主 编 沈小芳

普通高等院校数学类课程教材

复变函数·积分变换及其应用

FUBIANHANSHU · JIFEN BIANHUAN JI QI YINGYONG

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等院校数学类课程教材

复变函数·积分变换及其应用

主　编　沈小芳
副主编　徐　彬　朱祥和

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书是依据最新《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，并参考国内外优秀教材和课程教学改革新成果编写而成的。全书分三篇：第1篇为复变函数论，包含第1章至第6章，主要介绍复数及其几何属性，复变函数及其导数、积分，解析函数及其相关定理，复变函数的级数，留数及其应用，以及共形映射. 第2篇为积分变换，主要介绍了 Fourier 变换和 Laplace 变换，以及它们在工程技术中的应用. 第3篇是基于 MATLAB 的数学实验，主要介绍 MATLAB 在复变函数和积分变换中的应用. 各章节后配有丰富的习题，书后附有部分习题的答案供读者参考.

本书中的某些章节标记了“*”，表示其为选讲内容，讲授与否视课时多寡而定.

本书内容丰富，条理清晰，紧密联系工程实际，语言通俗流畅，图文并茂，可读性强. 本书可作为综合性大学、理工科大学非数学专业教材，也可供一般的数学、电子通信、控制等领域的工作者和工程技术人员作为参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数·积分变换及其应用/沈小芳主编. —武汉：华中科技大学出版社，2017.7
ISBN 978-7-5680-2822-6

Ⅰ.①复… Ⅱ.①沈… Ⅲ.①复变函数 ②积分变换 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 103176 号

复变函数·积分变换及其应用 沈小芳 主编
Fubianhanshu · Jifen Bianhuan ji Qi Yingyong

策划编辑：谢燕群
责任编辑：熊 慧
封面设计：原色设计
责任校对：祝 菲
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编：430223
录 排：武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷：武汉华工鑫宏印务有限公司
开 本：710mm×1000mm 1/16
印 张：18.75
字 数：389 千字
版 次：2017 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：39.80 元

华中出版

前　言

“复变函数与积分变换”是工科相关专业的一门重要数学基础课.它的理论和方法在自然科学和工程技术中有广泛的应用，是工程技术人员常用的数学工具.本书按照最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，遵循“工科数学回归工程”的理念编写而成.

本书主要分为三篇，即复变函数论、积分变换和基于 MATLAB 的数学实验.

第 1 篇“复变函数论”共有 6 章.第 1 章讲述复数及其几何属性.这一章主要通过复数的几何属性使读者对复数的概念有直观的理解，为学习复变函数论打好基础，并初步引入复数的应用.第 2 章介绍复变函数的概念，并引入复变函数极限、连续、导数和积分的概念.这一章尽量与实变函数相关内容衔接.复变函数是实变函数在复数领域内的推广和发展.两者有许多相似之处，但又有许多不同之处，尤其是在技巧和方法上.我们在指出它们共性的同时，着力揭示它们的区别，并注意分析产生这些区别的原因，以便读者进一步加深对复变函数中新概念、新理论、新方法的理解与认识.第 3 章介绍复变函数研究的主要对象——解析函数，论述函数解析的充要条件，分析初等函数的解析性，并通过积分进一步研究解析函数及其相关定理，同时在最后介绍了解析函数在平面场等理论中的实际应用，让读者理论联系实际，加深对概念、定理的理解.第 4 章介绍复变函数的级数理论，重点讲述了 Taylor 级数和洛朗级数.在此基础上，第 5 章讨论了函数的孤立奇点，介绍了留数的概念，阐述了留数定理及其应用.第 6 章介绍共形映射.共形映射是复变函数论中最具特色的内容之一.它从几何角度研究了解析函数.本书从理清各个基本概念入手，逐步导出共形映射的概念，使读者易于接受.

