

► 高等学校应用型本科“十三五”规划教材



自动控制原理

► 主 编 刘振全
副主编 贾红艳 戴凤智 王汉芝

高等学校应用型本科“十三五”规划教材

自动控制原理

主 编 刘振全

副主编 贾红艳 戴凤智 王汉芝

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书比较全面地阐述了自动控制的基本原理,分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。全书共分十四章,主要内容包括:自动控制原理数学基础、绪论、控制系统的数学模型、控制系统的时域分析、控制系统的根轨迹分析、控制系统的频域分析、控制系统的校正、非线性系统的分析、线性离散时间控制系统、控制系统的状态空间描述、线性控制系统的运动分析、线性控制系统的能控性与能观测性、控制系统的稳定性、线性定常系统的状态反馈和状态观测器设计。附录给出了自动控制原理 MATLAB 仿真的常用命令。全书内容取材新颖,阐述深入浅出。为了便于自学,各章均包括丰富的例题和习题。

本书可作为工科院校或应用型本科自动化、电气工程及自动化、通信工程、电子信息工程、测控技术与仪器、机电一体化等专业的本科生教材或主要参考书,也可供相关专业的研究生或从事自动化工作的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/刘振全主编. —西安:西安电子科技大学出版社,2017.2
ISBN 978-7-5606-4330-4

I. ①自… II. ①刘… III. ①自动控制理论 IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 001764 号

策划编辑 胡华霖

责任编辑 武翠琴 马武装

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467

邮 编 710071

网 址: [//www.xduph.com](http://www.xduph.com)

电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2017年2月第1版

2017年2月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16

印张 23.5

字 数 557千字

印 数 1~3000册

定 价 40.00元

ISBN 978-7-5606-4330-4/TP

XDUP 4622001-1

* * * * * 如有印装问题可调换 * * * * *

西安电子科技大学出版社

高等学校应用型本科规划教材

编审专家委员会名单

主 任：鲍吉龙(宁波工程学院副院长、教授)

副主任：彭 军(重庆科技学院电气与信息工程学院院长、教授)

张国云(湖南理工学院信息与通信工程学院院长、教授)

刘黎明(南阳理工学院软件学院院长、教授)

庞兴华(南阳理工学院机械与汽车工程学院院长、教授)

电子与通信组

组 长：彭 军(兼)

张国云(兼)

成 员：(成员按姓氏笔画排列)

王天宝(成都信息工程学院通信学院院长、教授)

安 鹏(宁波工程学院电子与信息工程学院副院长、副教授)

朱清慧(南阳理工学院电子与电气工程学院副院长、教授)

沈汉鑫(厦门理工学院光电与通信工程学院副院长、副教授)

苏世栋(运城学院物理与电子工程系副主任、副教授)

杨光松(集美大学信息工程学院副院长、教授)

钮王杰(运城学院机电工程系副主任、副教授)

唐德东(重庆科技学院电气与信息工程学院副院长、教授)

谢 东(重庆科技学院电气与信息工程学院自动化系主任、教授)

楼建明(宁波工程学院电子与信息工程学院副院长、副教授)

湛腾西(湖南理工学院信息与通信工程学院教授)

计算机大组

组 长：刘黎明(兼)

成 员：(成员按姓氏笔画排列)

刘克成(南阳理工学院计算机学院院长、教授)

毕如田(山西农业大学资源环境学院副院长、教授)

李富忠(山西农业大学软件学院院长、教授)

向 毅(重庆科技学院电气与信息工程学院院长助理、教授)

张晓民(南阳理工学院软件学院副院长、副教授)

何明星(西华大学数学与计算机学院院长、教授)

范剑波(宁波工程学院理学院副院长、教授)

赵润林(山西运城学院计算机科学与技术系副主任、副教授)

雷 亮(重庆科技学院电气与信息工程学院计算机系主任、副教授)

黑新宏(西安理工大学副院长、教授)

机电组

组 长：庞兴华(兼)

成 员：(成员按姓氏笔画排列)

