向量优化问题的适定性研究及相关分析

XIANGLIANG YOUHUA WENTI DE SHIDINGXING YANJIU JI XIANGGUAN FENXI

曾 静 著

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

本书的出版获得国家自然科学基金青年基金项目“约束集值优化问
究及相关分析”(11401058)，重庆市基础与前沿研究计划一般项目“多目
的存在性研究及稳定性分析”(cstc2016jcyjA0219)及“广义积图与超欧拉图的性质及应用”(cstc2014jcyjA00033)，重庆高校创新团队建设计划资助项目（CXTDX201601026），以及重庆市教委科技项目“广义棱与超欧拉图的性质及其应用”(KJ1400630)的资助。

向量优化问题的适定性研究及相关分析

XIANGLIANG YOUHUA WENTI DE SHIDINGXING YANJIU JI XIANGGUAN FENXI

曾 静 著

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press
中国 · 成都

图书在版编目(CIP)数据

向量优化问题的适定性研究及相关分析/曾静著.—成都:西南财经大学出版社,2017.6
ISBN 978-7-5504-2938-3

Ⅰ.①向… Ⅱ.①曾… Ⅲ.①向量分析—研究 Ⅳ.①O183.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 088462 号

向量优化问题的适定性研究及相关分析

曾静 著

责任编辑:胡莎
封面设计:何东琳设计工作室
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网 址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电 话	028-87353785 87352368
照 排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印 刷	四川五洲彩印有限责任公司
成品尺寸	165mm×230mm
印 张	10.25
字 数	175 千字
版 次	2017 年 6 月第 1 版
印 次	2017 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5504-2938-3
定 价	68.00 元

前 言

向量优化是基于多目标决策应用，最近几十年才迅速发展起来的一个新兴运筹学分支，其研究范畴包含向量值(多目标)优化问题、集值优化问题、向量平衡问题、向量变分不等式问题、向量相补问题、向量极大极小问题、向量交通网络平衡问题等。向量优化问题具有丰富的实际背景，现实生活中的大量实际问题为其提供了研究模型。譬如物流配送、工程设计、经济金融、环境保护以及社会建设等重大决策和管理活动中都存在大量的向量优化问题。此外，向量优化问题与变分不等式、微分包含、最优控制、数理经济、网络经济、博弈论、交通网络、决策和对策理论以及非线性分析中的许多问题有着密切的联系。不难发现，向量优化问题的研究有重要的理论意义和应用价值。

近年来，向量优化问题是优化领域研究的一大热点问题，国内外众多学者对向量优化问题及其相关问题的理论、算法及应用进行了深入研究，得到了一系列重要成果。关于向量优化问题的研究主要有解的存在性研究、解集性质研究(连通性、稠密性等)、稳定性研究、适定性研究、对偶理论研究、灵敏性分析等。其中，向量优化问题的适定性研究是一个非常热门的研究方向。向量优化问题的适定性主要分为两大类：Hadamard 型适定性和 Tykhonov 型适定性。Tykhonov 型适定性，从近似解序列的角度定义了适定性，这种适定性概念与数值计算联系密切，成果非常丰富，理论趋于完善。Hadamard 型适定性，则强调问题解连续地依赖于问题数据的

稳定性。与 Tykhonov 适定性出发点不同,它确保了问题数据扰动越小时,扰动问题近似解与精确解之间的误差越小。Hadamard 适定性与稳定性分析、扰动分析密切相关,因此针对向量优化问题的 Hadamard 适定性研究具有重要的理论意义。

本书的主要内容为作者近年来在向量优化问题适定性研究、稳定性研究、解的存在性研究、误差分析等方面所取得的进展和成果。要掌握本书中的知识,需要具备拓扑学、集值分析、凸分析、泛函分析、线性与非线性分析、非光滑分析、变分分析、锥偏序理论等相关数学分支的理论知识。本书不仅适合运筹学专业高年级本科学生或研究生选作学习资料,也适合从事优化理论及算法研究的研究者选作参考书籍。

