a,b],$$

则 $L^2[a,b]$是一个内积空间.

在内积空间中，我们希望从空间的内积定义元素的范数 $\|\cdot\|$，并将内积空间转化为赋范线性空间，从代数、几何的不同角度来考虑问题. 但这样定义