王志奎(南阳理工学院机械与汽车工程学院系主任、教授)

刘振全(天津科技大学电子信息与自动化学院副教授)

何高法(重庆科技学院机械与动力工程学院院长助理、教授)

胡文金(重庆科技学院电气与信息工程学院教授)

前言

PREFACE

自动控制原理是自动化学科的重要理论基础，是专门研究有关自动控制系统中的基本概念、基本原理和基本方法的一门课程，也是高等学校自动化类专业的一门核心基础理论课程。学好自动控制原理，对掌握自动化技术有着非常重要的作用。

本书是为适应拓宽专业面、优化整体教材体系的教学改革形势，按照“精简理论，简化推导，注重应用”的原则，结合作者多年的教学经验和课程教学改革成果，参考国内外控制理论及应用发展的方向，经反复讨论编写而成的，注重突出基础性、先进性和易读性。

全书共分十四章，前九章着重介绍经典控制理论，后五章着重介绍现代控制理论中的线性系统理论基础。在经典控制理论中，主要介绍了自动控制的基本概念，控制系统在时域、频域和复域中的数学模型及其结构图和信号流程图；比较全面地阐述了线性控制系统的时域分析法、根轨迹分析法、频域分析法以及校正和设计等问题；比较详细地讨论了线性离散时间系统的基础理论、数学模型、稳定性及稳态误差、动态性能分析以及数字校正等问题；在非线性控制系统分析方面，给出了相平面和描述函数两种常用的分析方法。在现代控制理论中，系统地阐述了控制系统的状态空间描述、线性控制系统的运动分析、线性控制系统的能控性与能观测性、线性控制系统的稳定性、线性定常系统的状态反馈和状态观测器设计。

附录给出了 MATLAB 控制系统数学模型对象函数、单位阶跃响应、单位脉冲响应、零输入响应、一般输入响应、根轨迹分析、频域分析、伯德图、奈奎斯特曲线、绘图函数等常用命令，便于读者借助于 MATLAB 进行仿真辅助学习。

本书的亮点与特色包括：以“精简理论，简化推导，注重应用”为指引，例题丰富，步骤详尽；数学基础单独提出并前置，放在第 0 章，便于各学校或授课教师根据实际情况灵活安排；在根轨迹分析中给出了重极（零）点系统根轨迹起始角、终止角的计算方法，丰富了根轨迹的绘制规则；给出了牛顿余数定理在系统分析中的应用，并给出了一种求取闭环脉冲传递函数的简易方法。