本书的出版获得国家自然科学基金青年基金项目"约束集值优化问题的适定性研究及相关分析"(11401058),重庆市基础与前沿研究计划一般项目"多目标博弈均衡解的存在性研究及稳定性分析"(cstc2016jcyjA0219)及"广义积图与超欧拉图的性质及应用"(cstc2014jcyjA00033),重庆高校创新团队建设计划资助项目(CXTDX201601026),以及重庆市教委科技项目"广义棱与超欧拉图的性质及其应用"(KJ1400630)的资助,在此一一表示感谢。

由于作者水平有限,撰写仓促,错漏及不足之处在所难免,敬请读者批评指正。

目 录

1　凸向量值优化问题的适定性及稳定性

本章考虑在近似向量值优化问题 Painlevé-Kuratowski 收敛于目标向量值优化问题的情况下，借助非线性标量化函数，讨论向量值优化问题有效点的适定性和稳定性结果。

1.1　引言

向量优化是以多目标决策应用为背景，最近几十年才迅速发展起来的一个新兴运筹学分支，其研究范畴包含：向量值（多目标）优化问题、集值优化问题、向量平衡问题、向量变分不等式问题、向量相补问题、向量极大极小问题、向量交通网络平衡问题等。在经济生产、工程管理和日常生活中，人们决策时常常需要同时考虑多个评价指标，例如在研究生产过程的组织决策时，既要考虑生产系统的产量最大，又要保证产品质量高、生产成本低等。因此，向量优化问题无所不在，是非常贴近实际问题的一类数学模型，在国际上引起了学者们的极大关注和重视。

适定性概念最初是由法国数学家 J.Hadamard 于 1902 年在研究物理现象数学模型时提出的。它要求问题的最优解存在并唯一，且最优解对问题数据（目标问题或者可行集）连续依赖，学者们称这种适定性为 Hadamard 适定性。换句话说，对于一个给定的问题，如果它的最优解存在且

唯一，并且当其他问题以某种方式逼近该问题时，这些问题对应的解也是逼近该给定问题的最优解的，那么称这个给定问题是 Hadamard 适定的。1966 年，俄罗斯数学家 A.N. Tykhonov 针对优化问题提出了一种适定性概念，要求问题的最优解存在并唯一，且该问题的每个极小化序列都趋于问题的最优解，学者们称这种适定性为 Tykhonov 适定性。Hadamard 适定性和 Tykhonov 适定性是标量优化问题适定性研究的两大类，受到众多学者的广泛关注和深入研究，参见文献[3-21]。

向量优化问题的适定性研究也主要分为 Tykhonov 型适定性和 Hadamard 型适定性两大类。目前，就国内外研究现状来说，Hadamard 型适定性研究相对较少。适定性可以看成稳定性研究的一个方面，但又具有其本身的研究特色，因此可以利用一些稳定的研究结果来进一步研究适定性。譬如，1993 年 H. Attouch & H. Riahi 在有限维空间中建立了一类向量值优化问题有效点集的稳定性。2000 年，黄学祥研究了当一系列优化问题 Painlevé-Kuratowski 收敛于目标优化问题时，向量值优化问题以及集值优化问题解集的稳定性结果，此结果推广了文献[22]中相应的结果。2004 年 R. E. Lucchetti & E. Miglierina 首先研究了扰动优化问题连续收敛于目标优化问题时，其最优解集的稳定性结果。2008 年，P. Oppezzi & A. M. Rossi 给出了向量值函数序列收敛的定义并借此定义研究了向量优化问题的稳定性结果。本章考虑利用文献[26]中的标量化结果建立了向量值函数序列收敛的标量化定理，并将 Hadamard 型适定性结果从标量情形推广到向量值函数情形，并考虑用 Painlevé-Kuratowski 收敛代替连续收敛来推广文献[24]中的稳定性结果。

1.2 预备知识

在本章中,除非特别说明,总假设 X 是一个 Banach 空间,Y 是一个 Hausdorff 拓扑线性空间,其上由尖($i.e.$,$C \cap (-C) = \{0\}$)闭凸锥 $C \subset Y$ 定义了序关系,且 C 具有非空内部,记为 $\mathrm{int}C$. 定义 Y 空间中的元素 $+\infty$ 为 $\forall y \in Y$,$+\infty - y \in C$。

