United States of America Mathematical Olympiads Tests from the First to the Latest

历届美国数学奥林匹克试题集

多解推广加强

（第2版）

刘培杰　主编

$\sum_1^5 kx_k = a$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

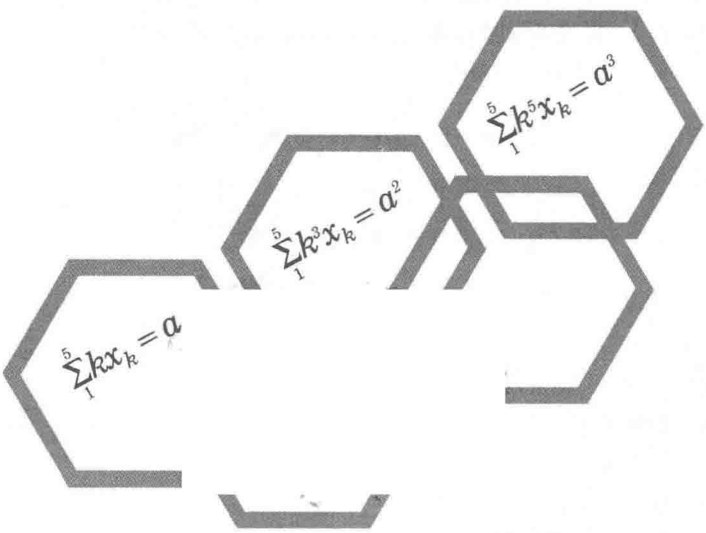
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

United States of America Mathematical Olympiads Tests from the First to the La

历届美国数学奥林匹克试题集

多解推广加强（第2版）

刘培杰　主编



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书汇集了第1届至第44届美国数学奥林匹克竞赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重了初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

历届美国数学奥林匹克试题集：多解推广加强/刘培杰主编. —2版. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.3

ISBN 978-7-5603-5862-8

Ⅰ.①历… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学-竞赛题-题解 Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第032388号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘家琳 赵新月 李宏艳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006

传 真 0451-86414749

网 址 http://hitpress.hit.edu.cn

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张22.25 字数415千字

版 次 2016年3月第2版 2016年3月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5862-8

定 价 48.00元

目　录 | Contents

第 1 届美国数学奥林匹克

1 记号 $(a,b,\cdots,g)$ 和 $[a,b,\cdots,g]$ 分别表示正整数 a, $b,\cdots,g$ 的最大公因数和最小公倍数. 例如, $(3,6,18)=3$, $[6,15]=30$. 证明

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$$

证法 1 设

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$$
$$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$$
$$c=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_n^{\gamma_n}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是互不相同的素数, α_i,β_i 和 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负整数, 因为

$$[a,b]=p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}}\cdots p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}$$
$$(a,b)=p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}}\cdots p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}$$

等等, 我们只需证明

$$2\max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\alpha_i,\beta_i\}-\max\{\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\gamma_i,\alpha_i\}=$$
$$2\min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-\min\{\alpha_i,\beta_i\}-\min\{\beta_i,\gamma_i\}-\min\{\gamma_i,\alpha_i\} \quad ①$$

对于 $i=1,2,\cdots,n$ 都成立. 不失一般性, 对某个 i, 不妨设 $\alpha_i\geqslant\beta_i\geqslant\gamma_i$, 那么式 ① 为

$$2\alpha_i-\alpha_i-\beta_i-\alpha_i=2\gamma_i-\beta_i-\gamma_i-\gamma_i$$

从而命题得证.

证法 2 设

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$$
$$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是互不相同的素数, $\alpha_i,\beta_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是非负整数, 那么

$$[a,b](a,b)=p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}+\min\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdots p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}+\min\{\alpha_n,\beta_n\}}=$$
$$p_1^{\alpha_1+\beta_1}\cdots p_n^{\alpha_n+\beta_n}=ab$$

所以
$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$$
类似地,可证
$$[a,b,c]=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(b,c)(c,a)}$$
所以
$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{\left[\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(b,c)(c,a)}\right]^2}{\frac{ab}{(a,b)}\cdot\frac{bc}{(b,c)}\cdot\frac{ca}{(c,a)}}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$$

2 一个给定的四面体 $ABCD$ 是等腰的,即 $AB=CD,AC=BD,AD=BC$. 证明:这个四面体的各个面都是锐角三角形.