本书由刘振全、贾红艳、戴凤智、王汉芝合作编写。薛薇教授审阅了全稿并提出了很好的意见和建议，在此表示感谢。

由于水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2016 年 11 月

目录

CONTENTS

上部：经典控制理论

第 0 章 自动控制原理数学基础	2	2.1.1 机械系统	22
0.1 拉普拉斯变换	2	2.1.2 电气系统	23
0.1.1 拉普拉斯变换的定义	2	2.2 非线性数学模型的线性化	24
0.1.2 拉普拉斯变换的基本性质	3	2.3 传递函数	27
0.1.3 用拉普拉斯变换解线性微分方程	4	2.3.1 传递函数的定义	27
0.2 辐角原理	6	2.3.2 传递函数的性质	28
0.2.1 函数 $F(s)$ 的映射	6	2.3.3 传递函数的常用形式	29
0.2.2 辐角原理	7	2.3.4 典型环节及其传递函数	30
0.3 Z 变换理论	8	2.4 系统传递函数和结构图的等效变换	34
0.3.1 Z 变换的定义	8	2.4.1 结构图的组成	34
0.3.2 Z 变换的性质	11	2.4.2 典型连接的等效传递函数	35
0.3.3 Z 反变换	12	2.4.3 比较点及引出点的变位运算	38
习题 0	14	2.4.4 系统对给定作用和扰动作用的传递函数	44
第 1 章 绪论	15	2.5 信号流图	46
1.1 自动控制的发展简史	15	2.5.1 信号流图的组成	46
1.1.1 经典控制理论	16	2.5.2 信号流图的常用术语	46
1.1.2 现代控制理论	16	2.5.3 信号流图的性质	47
1.1.3 智能控制理论	16	2.5.4 信号流图的绘制	47
1.2 开环控制系统与闭环控制系统	17	2.5.5 梅逊增益公式	49
1.3 典型自动控制系统	18	习题 2	52
1.4 自动控制系统的类型	19	第 3 章 控制系统的时域分析	55
1.4.1 线性系统和非线性系统	19	3.1 自动控制系统的时域指标	55
1.4.2 连续时间系统和离散时间系统	19	3.1.1 自动控制系统的典型输入信号	55
1.4.3 定值控制系统、随动控制系统和程序控制系统	19	3.1.2 自动控制系统的时域指标	57
1.5 自动控制系统的性能指标	20	3.2 一阶系统的动态响应	60
1.5.1 对控制系统的基本要求	20	3.2.1 一阶系统的数学模型	60
1.5.2 稳态性能指标	20	3.2.2 一阶系统的单位阶跃响应	60
1.5.3 暂态性能指标	21	3.2.3 一阶系统的单位脉冲响应	61
习题 1	21	3.2.4 一阶系统的单位斜坡响应和单位加速度响应	62
第 2 章 控制系统的数学模型	22	3.3 二阶系统的阶跃响应	63
2.1 微分方程式的建立	22		

3.3.1 典型二阶系统的数学模型	63	5.2 典型环节的频率特性	128
3.3.2 二阶系统的动态性能指标	64	5.3 系统的开环频率特性	138
3.3.3 二阶系统特征参数与动态性能指标之间的关系	72	5.3.1 最小相位系统和非最小相位系统	138
3.3.4 二阶系统工程最佳参数	73	5.3.2 开环幅相曲线(极坐标图)的绘制	139
3.3.5 零点对二阶系统动态性能的影响	74	5.3.3 开环对数频率特性曲线的绘制	142
3.4 高阶系统的动态响应	75	5.4 奈奎斯特判据和系统的相对稳定性	145
3.4.1 高阶系统的阶跃响应	75	5.4.1 映射定理	146
3.4.2 高阶系统的降阶	76	5.4.2 奈奎斯特稳定判据	146
3.5 自动控制系统的代数稳定判据	78	5.4.3 虚轴上有开环极点时的奈氏判据	147
3.5.1 线性系统稳定性的概念和稳定的充分必要条件	78	5.4.4 根据伯德图判断系统的稳定性	150
3.5.2 劳斯稳定判据	80	5.4.5 系统的相对稳定性和稳定裕度	151
3.5.3 赫尔维茨稳定判据	83	5.4.6 截止频率 ω_c 的近似求取法	154
3.5.4 参数对稳定性的影响	84	5.4.7 “三频段”的概念	155
3.5.5 相对稳定性和稳定裕量	85	习题 5	157
3.6 控制系统的稳态误差	86	第 6 章 控制系统的校正	162
3.6.1 稳态误差的定义及计算	86	6.1 系统的设计与校正问题	162
3.6.2 静态误差系数法计算稳态误差	90	6.1.1 被控对象	162
3.6.3 减小稳态误差的方法	94	6.1.2 控制系统的性能指标	162
习题 3	95	6.1.3 系统带宽的选择	163
第 4 章 控制系统的根轨迹分析	98	6.1.4 校正方式	164
4.1 根轨迹的基本概念	98	6.2 频率法串联超前校正	165
4.1.1 引例	98	6.2.1 无源超前校正网络及其特性	165
4.1.2 根轨迹方程	99	6.2.2 频率法串联超前校正	167
4.2 绘制根轨迹的基本规则	100	6.3 频率法串联滞后校正	170
4.3 控制系统根轨迹绘制举例	108	6.3.1 无源滞后网络及其特性	170
4.4 广义根轨迹	112	6.3.2 频率法串联滞后校正	172
4.4.1 参数根轨迹	112	6.4 频率法反馈校正	174
4.4.2 正反馈系统根轨迹的绘制	113	6.5 控制系统的复合校正	177
4.4.3 非最小相位系统根轨迹的绘制	115	6.5.1 按扰动补偿的复合校正	177
4.5 线性系统的根轨迹分析方法	116	6.5.2 按输入补偿的复合校正	179
4.5.1 线性系统的根轨迹分析举例	116	习题 6	180
4.5.2 增加开环零点对根轨迹的影响	119	第 7 章 非线性系统的分析	184
习题 4	119	7.1 非线性系统概述	184
第 5 章 控制系统的频域分析	123	7.1.1 非线性系统的描述与特点	184
5.1 频率特性	123	7.1.2 典型的非线性特性	186
5.1.1 频率特性的基本概念	123	7.1.3 非线性系统的分析方法	190
5.1.2 频率特性的定义	126		
5.1.3 频率特性的几何表示法	126		

