主　编　王洪山　陈永光　刘桂东
副主编　唐　强　万　立　欧贵兵

普通高等教育数学基础课程“十三五”规划教材

概率论与数理统计

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育数学基础课程“十三五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　王洪山　陈永光　刘桂东
副主编　唐　强　万　立　欧贵兵

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是根据2014版“工科类本科数学基础课程教学基本要求”而编写的. 全书共分为8章，分别为概率论的基本概念，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计以及假设检验. 每章后附有习题，书后附有答案. 全书理论系统、举例丰富、讲解透彻，适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经管类有关专业的概率论与数理统计课程的教材使用，也可供作为相关专业人员和广大教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王洪山，陈永光，刘桂东主编.
--上海：同济大学出版社，2016.12
ISBN 978-7-5608-6700-7

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①王…　②陈…　③刘…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第324262号

普通高等教育数学基础课程“十三五”规划教材
概率论与数理统计
主编　王洪山　陈永光　刘桂东　**副主编**　唐　强　万　立　欧贵兵
责任编辑　陈佳蔚　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn
（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622）
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　大丰科星印刷有限责任公司
开　　本　787mm×1 092mm　1/16
印　　张　16
字　　数　320 000
印　　数　1—3 100
版　　次　2016年12月第1版　2016年12月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5608-6700-7

定　　价　35.00元

前　　言

“概率论与数理统计”是普通高等学校理、工、经济、金融以及管理类各专业普遍开设的一门重要的公共基础课程，具有较强的逻辑性和抽象性. 其理论和方法广泛应用于各个学科之中，特别是在大数据时代，概率论与数理统计在国民经济和科学技术中的地位和作用越来越重要. 为了更好地适应我国高等教育发展的新常态，满足新时期普通高等学校出现的教学新形式和教学特点，我们编写了这本《概率论与数理统计》教材.

本书的编写过程中，我们严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的“本科数学基础课程(概率论与数理统计部分)的教学基本要求”，参考了近几年兄弟院校出版的教材、教辅，结合编者多年的教学实践经验，在适度关注本课程自身系统性与逻辑性的同时，把握“以应用为主，必须够用为度”的原则，着重于学生完整全面地掌握基本概念、基本方法和基本技能，强调培养和提高学生基本运算能力.

本书的概念、定理以及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算严谨，精心选择具有代表性的例题和习题，通过简洁细腻的解题方法帮助学生掌握本课程的内容.

本书的主要内容有：概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计基本概念、参数估计以及假设检验. 本书的编写组成员均为教学一线工作多年、教学经验丰富的教师，在编写和审定教材时，大家紧扣指导思想和编写原则，准确定位，注重构建教材的体系和特色，并严谨细致的对内容的排序、例题习题的选择深入地进行了探讨，倾注了大量的心血.

由于编者水平有限，书中如有不妥之处，欢迎广大师生和同行批评指正.

编　者

2016. 12

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

在自然界和人类社会生产实践中发生的现象是多种多样的，其中一类是确定性现象，即在一定条件下必然要发生的现象．例如，向上抛石子必然下落；同性电荷一定相互排斥．还有一类现象，在相同条件下，可能出现这样的结果也可能出现那样的结果．例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定到底会出现哪种结果；同一门炮向同一目标发射多发同种炮弹，因受炮弹制造时质量误差、天气条件的微小变化等因素的影响，其弹着点也不尽相同，在射击前是无法预测弹着点的位置，等等．这些现象都有一个共同的特点：在一定的条件下，试验或现象会时而出现这种结果，时而出现那种结果，呈现出一种偶然性、不确定性．然而，经过人们长期实践和研究后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，其结果却呈现出某种规律性．例如，多次重复抛一枚硬币得到正面向上的大致一半；同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定的规律分布，等等．这种大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是我们以后说的**统计规律性**，把这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中其结果具有统计规律性的现象称为**随机现象**．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科．

1.1　随机试验、样本空间及随机事件

一、随机试验

这里所讨论的试验，其含义广泛，包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某一特征的观察也可看作一种试验．

下面我们来看一些试验的例子．

E_1：抛掷一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况．

E_2：抛掷一枚硬币三次，观察正面、反面出现的情况．

E_3：抛掷一枚硬币三次，观察正面出现的次数．

E_4:掷一颗骰子,观察出现的点数.