第 2 篇“积分变换”共有 2 章。第 7 章主要讲述 Fourier 变换，从 Fourier 级数入手，逐步引入 Fourier 积分和 Fourier 变换，同时将频谱的概念融入其中，接着介绍了 Fourier 变换的性质，最后讲述 Fourier 变换具有代表性的应用.第 8 章介绍 Laplace 变换，重点介绍 Laplace 变换及其逆变换的概念、性质和求解方法，同时还讲述了 Laplace 变换在求解微分方程和线性系统分析中的应用.

第 3 篇是“基于 MATLAB 的数学实验”，主要介绍 MATLAB 在复变函数和积分变换中的应用.

本书由武昌首义学院长期从事工程数学教学与研究工作的经验丰富的教师编写而成.在本书编写中，编者坚持“工科数学回归工程”这一原则，充分考虑到工科学生的特点和实际，特别注意到以下几点：

(1) 语言通俗流畅，在概念、定理、性质阐述严谨的同时，增加了一些引导性和解说性的文字，力求深入浅出、循序渐进，增强了可读性.

(2) 条理清晰，尽量做到重要知识点模块化、重难点处理恰当，同时调整了一些章节的编排和内容，使全书的结构更趋合理.

(3) 图文并茂，插图与正文相辅相成. 例题选择上参考相关专业课程，紧密联系工程实际.

由于编者水平所限，书中错误和不妥之处在所难免，诚恳欢迎读者批评指正，以期日后再做改进。

编　者

2017 年 3 月

目 录

第1篇 复变函数论

第2篇 积分变换

*第 3 篇　基于 MATLAB 的数学实验

第1篇 复变函数论

以复数为自变量的函数，即复变函数，与之相关的理论称为复变函数论.解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，是复变函数论的主要讨论对象，因此复变函数论通常也称解析函数论.

“复数”“虚数”这两个名词都是人们在解方程时引入的.为了用公式求一元二次、三次方程的根，就会遇到求负数的平方根的问题.1545年，意大利数学家卡丹诺(Girolamo Cardano，1501—1576)在《大术》一书中，首先研究了虚数，并进行了一些计算.1572年，意大利数学家邦别利(Rafacl Bombelli，1525—1650)正式使用“实数”“虚数”这两个名词.此后，德国数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716)、瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)和法国数学家棣莫弗(Abraham de Moivre，1667—1754)等又研究了虚数与对数函数、三角函数等之间的关系，除解方程以外，还把它用于微积分等方面，得出很多有价值的结果，使某些比较复杂的数学问题变得简单而易于处理.大约在1777年，欧拉第一次用i来表示−1的平方根，在著作中详细研究了初等复变函数，同时给出了函数可微的条件和复变函数积分法的基础.1832年，德国数学家高斯(Carl Friedrich Gauss，1777—1855)第一次引入复数概念，一个复数可以用$a+bi$来表示，其中a、b是实数，i代表虚数单位，这样就把虚数与实数统一起来了.高斯还把复数与复平面内的点一一对应起来，给出了复数的一种几何解释.不久，人们又将复数与平面向量联系起来，并使其在电工学、流体力学、振动理论、机翼理论中得到广泛的实际应用，然后又建立了以复数为变量的复变函数论.这是一个崭新而强有力的数学分支，我们深刻认识到“虚数不虚”的道理.

复变函数论的全面发展是在19世纪，柯西(Augustin Louis Cauchy，1789—1857)、魏尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass，1815—1897)和黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826—1866)等为这门学科的发展做了大量奠基工作.柯西和魏尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数，黎曼研究复变函数的映射性质.复变函数论这个新的分支引领了19世纪的数学研究，成为一个重要的分支.当时数学家公认复变函数论是最丰饶、最和谐的理论之一.

复变函数论不仅对数学领域的许多分支产生了重要的影响，而且在自然科学和工程技术中有着广泛应用.数学上的一些原本在实数范围内讨论的问题，例如积分计算、级数求和、微分方程求解等问题，利用复变函数的理论能够得出令人惊喜的求解方法.在工程技术中，复变函数论是解决诸如流体力学、电磁学、热学、系统分析、信息

处理乃至金融问题的有力工具.