7.2 相平面分析法	190	8.3 离散系统的数学模型	223
7.2.1 相平面的基本概念	190	8.3.1 差分方程	224
7.2.2 线性系统的相轨迹	193	8.3.2 差分方程求解	225
7.2.3 非线性系统的相轨迹	196	8.3.3 脉冲传递函数	225
7.2.4 非线性系统的相平面分析	200	8.3.4 一种求取闭环脉冲传递函数的 简易方法	230
7.3 描述函数分析法	202	8.4 离散系统的稳定性分析	232
7.3.1 描述函数的定义	202	8.4.1 离散系统的稳定条件	232
7.3.2 典型非线性环节的描述函数	204	8.4.2 离散系统的劳斯稳定判据	233
7.3.3 描述函数分析法	207	8.4.3 离散系统的朱利稳定判据	235
7.3.4 非线性系统的简化	212	8.4.4 采样周期与开环增益对稳定性的 影响	237
习题 7	214	8.5 离散系统的稳态误差	237
第 8 章 线性离散时间控制系统	217	8.6 离散系统的动态性能	239
8.1 信号采样与采样定理	217	8.7 离散系统的校正	241
8.1.1 概述	217	8.7.1 数字控制器的脉冲传递函数	241
8.1.2 采样过程	218	8.7.2 最少拍系统的脉冲传递函数	242
8.1.3 采样定理	219	习题 8	246
8.2 信号保持器	220		
8.2.1 零阶保持器	221		
8.2.2 一阶保持器	223		

下部：现代控制理论

第 9 章 控制系统的状态空间描述	250	9.7 系统状态空间表达式的特征标准型	269
9.1 控制系统中状态的基本概念	250	9.7.1 系统状态的线性变换	269
9.2 控制系统的状态空间表达式	251	9.7.2 系统的特征值和特征向量	270
9.2.1 状态空间表达式的概念	251	9.7.3 状态方程的对角线标准型	272
9.2.2 状态空间表达式的一般形式	252	9.7.4 状态方程的约当(Jordan)标准型	275
9.2.3 状态空间表达式的系统结构图与 模拟结构图	255	习题 9	277
9.3 根据系统的物理机理建立状态空间 表达式	256	第 10 章 线性控制系统的运动分析	280
9.4 根据系统的微分方程建立状态空间 表达式	257	10.1 线性定常齐次系统状态方程的解 ...	280
9.4.1 微分方程中不含有输入信号的 导数项	258	10.1.1 标量微分方程的解	280
9.4.2 微分方程中含有输入信号的 导数项	259	10.1.2 齐次状态方程的解	280
9.5 根据系统的方框图或传递函数建立 状态空间表达式	263	10.2 状态转移矩阵	281
9.5.1 几种常见环节的状态变量图	263	10.2.1 状态转移矩阵的性质	281
9.5.2 由传递函数导出状态空间模型	264	10.2.2 几个特殊的状态转移矩阵	281
9.6 从状态空间表达式求取传递函数矩阵	268	10.2.3 状态转移矩阵的一般求法	283
		习题 10	289
		第 11 章 线性控制系统的能控性与能观测性	291
		11.1 问题的提出	291
		11.2 线性连续系统的能控性	292
		11.2.1 时变系统的能控性	292