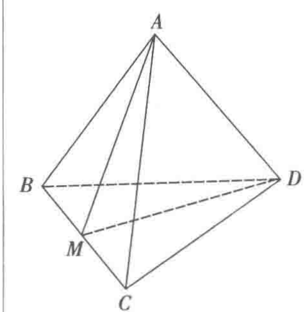


图 1.1

证法 1 由题设可知四面体 $ABCD$ 的四个面是全等的三角形,并且每个顶点处的三面角是由四面体一个面的三角形的三个内角组成.

设 M 是 BC 的中点,如图 1.1 所示,那么
$$AM+MD>AD=BC=2MC$$
因为 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$,所以 $AM=DM$,于是
$$2MD>2MC$$
点 D 在以 BC 为直径的圆外,故 $\angle BDC$ 是锐角. 同理可证其余两角也是锐角.

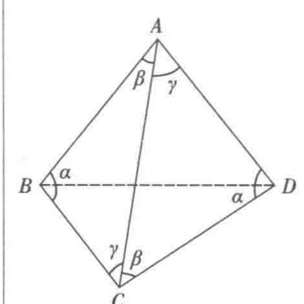


图 1.2

证法 2 因四面体的各个面都是全等三角形,设这些三角形的内角是 α,β,γ,如图 1.2 所示.

如果有一个面不是锐角三角形,那么 α,β,γ 中有一个非锐角,不妨设 $\alpha\geqslant 90^\circ$,那么 $\beta+\gamma\leqslant 90^\circ$. 因为三面角的任意两个面角之和大于第三个面角,所以
$$\alpha<\beta+\gamma\leqslant 90^\circ$$
这和 $\alpha\geqslant 90^\circ$ 矛盾. 故 α,β,γ 都是锐角.

3 一个随机数选择器只能从 $1,2,\cdots,9$ 这九个数字中任选一个,并且以等概率作这些选择,试确定在 $n(n>1)$ 次选择后,选出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

解 由于选出的数的乘积要被 10 整除,故 n 次选择中,至少有一次选择 5 且至少有一次选择偶数,用 A 和 B 分别表示事件"n

个数之积可被2整除”和“n 个数之积可被5整除”,因此

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=$$
$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})=$$
$$1-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n$$
$$P(AB)=\frac{9^n-8^n-5^n+4^n}{9^n}$$

4 令 R 为非负有理数,试确定整数 a,b,c,d,e,f,使得对于 R 的每种选择,都有 $\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|<|R-\sqrt[3]{2}|$.

解 在不等式中,令 R 通过有理数趋近于 $\sqrt[3]{2}$,则右边趋近于0,因此左边也趋近于0,所以

$$a\cdot 2^{\frac{2}{3}}+b\cdot 2^{\frac{1}{3}}+c=2d+e\cdot 2^{\frac{2}{3}}+f\cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

从而

$$a=e,b=f,c=2d$$

代入原不等式,整理,约去两边公因式 $|R-2^{\frac{1}{3}}|$(R 是有理数,此式不等于0),得

$$\left|\frac{aR+b-d\sqrt[3]{2}(R+\sqrt[3]{2})}{dR^2+aR+b}\right|<1$$

即

$$-1<\frac{aR+b-d\sqrt[3]{2}(R+\sqrt[3]{2})}{dR^2+aR+b}<1$$

$$\begin{cases}\dfrac{-dR^2-d\sqrt[3]{2}R-d\sqrt[3]{4}}{dR^2+aR+b}<0\\ \dfrac{dR^2+2aR+2b-d\sqrt[3]{2}R-d\sqrt[3]{4}}{dR^2+aR+b}>0\end{cases}$$

不妨设 $d>0$,于是得

$$\begin{cases}dR^2+aR+b>0\\ dR^2+(2a-d\sqrt[3]{2})R+2b-d\sqrt[3]{4}>0\end{cases}$$

例如,可取:$d<\sqrt[3]{4}a,d<\sqrt[3]{2}b$. 最简单的情形是:$a=b=d=1$,从而 $c=2,e=f=1$.