本篇结合工程应用的实际需要，主要介绍复数的有关运算及其几何属性、复变函数的概念及其分析运算、解析函数、复级数、留数理论以及共形映射等复变函数论中基本、常用的内容.

第1章 复数及其几何属性

本章首先介绍复数的概念、各种表达式，以及复数的几何意义、各种运算关系；然后介绍复平面中曲线、区域的复数表示，为进一步研究复变函数奠定基础；最后通过举例简单介绍复数在科学和工程中的应用.

1.1 复　　数

1.1.1 复数的基本概念

设 x 与 y 是任意两个实数，形如 $x+\mathrm{i}y$ 或 $x+y\mathrm{i}$ 的数称为**复数**，并记作 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为**虚数单位**，x、y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作 $x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$. 一个复数可以看成是一个实数加上一个虚数，是实数与虚数的复合，因此称之为复数. 也称 $x+\mathrm{i}y$ 为复数的**代数式**.

当 $y\neq0$ 时，复数 z 也可称为**虚数**；当 $x=0$，$y\neq0$，即 $z=\mathrm{i}y$ 时，称复数 z 为纯虚数；当 $y=0$，即 $z=x$ 时，复数 z 就是实数，因此全体实数是全体复数的一部分，复数可看作是对实数的拓展.

假设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，若 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$，则 $z_1=z_2$，否则两个复数不相等，即虚部不为零的复数只存在相等与否的关系，而不能比较大小.

假设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，若 $x_1=x_2$ 而 $y_1=-y_2$，那么称复数 z_1 与 z_2 是**共轭复数**，并记为 $\overline{z_1}=z_2$，即

$$\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y \tag{1.1}$$

共轭复数具有自反性，即 $\bar{\bar{z}}=z$.

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一个实数对 (x,y) 唯一确定，它与平面直角坐标系中以 (x,y) 为坐标的点 P 一一对应(见图 1.1). 因此，可以用平面上的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，此时复数 z 也称点 z，并将这种表示复数的平面称为**复平面**，也称 z 平面，其中横轴称为**实轴**，纵轴称为**虚轴**.

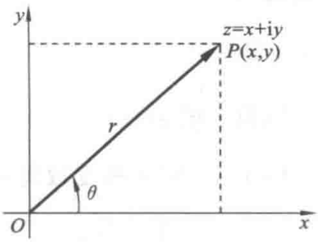


图 1.1

在复平面上，如图 1.1 所示，从原点 O 到点 $P(x,y)$ 作向量 $\boldsymbol{OP}$. 我们看到复平面上由原点出发的向量与复数也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量)，

因此也可以用向量 **OP** 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 在物理学中,力、速度、加速度等可用向量表示,说明复数可以用来表示实有的物理量.

引进复平面后,就可以用几何语言和方法研究复数及其相关问题. 由图 1.1 可以知道,我们能够借助点 z 的极坐标 r 和 θ 来确定点 $z=x+\mathrm{i}y$,向量 **OP** 的长度 r 称为复数 z 的**模或绝对值**,记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.2}$$

复数的模具有以下性质:

(1) $z\bar{z}=|z^2|=|z|^2$;

(2) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$;

(3) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

当 $z\neq0$ 时,向量 **OP** 与实轴正向间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**,记作 $\mathrm{Arg}z$. 显然 $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值,任意两个值之间相差 $2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 将取值在 $(-\pi,\pi]$(有的书中也规定 $[0,2\pi)$)的辐角称为**主辐角**,也称**辐角主值**,记为 $\arg z$,显然

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.3}$$

当 $z=0$ 时,辐角不定义.

从直角坐标与极坐标的关系,还可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z. 由图 1.1 可知,$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,因此复数 z 可表示为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.4}$$

称式(1.4)为复数的**三角式**.

利用著名的**欧拉(Euler)公式** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,复数 z 又可表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.5}$$

称式(1.5)为复数的**指数式**.

于是,一个复数可以表示成三种形式:代数式、三角式和指数式. 复数的各种表示法可以相互转换,以适应讨论不同问题时的需要.