11.2.2 定常系统的能控性	293	12.3 李雅普诺夫稳定性理论	330
11.2.3 状态能控性条件的标准型判据	296	12.3.1 李雅普诺夫第一法	330
11.3 线性连续系统的能观测性	298	12.3.2 李雅普诺夫第二法的二次型函数	331
11.3.1 时变系统的能观测性	298	12.3.3 李雅普诺夫第二法	334
11.3.2 定常系统的能观测性	299	12.4 线性定常连续系统的李雅普诺夫稳定性分析	337
11.3.3 状态能观测性的标准型判据	300	12.5 线性定常离散系统的李雅普诺夫稳定性分析	338
11.4 对偶原理	302	习题 12	339
11.4.1 线性系统的对偶关系	302	第 13 章 线性定常系统的状态反馈和状态观测器设计	341
11.4.2 对偶原理	303	13.1 状态反馈与输出反馈	341
11.5 线性系统的能控标准型和能观测标准型	304	13.1.1 状态反馈	341
11.5.1 系统的能控标准型	304	13.1.2 输出反馈	343
11.5.2 系统的能观测标准型	306	13.1.3 对两种反馈形式的讨论	343
11.6 线性系统的结构分解	308	13.2 闭环系统的极点配置	344
11.6.1 系统按能控性的结构分解	308	13.2.1 极点配置定理	344
11.6.2 系统按能观测性的结构分解	311	13.2.2 状态反馈增益矩阵 k 的计算	344
11.6.3 按能控性和能观测性分解	314	13.2.3 采用输出反馈配置系统的极点	348
11.7 系统的实现	315	13.3 状态观测器的设计	348
11.7.1 基本概念	315	13.3.1 状态观测器模型	348
11.7.2 系统的能控标准型和能观测标准型实现	316	13.3.2 观测器的定义及存在条件	350
11.7.3 最小实现	320	13.3.3 状态观测器的设计	350
11.7.4 系统的约当标准型实现	321	13.4 带观测器的状态反馈系统	352
11.8 传递函数阵与能控性、能观测性的关系	321	13.4.1 系统的结构和状态空间表达式	352
习题 11	323	13.4.2 闭环系统的基本特性	353
第 12 章 控制系统的稳定性	327	习题 13	355
12.1 概述	327	附录 自动控制原理 MATLAB 仿真常用命令一览表	358
12.2 李雅普诺夫稳定性定义	327	参考文献	366
12.2.1 平衡状态	327		
12.2.2 范数的概念	328		
12.2.3 李雅普诺夫稳定性	328		



上部

经典控制理论

第 0 章 自动控制原理数学基础

0.1 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换简称拉氏变换，是工程实践中用来求解线性常微分方程的简便工具，同时也是建立系统在复数域数学模型——传递函数的数学基础。经过拉氏变换后，一个微分方程式将变为一个代数方程式，这样会使求解微分方程的过程简化许多。

0.1.1 拉普拉斯变换的定义

如果 $f(t)$ 是一个以时间为变量的函数，其定义域为 $t > 0$ ，且

$|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ (0-1)

式中， a 是正数，那么对所有实部大于 a 的复数来说，积分

$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ (0-2)

是绝对收敛的，即满足

$-\infty < \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt < \infty$ (0-3)

$s = \sigma + j\omega$ 为复变量，则式(0-2)定义为 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ ，即

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ (0-4)

式(0-4)中， $F(s)$ 是 $f(t)$ 的象函数，记为 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ； $f(t)$ 是 $F(s)$ 的原函数，记为 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。

在本书中常用函数的拉普拉斯变换如表 0-1 所示。

表 0-1 常用函数的拉普拉斯变换对照表

序号	原函数 $f(t)$ ($t < 0$ 时, $f(t) = 0$)	象函数 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

续表

序号	原函数 $f(t)$ ($t < 0$ 时, $f(t) = 0$)	象函数 $F(s)$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
8	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
9	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} + \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