考虑如下向量值优化问题:

$$(S,f):\min_{x \in S} f(x),$$

其中 $f:S \to Y$ 是向量值函数,S 是 X 中的非空子集。如果

$$f(x_0) \in \mathrm{Min}f(S)\ (f(x_0) \in \mathrm{WMin}f(S))$$

那么称点 $x_0 \in S$ 为问题 (S,f) 的有效解(弱有效解),问题 (S,f) 的有效解(弱有效解)所构成的集合记为 $\mathrm{Eff}(S,f)$($\mathrm{WEff}(S,f)$)。其中,点 $a_0 \in A$ 称为集合 A 关于锥 C 的有效点,如果

$$(A - \{a_0\}) \cap (-C \backslash \{0\}) = \varnothing.$$

集合 A 所有有效点构成的集合记为 $\mathrm{Min}A$。点 $a_0 \in A$ 称为集合 A 关于锥 C 的弱有效点,如果

$$(A - \{a_0\}) \cap (-\mathrm{int}C) = \varnothing,$$

那么集合 A 所有弱有效点构成的集合记为 $\mathrm{WMin}A$。

若 $Y = R$ 且 $C = R_+$,则问题 (S,f) 退化为标量优化问题。记标量优化问题的解集为 $\mathrm{Inf}(S,f)$,最优值为 $\mathrm{Val}(S,f)$。如果对于实数 $\varepsilon \geq 0$,有

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x),\ \forall x \in S,$$

则称点 $x_0 \in S$ 为标量优化问题 (S,f) 的 ε - 近似解,记标量优化问题 (S,f) 所有 ε - 近似解所构成的集合为 $\varepsilon - \mathrm{Inf}(S,f)$。此概念可以推广到向

量值优化问题的情况，譬如文献[27]中的如下定义。

定义 1.2.1 设 $k_0 \in \mathrm{int}C$, $\varepsilon \geq 0$。称点 x_0 为向量值优化问题 (S,f) 的 (ε,k_0) - 有效解（弱 (ε,k_0) - 有效解），如果

$$f(x_0) \in (\varepsilon,k_0) - \mathrm{Min}f(S)$$

$$(\mathrm{resp.}\ f(x_0) \in (\varepsilon,k_0) - \mathrm{WMin}f(S).)$$

向量值优化问题 (S,f) 所有 (ε,k_0) - 有效解（弱 (ε,k_0) - 有效解）所构成的集合记为 $(\varepsilon,k_0) - \mathrm{Eff}(S,f)$ $((\varepsilon,k_0) - \mathrm{WEff}(S,f))$ 。显然，

$$(0,k_0) - \mathrm{Eff}(S,f) = \mathrm{Eff}(S,f)\ ((0,k_0) - \mathrm{WEff}(S,f) = \mathrm{WEff}(S,f)).$$

其中，如果

$$(A - a + \varepsilon k_0) \cap (-\mathrm{C}) = \varnothing,$$

那么称点 $a \in A$ 是集合 A 的 (ε,k_0)-有效点，集合 A 的所有 (ε,k_0)-有效点构成的集合记为 $(\varepsilon,k_0) - \mathrm{Min}A$ 。如果

$$(A - a + \varepsilon k_0) \cap (-\mathrm{intC}) = \varnothing,$$

那么称点 $a \in A$ 是集合 A 的弱 (ε,k_0)-有效点。集合 A 所有弱 (ε,k_0)-有效点构成的集合记为 $(\varepsilon,k_0) - \mathrm{WMin}A$ 。不难发现，当 A 是闭集时，集合 $\mathrm{WMin}A$ 和 $(\varepsilon,k_0) - \mathrm{WMin}A$ 也是闭集。此外，显而易见，

$$\mathrm{Min}A \subset \mathrm{WMin}A.$$

当 $\varepsilon > 0$ 时，

$$(\varepsilon,k_0) - \mathrm{Min}A \subset (\varepsilon,k_0) - \mathrm{WMin}A,$$