5 一个给定的凸五边形 $ABCDE$ 具有如下性质:五个三角形 ABC,BCD,CDE,DEA,EAB 中的每一个面积都等于1. 证明:每个具有上述性质的五边形都有相同的面积,计算这个面积,并且有无限多个不全等的具有上述性质的五边形.

证法1 因为

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle EAB}=1$$

所以 $AB /\!/ EC$. 类似地,有 $BD /\!/ AE$,故 $ABPE$ 是平行四边形,其中 P 是 BD 和 CE 的交点. $S_{\triangle BPE}=S_{\triangle EAB}=1$.

令 $S_{\triangle BCP}=x$,那么

$$S_{\triangle EPD}=x, S_{\triangle CDP}=1-x$$

因为
$$\frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle CDP}}=\frac{BP}{PD}=\frac{S_{\triangle BPE}}{S_{\triangle PDE}}$$

所以

$$\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$$

$$x^2+x-1=0$$

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

于是五边形 $ABCDE$ 的面积为

$$S_{\triangle CDE}+2S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BCP}=3+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

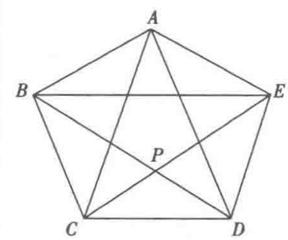


图 1.3

如图 1.3 所示,任意作一个 $\triangle BCP$,使得 $S_{\triangle BCP}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,延长 CP 到 E,BP 到 D,使得 $S_{\triangle BPE}=S_{\triangle BCD}=1$. 于是

$$\frac{CP}{PE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{DP}{PB}=\frac{DB-PB}{PB}=\frac{DB}{PB}-1=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

所以
$$\frac{CP}{PE}=\frac{DP}{PB}$$

从而 $BE /\!/ CD$, $S_{\triangle CDE}=S_{\triangle BCD}=1$.

作 $EA /\!/ BD$, $AB /\!/ EC$,它们的交点为 A,那么 $S_{\triangle DEA}=S_{\triangle EAB}=S_{\triangle BPE}=1$,同理 $S_{\triangle ABC}=1$.

因为面积为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的 $\triangle BCP$ 可作无数多个不全等的,所以如上所得的无数多个不全等的五边形具有上述性质.

证法 2 以凸五边形 $ABCDE$ 的边 AB 为 x 轴,以 A 为原点建立直角坐标系,且设 $AB=a$,因 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}=1$,故 C,E 两点的纵坐标为$\frac{2}{a}$. 设点 C,E 的横坐标为 b,c,点 D 的坐标为 (d,e). 那么五点的坐标为 $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,\frac{2}{a})$, $D(d,e)$, $E(c,\frac{2}{a})$. 如图 1.4 所示,有

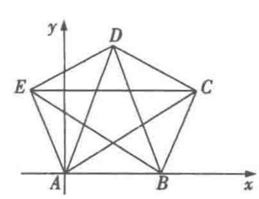


图 1.4

$$S_{\text{五边形}ABCDE}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}=2+\frac{1}{2}ae$$