0.1.2 拉普拉斯变换的基本性质

下面简要介绍一下在本书中将用到的拉氏变换的几个重要性质。

1. 线性性质

若 $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$, $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$, a 和 b 为常数, 那么有

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (0-5)$$

2. 微分定理

若 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 那么有

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \quad (0-6)$$

式中, $f(0)$ 是函数 $f(t)$ 在 $t = 0$ 时的值。

函数 $f(t)$ 的高阶导数的拉氏变换相应为

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - [sf(0) + \dot{f}(0)] \quad (0-7)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right] = s^3 F(s) - [s^2 f(0) + s\dot{f}(0) + \ddot{f}(0)] \quad (0-8)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - [s^{n-1} f(0) + s^{n-2} \dot{f}(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)] \quad (0-9)$$

当原函数 $f(t)$ 及其各阶导数的初始值都等于零时, 式(0-9)将变为

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \quad (0-10)$$

在本书传递函数的定义中将使用该定理。

3. 积分定理

若 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 那么有

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \quad (0-11)$$

式中, $f^{(-1)}(0)$ 是函数 $\int f(t) dt$ 在 $t = 0$ 时的值。

4. 位移定理

若 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 那么有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \quad (0-12)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \quad (0-13)$$

式(0-12)和式(0-13)分别表示实域中的位移定理和复数域中的位移定理。

5. 终值定理

若函数 $f(t)$ 及其各阶导数都是可拉氏变换的, 那么函数 $f(t)$ 的终值为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (0-14)$$

即函数 $f(t)$ 在自变量 t 趋于无穷大时的极限值等于函数 $sF(s)$ 在自变量 s 趋于零时的极限值。

在本书中计算系统的稳态误差时, 将利用该定理。

6. 初值定理

若函数 $f(t)$ 及其各阶导数都是可拉氏变换的, 那么函数 $f(t)$ 的初值为

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (0-15)$$

即函数 $f(t)$ 在自变量 t 趋于零(从正趋于零)时的极限值等于函数 $sF(s)$ 在自变量 s 趋于无穷大时的极限值。

在本书中介绍线性系统的时域分析时, 会利用拉氏变换及其上述性质。

0.1.3 用拉普拉斯变换解线性微分方程

在简单了解了拉氏变换的定义及其基本性质后, 下面将通过一个例子介绍如何利用拉氏变换解线性微分方程。解题的主要思路是先对微分方程两边进行拉氏变换, 将微分运算变为代数运算后, 解出输出的拉氏变换表达式, 再应用拉氏反变换求得时域解。所以, 用拉普拉斯变换解线性微分方程的关键是拉氏反变换的求取。下面将首先介绍一下拉氏反变换的求取。

一般地, $F(s)$ 是复变量 s 的有理代数分式, 可以表示为如下形式:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (0-16)$$

式中, 系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 都是实常数, 且 $m < n$ 。下面将 $F(s)$ 写为部分分式形式, 则有

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \quad (0-17)$$

式中, $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $A(s) = 0$ 的根, 称为 $F(s)$ 的极点。根据 $A(s) = 0$ 有无重根, 下面分两种情况讨论。

1) $A(s) = 0$ 无重根

$A(s) = 0$ 无重根时, $F(s)$ 可展开为 n 个简单的部分分式之和, 且每个分式都是以 $A(s)$ 的一个因式作为其分母, 即可以表示为如下形式:

$$F(s) = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-s_i} \quad (0-18)$$

式中, c_i 为待定常数, 称为 $F(s)$ 在极点 s_i 处的留数, 可通过下式计算:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s-s_i)F(s) \quad (0-19)$$

或

$$c_i = \left. \frac{B(s)}{A(s)} \right|_{s=s_i} \quad (0-20)$$

式中, $\dot{A}(s)$ 为 $A(s)$ 对 s 求一阶导数。

然后, 根据拉氏变换的性质, 可求出 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$, 即求出其拉氏反变换为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(s-s_i)}\right] = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} \quad (0-21)$$