当 $0 < \varepsilon < \delta$ 时，

$$(\varepsilon,k_0) - \mathrm{WMin}A \subset (\delta,k_0) - \mathrm{Min}A.$$

定义 1.2.2 称 Y 中非空子集序列 $(D_n)_{n\in N}$ 在 Painlevé-Kuratowski 意义下收敛于非空子集 D ，记为 $D_n \xrightarrow{P.K.} D$ ，如果

$$\lim\sup{}_n D_n \subset D \subset \lim\inf{}_n D_n,$$

其中内极限 $\liminf_n D_n$ ，由序列 $(x_n)_{n\in N}$, $x_n \in D_n$ 所有极限点构成，而外

极限 $\lim\sup_n D_n$ 由这种序列所有的聚点构成。

定义 1.2.3 称向量值函数序列 $f_n:X \to Y$ Painlevé-Kuratowski(简称为 P.K.)收敛于向量值函数 $f_n:X \to Y$(记为 $f_n \xrightarrow{P.K.} f$),若

$$\mathrm{epi}f_n \xrightarrow{P.K.} \mathrm{epi}f,$$

其中 $n \in N$,

$$\mathrm{epi}f_n = \{(x,z):z \in f_n(x)+K\},$$
$$\mathrm{epi}f = \{(x,z):z \in f(x)+K\}.$$

定义 1.2.4 设 $E_n, E \subset X$, $n \in N$, $\{f_n:E_n \to Y, n \in N\}$ 是向量值函数序列, $\{(E_n,f_n):n \in N\}$ 为其相应的序列对,另设 $f:E \to Y$ 是一个向量值函数,称序列 $(E_n,f_n)_{n\in N}$ P.K.收敛于 (E,f)(记为 $(E_n,f_n) \xrightarrow{P.K.} (E,f)$),如果 $\bar{f}_n \xrightarrow{P.K.} \bar{f}$,其中

$$\bar{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \in E_n, \\ +\infty, & x \in X\backslash E_n. \end{cases}$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ +\infty, & x \in X\backslash E. \end{cases}$$

引理 1.2.1 设 $f_n, f:X \to Y$ 是向量值函数, $\bar{x}_n, \bar{x} \in X$ 且 $\bar{x}_n \to \bar{x}$, $\varepsilon \in R$, $k_0 \in \mathrm{int}C$. 对于 $x \in X$,定义向量值函数 $h_n, h:X \to Y$ 为

$$h_n(x) = f_n(x) - f(\bar{x}_n) + \varepsilon k_0,$$
$$h(x) = f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon k_0.$$

如果 f 是连续的且 $f_n \xrightarrow{P.K.} f$,那么有

$$h_n \xrightarrow{P.K.} h.$$

证明:首先证明 $\mathrm{epi}h \subset \lim\inf_n \mathrm{epi}h_n$。事实上,任取 $(x,v) \in \mathrm{epi}h$,则有 $h(x) \in v - C$,即

$$f(x)-f(\bar{x})+\varepsilon k_0 \in v-C.$$

因此，

$$(x,f(\bar{x})-\varepsilon k_0+v) \in \mathrm{epi}f.$$

因为$f_n \xrightarrow{P.K.} f$，所以存在序列$(x_n,v_n) \in \mathrm{epi}f_n(n \in N)$，使得

$$(x_n,v_n) \to (x,f(\bar{x})-\varepsilon k_0+v). \tag{1.1}$$

由于$(x_n,v_n) \in \mathrm{epi}f_n$，因此有

$$f_n(x_n) \in v_n - C,$$

从而

$$h_n(x_n)=f_n(x_n)-f(\bar{x}_n)+\varepsilon k_0 \in v_n - f(\bar{x}_n)+\varepsilon k_0 - C,$$