因为 $DE /\!/ AC$,所以$\frac{2}{a} : b = \left(e - \frac{2}{a}\right) : (d - c)$,类似地,由 $EA /\!/ BD$,$BC /\!/ DA$ 可得

$$e : (d - a) = \frac{2}{a} : c$$

$$e : d = \frac{2}{a} : (b - a)$$

将它们分别整理后得

$$aeb + 2(c - d - b) = 0 \quad ①$$

$$aec + 2(a - d) = 0 \quad ②$$

$$ae(a - b) + 2d = 0 \quad ③$$

式 ① + ③,式 ② + ③ 分别可得

$$a^2e + 2(c - b) = 0 \quad ④$$

$$ae + e(c - b) + 2 = 0 \quad ⑤$$

从式 ④,⑤ 中消去 $c - b$,得

$$a^2e^2 - 2ae - 4 = 0$$

解得 $\qquad ae = \sqrt{5} + 1 \quad$ (负的已舍去)

所以 $\qquad S_{五边形ABCDE} = 2 + \frac{1}{2}ae = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$

因此具有题述性质的凸五边形的面积都相同.

将上面的 a,b 设为任意给定的正实数,那么

$$e = \frac{\sqrt{5} + 1}{a}, d = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}(b - a)$$

$$c = b - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}a$$

$$A(0,0), B(a,0), C\left(b, \frac{2}{a}\right)$$

$$D\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}(b - a), \frac{\sqrt{5} + 1}{a}\right), E\left(b - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}a, \frac{2}{a}\right)$$

以上述 5 个点为顶点的五边形 $ABCDE$ 对应于不同的正实数 a 与 b,在直角坐标系里凸五边形 $ABCDE$ 具有无限多个且互不相同. 因此我们只需证明以 A,B,C,D,E 为顶点的凸五边形具有题述性质.

显然 $AB /\!/ CE$,有

$$(b - a) : \frac{2}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}(b - a) : \frac{\sqrt{5} + 1}{a}$$

所以 $BC /\!/ DA$. 类似地,可证

$$CD /\!/ EB, DE /\!/ AC, EA /\!/ BD$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{a} = 1$$

由上所述得

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} = S_{\triangle CDE} = S_{\triangle DEA} = S_{\triangle EAB} = 1$$

所以具有题述性质的凸五边形 $ABCDE$ 有无限多个.

第 2 届美国数学奥林匹克

1 P,Q 两点在正四面体 $ABCD$ 的内部. 证明: $\angle PAQ < 60°$.

证法 1 设 AP,AQ 交平面 BCD 于 P_1,Q_1,联结 P_1Q_1 并延长交 BC,CD 于 P_2,Q_2,如图 2.1 所示. 那么 $\angle PAQ = \angle P_1AQ_1 \leqslant \angle P_2AQ_2$. 二面角 P_2-AQ_2-C 和 P_2-AQ_2-D 中至少有一个不小于 $90°$.

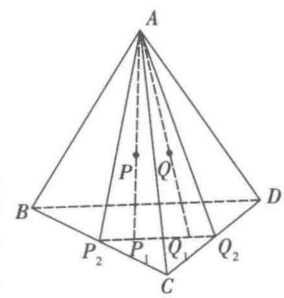


图 2.1

(1) 如果二面角 P_2-AQ_2-C 不小于 $90°$,因为在三面角中,大二面角对大面角,所以它所对的面角 $\angle P_2AC$ 最大,于是

$$\angle PAQ_2 \leqslant \angle P_2AC \leqslant \angle BAC = 60°$$

(2) 如果二面角 P_2-AQ_2-D 不小于 $90°$,那么

$$\angle PAQ_2 \leqslant \angle P_2AD$$

同理 $\angle P_2AD \leqslant \angle BAD$ 或 $\angle CAD$,所以 $\angle PAQ \leqslant 60°$.

证法 2 如果能证明 P_2Q_2 是 $\triangle AP_2Q_2$ 的最短边,那么 $\angle P_2AQ_2 \leqslant 60°$.

如图 2.2 所示,联结 P_2D,在 $\triangle P_2Q_2D$ 中,$\angle P_2Q_2D > 60°$,$\angle P_2DQ_2 < 60°$,所以 $P_2D > P_2Q_2$. 又因为 $AP_2 = DP_2$,所以 $AP_2 > P_2Q_2$,同理 $AQ_2 > P_2Q_2$. 所以 P_2Q_2 是 $\triangle AP_2Q_2$ 的最短边.