我们知道对于任意实数 x,用 $\arctan x$ 可以表示 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的正切值为 x 的一个角,并且

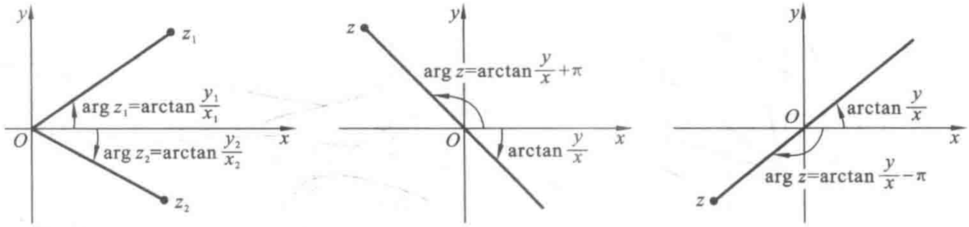
$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\tan\theta=\frac{y}{x} \tag{1.6}$$

据此辐角主值 $\arg z(z\neq0)$ 可用反正切 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按图 1.2 所示的关系确定.

例 1.1 将下列复数转化为三角式和指数式.

(1) $z=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$; (2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) 显然 $r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$. 由于 z 在第三象限,由图1.2知



(a) z在第一、四象限　(b) z在第二象限　(c) z在第三象限

图 1.2

$$\arg z=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$$

因此 z 的三角式为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

z 的指数式为

$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$$

(2) 显然 $r=|z|=1$,又因为

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},\quad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10}$$

故 z 的三角式为

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}$$

z 的指数式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{10}\mathrm{i}}$$

1.1.2 复数的代数运算

1. 复数的四则运算

假设两个复数分别为 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)\tag{1.7}$$

复数的加减运算与向量的加减运算完全一致,也可用平行四边形法则或三角形法则求出,如图 1.3 所示.

复数 z_1、z_2 的乘法运算如下:

$$z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\tag{1.8}$$

当 $z_2\neq0$ 时,复数 z_1、z_2 的除法运算如下:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\tag{1.9}$$

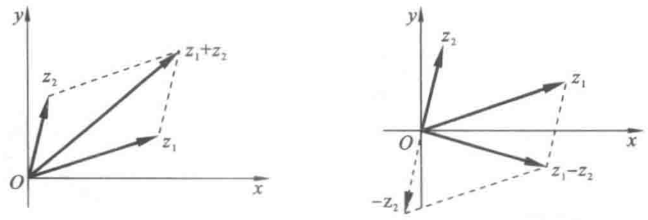


图 1.3

先将复数写成三角式和指数式，再进行乘除运算，比用代数式运算有时要方便很多.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= [r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned} \tag{1.10}$$

由此可知，两个复数相乘，只要把它们的模相乘、辐角相加即可. 特别地，当 $|z_1|=1$ 时，两个复数的乘积 z_1z_2 就只是向量 z_2 旋转. 例如，$z_1=\mathrm{i}$，由于 i 的辐角主值是 $\pi/2$，那么 $\mathrm{i}z_2$ 就表示向量 z_2 逆时针旋转 $\pi/2$.

同样当 $z_2\neq0$ 时，两复数的除法为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.11}$$

由此可知，两个复数相除等于它们的模相除、辐角相减.

此外，很容易证明复数的代数运算满足如下规律：

(1) 交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

(2) 结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，$z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$.

(3) 分配律：$z_3(z_1+z_2)=z_3z_1+z_3z_2$.

复数的四则运算与共轭运算规律如下：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $z\cdot\bar{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2=|z|^2$；

(3) $\mathrm{Re}(z)=x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}(z)=y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$.

由规律(1)可知，复数的共轭运算可以和四则运算交换运算顺序，这是个很重要的信息；而规律(3)是用来把实数的函数表达式和复数的函数表达式互相转化的唯一工具.

例 1.2 化简复数 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

解 利用复数的四则运算，将复数化简