2) $A(s) = 0$ 有重根

设 $A(s) = 0$ 有 r 个 s_1 的重根, 则 $F(s)$ 可写为

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s-s_1)^r (s-s_{r+1}) \cdots (s-s_n)} \quad (0-22)$$

$$F(s) = \frac{c_r}{(s-s_1)^r} + \frac{c_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_{r+1}}{s-s_{r+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n} \quad (0-23)$$

式中, s_1 为 $F(s)$ 的重极点, 其余的极点为非重极点; $c_{r+1}, \cdots, c_n$ 为非重极点的待定常数, 按式(0-19)或式(0-20)计算; $c_r, c_{r-1}, \cdots, c_1$ 为重极点的待定常数, 可通过下式计算:

$$\begin{aligned} c_r &= \lim_{s \rightarrow s_1} (s-s_1)^r F(s) \\ c_{r-1} &= \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d}{ds} [(s-s_1)^r F(s)] \\ &\vdots \\ c_{r-j} &= \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(j)}}{ds^j} [(s-s_1)^r F(s)] \\ &\vdots \\ c_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{(r-1)}}{ds^{r-1}} [(s-s_1)^r F(s)] \end{aligned} \quad (0-24)$$

然后, 根据拉氏变换的性质, 可求出 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$, 即求出其拉氏反变换为

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \left[\frac{c_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{c_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + c_2 t + c_1 \right] e^{s_1 t} + \sum_{i=r+1}^n c_i e^{s_i t} \end{aligned} \quad (0-25)$$

例 0-1 求 $F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+2s}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解 将 $F(s)$ 的分母因式分解为

$$s^3 + 3s^2 + 2s = s(s+1)(s+2)$$

则

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+2s} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s+2}$$

按式(0-19)计算, 得

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{2} \\ c_2 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+3}{s(s+2)} = -2 \\ c_3 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+3}{s(s+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由式(0-21)可求得原函数为

$$f(t) = \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

例 0-2 求 $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解 由于分母中存在二重根, 所以将 $F(s)$ 展开成部分分式形式, 则有

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_3}{s} + \frac{c_4}{s+3}$$

按式(0-24)计算, 得

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = -\frac{1}{2}$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} \right] = -\frac{3}{4}$$

按式(0-19)计算, 得

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{2}{3}$$

$$c_4 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{1}{12}$$

由式(0-25)可写出原函数为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} \right] = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \right) e^{-t} + \frac{1}{12} e^{-3t}$$

0.2 辐角原理

0.2.1 函数 $F(s)$ 的映射

设复变函数 $F(s)$ 为复变量 s 的有理分式函数, 表示为

$$F(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (0-26)$$

式中, $z_1, z_2, \dots, z_m$ 为 $F(s)$ 的零点; $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为 $F(s)$ 的极点。

若 $F(s)$ 是复变量 $s = \sigma + j\omega$ 的一个函数, 则 $F(s)$ 为复数, 可以写成

$$F(s) = U(\sigma, \omega) + jV(\sigma, \omega) \quad (0-27)$$

式中, $U(\sigma, \omega)$ 和 $V(\sigma, \omega)$ 是实函数。

定义在 s 平面某一个域内的函数 $F(s)$ 在该域内解析的充分必要条件是它的导数在该域内连续。可以证明, s 的所有有理函数在 s 平面内除了奇点外处处解析。