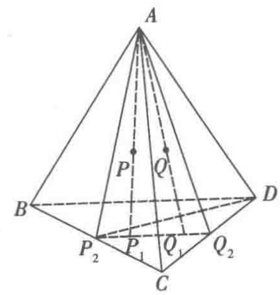


图 2.2

证法 3 如图 2.2 所示,设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1,令 $CP_2 = x, CQ_2 = y$. 在 $\triangle P_2CQ_2$ 中,由余弦定理得

$$P_2Q_2^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60° = x^2 + y^2 - xy$$

在 $\triangle AP_2C$ 中,由余弦定理得

$$AP_2^2 = x^2 - x + 1$$

在 $\triangle AQ_2C$ 中,由余弦定理得

$$AQ_2^2 = y^2 - y + 1$$

所以

$$AP_2^2 - P_2Q_2^2 = (1-y)(1+y-x) > 0$$

于是 $AP_2 > P_2Q_2$,同样 $AQ_2 > P_2Q_2$. 所以 P_2Q_2 是 $\triangle AP_2Q_2$ 的最短边,从而 $\angle PAQ \leqslant \angle P_2AQ_2 < 60°$.

说明 一般地有下面这个结论：

如果 $ABCD$ 是一个四面体，顶点 A 的三个面角都不大于 $90°$，P,Q 是它内部的两点，那么

$$\angle PAQ \leqslant \max\{\angle BAC, \angle CAD, \angle DAB\}$$

证法 4 如图 2.3 所示，AP,AQ 的延长线必交平面 BCD 于 $\triangle BCD$ 内部的点 M,N. 设直线 MN 交 BD 于 K，交 CD 于 L. 显然 $\angle PAQ < \angle KAL$，所以我们只要证 $\angle KAL \leqslant 60°$ 或 $\cos\angle KAL \geqslant \frac{1}{2}$.

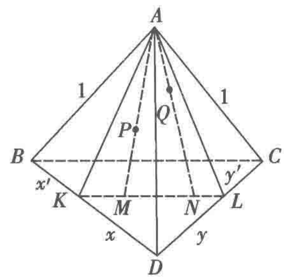


图 2.3

为了简便，不妨设正四面体棱长为 1，$DK = x, DL = y$，则

$$\cos\angle KAL = \frac{AK^2 + AL^2 - KL^2}{2AK \cdot AL} =$$

$$\frac{(1 + x^2 - x) + (1 + y^2 - y) - (x^2 + y^2 - xy)}{2AK \cdot AL} =$$

$$\frac{2 - x - y + xy}{2AK \cdot AL} = \frac{1 + (1 - x)(1 - y)}{2AK \cdot AL} =$$

$$\frac{1 + x'y'}{2\sqrt{1 - x' + x'^2}\sqrt{1 - y' + y'^2}}$$

其中 $x' = BK, y' = CL$. 于是只需证

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1 + x'y'}{2\sqrt{1 - x' + x'^2}\sqrt{1 - y' + y'^2}}$$

即

$$(1 - x' + x'^2)(1 - y' + y'^2) \leqslant (1 + x'y')^2$$

$$x'y' + x' + y' + x'^2y' + x'y'^2 \geqslant x'^2 + y'^2$$

由 $0 \leqslant x' \leqslant 1, 0 \leqslant y' \leqslant 1$，可见上列不等式成立.

2 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 为如下定义的两个整数数列

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$y_0 = 1, y_1 = 7, y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

于是，这两个数列的前几项为

$$x: 1,1,3,5,11,21,\cdots$$

$$y: 1,7,17,55,161,487,\cdots$$

证明：除了“1”这项外，不存在那样的项，它同时出现在两个数列中.