这就意味着

$$(x_n,v_n-f(\bar{x}_n)+\varepsilon k_0) \in \mathrm{epi}h_n.$$

令$n \to +\infty$，根据(1.1)式和f的连续性可得

$$(x_n,v_n-f(\bar{x}_n)+\varepsilon k_0) \to (x,v).$$

即任取$(x,v) \in \mathrm{epi}h$，存在$(x_n,v_n-f(\bar{x}_n)+\varepsilon k_0) \in \mathrm{epi}h_n$，使得

$$(x_n,v_n-f(\bar{x}_n)+\varepsilon k_0) \to (x,v).$$

因此，

$$\mathrm{epi}h \subset \liminf_n \mathrm{epi}h_n.$$

其次证明$\limsup_n \mathrm{epi}h_n \subset \mathrm{epi}h$。任取$(x',v') \in \limsup_n \mathrm{epi}h_n$，则存在子序列$(x'_{n_k},v'_{n_k}) \in \mathrm{epi}h_{n_k}(k \in N)$，使得

$$(x'_{n_k},v'_{n_k}) \to (x',v').$$

因为$(x'_{n_k},v'_{n_k}) \in \mathrm{epi}h_{n_k}(k \in N)$，所以$h_{n_k}(x'_{n_k}) \in v'_{n_k}-C$，即

$$f_{n_k}(x'_{n_k})-f(\bar{x}_{n_k})+\varepsilon k_0 \in v'_{n_k}-C,$$

即

$$(x'_{n_k},v'_{n_k}+f(\bar{x}_{n_k})-\varepsilon k_0) \in \mathrm{epi}f_{n_k}.$$

显然，

$$(x'_{n_k}, v'_{n_k} + f(\bar{x}_{n_k}) - \varepsilon k_0) \to (x', v' + f(\bar{x}) - \varepsilon k_0).$$

又因为$f_n \xrightarrow{P.K.} f$,所以

$$(x', v' + f(\bar{x}) - \varepsilon k_0) \in \mathrm{epi} f.$$

从而,

$$f(x') - f(\bar{x}) + \varepsilon k_0 \in v' - C,$$

即

$$h(x') \in v' - C,$$

这就是说$(x', v') \in \mathrm{epi} h$.

证毕。

设$f: X \to Y$是一个向量值函数。根据文献[26],给定$k_0 \in \mathrm{int} C$,对于任意的$x_0 \in X$,$\varepsilon \geq 0$,标量化函数$\varphi_{x_0,\varepsilon}: Y \to [-\infty, +\infty]$定义为:

$$\varphi_{x_0,\varepsilon}(y) = \inf\{s \in R: y \in sk_0 + f(x_0) - \varepsilon k_0 - C\}, \forall y \in Y.$$

注意到当$f \equiv 0$, $\varepsilon = 0$时,标量化函数$\varphi_{x_0,\varepsilon}(y)$退化为众所周知的非线性标量化函数

$$\xi(y) = \inf\{s \in R: y \in sk_0 - C\}, \forall y \in Y.$$

引理 1.2.2 对于任意的$x_0 \in X$,$\varepsilon \geq 0$,如下性质成立:

(i) $\varphi_{x_0,\varepsilon}(\cdot)$是连续、凸、严格单调的函数(即,$\forall y_1, y_2 \in Y$,如果$y_1 \in y_2 - \mathrm{int} C$,那么有

$$\varphi_{x_0,\varepsilon}(y_1) < \varphi_{x_0,\varepsilon}(y_2),$$

且满足

$$\{y \in Y: \varphi_{x_0,\varepsilon}(y) < 0\} = f(x_0) - \varepsilon k_0 - \mathrm{int} C, \tag{1.2}$$

(ii) $\varphi_{x_0,\varepsilon}(f(x_0) + \rho k_0) = \varepsilon + \rho, \forall \rho \in R$,

(iii) $\varphi_{x_0,\varepsilon}(y) - \varphi_{x_0,\varepsilon}(y - \rho k_0) = \rho, \forall y \in Y, \forall \rho \in R$.