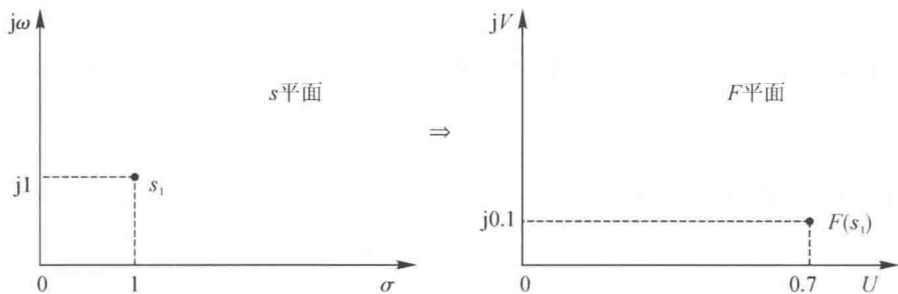
复变量 $s = \sigma + j\omega$ 可以表示在一个实轴为 σ 、虚轴为 ω 的平面上, 该平面称为 s 平面。 $F(s)$ 也可以用一个实轴为 U 、虚轴为 V 的平面表示, 该平面称为 F 平面。对于 s 平面的任意一点 $s = \sigma + j\omega$, 根据给定的 σ 和 ω 数值可以计算出相应的 U 和 V 的数值, 这样, s 平面内的点就映射到了 F 平面内。

例 0-3 已知 $F(s) = \frac{s+1}{s+2}$, 求 s 平面内的一点 $s_1 = 1 + j$ 在 F 平面内的映射。

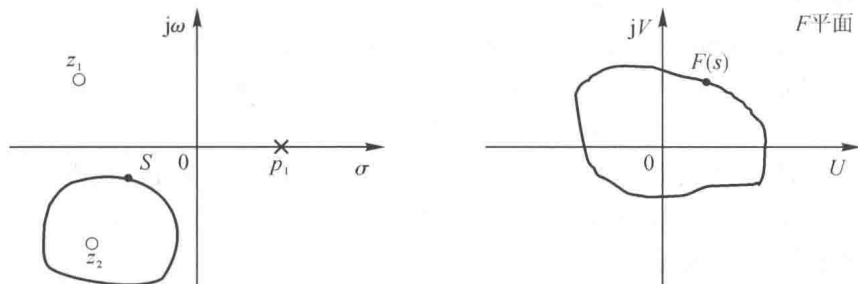
解

$$F(s_1) = \frac{2+j}{3+j} = 0.7 + j0.1$$

图 0-1 反映了这一关系。

图 0-1 函数 $F(s)$ 的映射

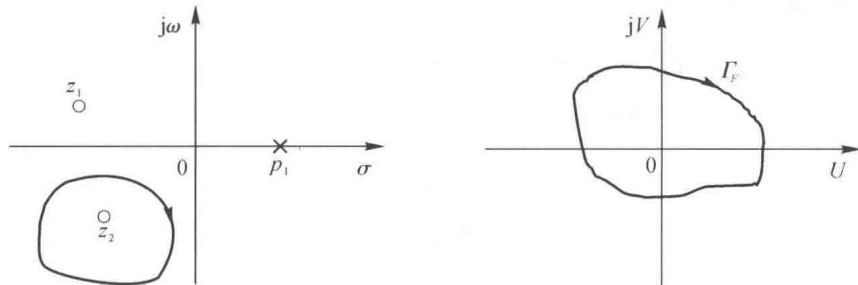
因此, 在 s 平面内画一条封闭曲线, 并使其不通过 $F(s)$ 的任一奇点, 则在 F 平面内存在一条映射曲线与之对应, 如图 0-2 所示。

图 0-2 s 平面和 F 平面映射关系

由于在后面的章节中, 利用该映射原理分析系统的稳定性时, 与稳定性密切相关的是 F 平面内对应的映射曲线包围坐标原点的次数和运动方向, 所以在后面的分析中常将两个平面画在一起。

0.2.2 辐角原理

设复变量 s 沿封闭曲线 Γ_s 在 s 平面内顺时针运动一周, 那么, 根据函数 $F(s)$ 的性质, 在 F 平面内那条对应的映射曲线 Γ_F 的运动方向可能为顺时针, 也可能为逆时针。 Γ_s 曲线和 Γ_F 曲线的映射关系如图 0-3 所示。

图 0-3 Γ_s 曲线和 Γ_F 曲线的映射关系

根据式(0-26), 复变函数 $F(s)$ 相角可以表示为

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) \quad (0-28)$$

根据式(0-28)和图 0-3 的零、极点情况, 可以得到