证法 1 将这两个数列的前几项分别模 8，我们得到

$$x: 1,1,3,5,3,5,\cdots$$

$$y: 1,7,1,7,1,7,\cdots$$

下面用数学归纳法证明,对一切自然数 n:

(1)$x_{2n+1} \equiv 3 \pmod 8$,$x_{2n+2} \equiv 5 \pmod 8$;

(2)$y_{2n-1} \equiv 1 \pmod 8$,$y_{2n} \equiv 7 \pmod 8$.

因 $x_3 = 3$,$x_4 = 5$,故 $n = 1$ 时结论成立.

设 $x_{2k+1} \equiv 3 \pmod 8$,$x_{2k+2} \equiv 5 \pmod 8$,那么

$$x_{2k+3} = x_{2k+2} + 2x_{2k+1} \equiv 5 + 6 \equiv 3 \pmod 8$$

$$x_{2k+4} = x_{2k+3} + 2x_{2k+2} \equiv 3 + 10 \equiv 5 \pmod 8$$

所以当 $n = k + 1$ 时结论也成立. 同样可证(2) 成立.

故除了"1" 这项外,不存在那样的项,它同时出现在两个数列中.

证法 2 递推式

$$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$$

的特征方程是

$$q^2 - q - 2 = 0$$

$$q_1 = 2, q_2 = -1$$

所以
$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n$$

令 $n = 1,2$,代入,得

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 = 1 \\ 4C_1 + C_2 = 3 \end{cases}$$

解得 $C_1 = \frac{2}{3}$,$C_2 = \frac{1}{3}$,故

$$x_n = \frac{1}{3}[2^{n+1} + (-1)^n]$$

同样地

$$y_n = 2 \cdot 3^n - (-1)^n$$

如果 $x_n = y_m$,那么

$$3^{m+1} - 2^n = \frac{1}{2}[3(-1)^m + (-1)^n] \tag{①}$$

如果 $n = 0$ 或 1,那么 $m = 0$ 是唯一的解.

当 $n \geqslant 2$ 时,如果 m,n 同奇偶,那么式 ① 的右边是偶数,而左边是奇数,式 ① 不成立.

如果 n 是奇数,m 是偶数,式 ① 两边模 4 得

$$(-1)^{m+1} - 4 \cdot 2^{n-2} \equiv 1 \pmod 4$$

即
$$-1 \equiv 1 \pmod 4$$

如果 n 是偶数,m 是奇数,式 ① 两边模 4 得

$$1 \equiv -1 \pmod 4$$

故当 $n \geqslant 2$ 时,不存在 m,使得 $x_n = y_m$. 从而除了"1" 这项外,不存在同时出现在两个数列中的项.

证法3 设 $S(t)=x_0+x_1t+x_2t^2+\cdots+x_nt^n+\cdots$，在这级数的收敛区间内，有

$$2t\cdot S(t)=2x_0t+2x_1t^2+\cdots+2x_{n-1}t^n+\cdots$$

$$-t^{-1}S(t)=-\frac{x_0}{t}-x_1-x_2t-\cdots-x_{n+1}t^n-\cdots$$

以上三式的两边分别相加，注意 $x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，得

$$(1+2t-t^{-1})S(t)=x_0-\frac{x_0}{t}-x_1$$

$$S(t)=\frac{x_0-x_0t^{-1}-x_1}{1+2t-t^{-1}}=\frac{1}{1-t-2t^2}=\frac{2}{3(1-2t)}+\frac{1}{3(1+t)}=$$