引理 1.2.3 设$f_n, f: X \to Y$是向量值函数,$\bar{x}_n, \bar{x} \in X$且$\bar{x}_n \to \bar{x}$,其中$n \in N$。另设$\varepsilon \geq 0$且f是连续的。如果$f_n \xrightarrow{P.K.} f$,那么有

$$\mathrm{epi}(\varphi_{\bar{x}_n,\varepsilon}\circ f_n)\xrightarrow{P.K.}\mathrm{epi}(\varphi_{\bar{x},\varepsilon}\circ f).$$

证明：设 $E_n=\mathrm{epi}(\varphi_{\bar{x}_n,\varepsilon}\circ f_n)$，$E=\mathrm{epi}(\varphi_{\bar{x},\varepsilon}\circ f)$。首先证明 $E\subset\liminf_n E_n$。对任意的 $(x,t)\in E$，则有

$$\varphi_{\bar{x},\varepsilon}\circ f(x)\le t.$$

根据引理 1.2.2(iii)可得，

$$\varphi_{\bar{x},\varepsilon}(f(x)-tk_0)\le 0.$$

根据(1.2)式可知，这就意味着

$$f(x)-tk_0-f(\bar{x})+\varepsilon k_0\in -C. \tag{1.3}$$

令

$$h_n(x)=f_n(x)-f(\bar{x}_n)+\varepsilon k_0,$$

$$h(x)=f(x)-f(\bar{x})+\varepsilon k_0,$$

根据(1.3)式可得，

$$(x,tk_0)\in\mathrm{epi}h.$$

根据 $f_n\xrightarrow{P.K.}f$ 和引理 1.2.1 可得，

$$h_n\xrightarrow{P.K.}h.$$

因此，存在序列 $(x_n,l_n)\in\mathrm{epi}h_n(n\in N)$，使得

$$(x_n,l_n)\to(x,tk_0).$$

由于 $(x_n,l_n)\in\mathrm{epi}h_n$，因此

$$f_n(x_n)\in f(\bar{x}_n)-\varepsilon k_0+l_n-C. \tag{1.4}$$

令非线性标量化函数 ξ 在 l_n 处的值为 $\xi(l_n)=t_n$，根据 $l_n\to tk_0$ 和 $\xi(\cdot)$ 的连续性可得，

$$t_n\to t.$$

此外，根据非线性标量化函数 $\xi(\cdot)$ 的定义以及锥 C 是闭集可得，

$$l_n\in t_nk_0-C.$$

又由(1.4)式可得,

$$f_n(x_n) \in f(\bar{x}_n) - \varepsilon k_0 + t_n k_0 - C.$$

从而,

$$\varphi_{\bar{x}_n,\varepsilon} \circ f_n(x_n) \le t_n .$$

综上可得 $E \subset \liminf_n E_n$ 。

其次证明 $\limsup_n E_n \subset E$ 。对任意的 $(x,t) \in \limsup_n E_n$,存在子序列 $(x_{n_k},t_{n_k}) \in E_{n_k}(k \in N)$,使得

$$(x_{n_k},t_{n_k}) \to (x,t) ,$$

从而有

$$\varphi_{\bar{x}_{n_k},\varepsilon} \circ f_{n_k}(x_{n_k}) \le t_{n_k} .$$

进一步可得

$$\varphi_{\bar{x}_{n_k},\varepsilon}(f_{n_k}(x_{n_k}) - t_{n_k}k_0) \le 0 ,$$

即是说

$$f_{n_k}(x_{n_k}) - t_{n_k}k_0 - f(\bar{x}_{n_k}) + \varepsilon k_0 \in - C.$$

这就意味着

$$(x_{n_k},t_{n_k}k_0) \in \mathrm{epi}h_{n_k} .$$

因为 $h_n \xrightarrow{P.K.} h$,所以有

$$(x,tk_0) \in \mathrm{epi}h .$$

从而可得,

$$f(x) - tk_0 - f(\bar{x}) + \varepsilon k_0 \in - C,$$

根据标量化函数 $\varphi_{\bar{x},\varepsilon}$ 的性质可得,

$$\varphi_{\bar{x},\varepsilon} \circ f(x) \le t .$$

这就意味着 $(x,t) \in E$ 。故有,

$$\limsup_n E_n \subset E .$$

证毕。

据文献[28]的性质 1.14 和定理 1.39 可知,$f_n:X \to \bar{R}$ P.K.收敛于$f:X$