$$\frac{2}{3}(1+2t+2^2t^2+\cdots)+\frac{1}{3}(1-t+t^2-\cdots)$$

x_n 是 $S(t)$ 展式中 t^n 的系数

$$x_n=\frac{2}{3}\cdot 2^n+(-1)^n\frac{1}{3}=\frac{1}{3}[2^{n+1}+(-1)^n]$$

设

$$R(t)=y_0+y_1t+y_2t^2+\cdots+y_{n+1}t^{n+1}+\cdots$$

$$-2t\cdot R(t)=-2y_0t-2y_1t^2-\cdots-2y_nt^{n+1}-\cdots$$

$$-3t^2\cdot R(t)=-3y_0t^2-\cdots-3y_{n-1}t^{n+1}-\cdots$$

相加得

$$(1-2t-3t^2)R(t)=y_0+(y_1-2y_0)t=1+5t$$

$$R(t)=\frac{1+5t}{1-2t-3t^2}=\frac{2}{1-3t}-\frac{1}{1+t}=$$

$$2(1+3t+3^2t^2+\cdots)-(1-t+t^2-\cdots)$$

$$y_n=2\cdot 3^n-(-1)^n$$

为了使 x_m 等于 y_n，且 $m>0,n>0$，必须有

$$2\cdot 3^n-(-1)^n=\frac{1}{3}[2^{m+1}+(-1)^m]$$

即
$$2(3^{n+1}-2^m)=(-1)^m+3(-1)^n$$

m,n 必须奇偶性不同（否则上式右端能被 4 整除，而左端不能）.

若 m 是偶数而 n 是奇数，令 $m=2\overline{m}$，且 $n=2\overline{n}-1$，则

$$2(3^{2\overline{n}}-2^{2\overline{m}})=1-3=-2 \text{ 或 } 3^{2\overline{n}}+1=2^{2\overline{m}}$$

但 $\overline{m}>0$，$2^{2\overline{m}}$ 能被 4 整除，然而 $3^{2\overline{n}}+1=(4-1)^{2\overline{n}}+1=4k+2$ 不能被 4 整除，矛盾.

若 m 是奇数而 n 是偶数，令 $m=2\overline{m}+1$，且 $n=2\overline{n}$，则

$$2(3^{2\overline{n}+1}-2^{2\overline{m}+1})=-1+3=2 \text{ 或 } 3^{2\overline{n}+1}-1=2^{2\overline{m}+1}$$

但 $\overline{m}>0$，$2^{2\overline{m}+1}$ 可被 4 整除，然而 $3^{2\overline{n}+1}-1=(4-1)^{2\overline{n}+1}-1=4k-2$ 不能被 4 整除，矛盾.

3 在一个给定的正$(2n+1)$边形的顶点中随机地选取三个不同的顶点. 如果一切这种取法的可能性是相等的,求这个正多边形的中心位于随机所取三点构成的三角形内部的概率.

解 选定三角形的一个顶点,记为A_0,多边形的其余顶点依次记为$A_{-n},A_{-(n-1)},\cdots,A_{-1},A_1,A_2,\cdots,A_n$. 欲使多边形的中心位于三角形的内部,当且仅当三角形的另外两顶点是$P_k,P_{-l}(k,l>0)$,且下标满足$k+l>n$.

所以,对于每个固定的k,有k个三角形含多边形的中心,它们是

$$\triangle P_0P_kP_{-(n-k+1)},\triangle P_0P_kP_{-(n-k+2)},\cdots,\triangle P_0P_kP_{-n}$$

故这样的三角形总数是

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

由于有$2n+1$个顶点,所以含多边形中心的三角形有$\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$个,而三角形的总数为C_{2n+1}^3个,故所求的概率为

$$\frac{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}{C_{2n+1}^3}=\frac{n+1}{4n-2}$$

4 试确定下列方程组的所有实根或复根

$$\begin{cases}x+y+z=3\\x^2+y^2+z^2=3\\x^3+y^3+z^3=3\end{cases}$$

解 设x,y,z是三次方程

$$t^3-at^2+bt-c=0$$

的三个根,那么

$$a=x+y+z=3$$

$$2b=2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2=6$$

又因为x,y,z是三次方程的三个根,所以

$$x^3+y^3+z^3-a(x^2+y^2+z^2)+b(x+y+z)-3c=0$$

$$3-3a+3b-3c=0$$

因为$a=b=3$,故$c=1$,三次方程变为$(t-1)^3=0$. 所以我们得方程组的解为$(x,y,z)=(1,1,1)$.

说明 更一般地,利用牛顿公式,如果