E_5:测试某种型号电子元件的使用寿命.

E_6:袋内有红、黄、蓝三色的球各一个,从中取出一个球来观察其颜色.

E_7:观察一天内到某超市购物的人数.

上面举出的七个试验的例子,它们有着共同的特点.例如,试验 E_1 有两种可能的结果,出现 H 或者出现 T,但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T,这个试验可以在相同条件下重复进行.又如试验 E_5,电子元件的寿命(以小时计) $t \geqslant 0$,但在测试之前不确定它的寿命有多长.这一试验也可以在相同条件下重复进行.概括起来,这些试验具有以下特点:

(1) 可以在相同条件下重复进行(简称"可重复性");

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先知道其所有可能出现的结果(简称"不唯一性");

(3) 在进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(简称"不确定性").

在概率论中,通常把具有上述三个特征的试验称为**随机试验**,用 E 来表示.在本书中以后提到的实验都指随机试验.我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

二、样本空间

根据随机试验的概念,尽管每次试验之前无法预知试验结果,但试验的所有可能结果组成的集合是已知的.我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**,记为 S.样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**,用 e 来表示.于是 $S=\{e \mid e \text{为} E \text{的可能结果}\}$.

前面列举的七个随机试验 E_k 的样本空间 $S_k(k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ 分别为

$S_1=\{H, T\}$;

$S_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$;

$S_3=\{0, 1, 2, 3\}$;

$S_4=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$S_5=\{t \mid t \geqslant 0\}$;

$S_6=\{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$;

$S_7=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

应该说明的是:问题的不同,其样本空间可能不同,有的简单,有的复杂.样本空间的元素也由试验的目的所确定,试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

三、随机事件

在实际中,当进行随机试验时,人们往往关心满足某种条件的样本点组成的集

合. 例如,若规定某种型号电子元件的使用寿命不少于 500,则由 E_5 满足这一条件的样本点组成其样本空间 S_5 的一个子集 $A=\{t \mid t \geqslant 500\}$. 我们称 A 为试验 E_5 的一个随机事件. 显然,当且仅当子集 A 中一个样本点出现时,有 $t \geqslant 500$.

一般地,称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**,简称**事件**,用字母 A, B, $\cdots$ 表示. 在每次试验中,当且仅当事件中的一个样本点出现时,就称这一**事件发生**.

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**或**简单事件**. 把由两个及两个以上样本点组成的集合,称为**复合事件**或**复杂事件**. 不包含任何样本点的集合,即空集 $\varnothing$,称为**不可能事件**. 样本空间 S 包含所有的样本点,它是自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**.

例如,在 E_2 中,事件 A_1:"第一次出现 H",即 $A_1=\{HHH, HHT, HTH, HTT\}$;事件 A_2:"三次出现同一面",即 $A_2=\{HHH, TTT\}$. 在 E_5 中,事件 A_3:"寿命小于 1 000 小时",即 $A_3=\{T \mid 0 \leqslant t < 1\,000\}$.

四、事件间的关系及运算

事件是一个集合,因此事件间的关系与运算自然按照集合间的关系与运算来处理. 下面依"事件发生"的含义,给出这些关系和运算在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S,而 A, B, C, $A_k(k=1, 2, \cdots)$ 均为 S 的子集.

(1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记为 $A \subset B$,也称事件 A 是事件 B 的**子事件**.

(2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

(3) 若事件 C 发生当且仅当 A, B 中至少有一个发生,称事件 C 为事件 A 与事件 B 的**和事件**,记为 $A+B$ 或 $A \cup B$,即 $A \cup B=\{e \mid e \in A$ 或 $e \in B\}$.

易证,$A \subset B$ 当且仅当 $A \cup B=B$.

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的和事件,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1, A_2, $\cdots$ 的和事件.

(4) 若事件 C 发生当且仅当 A, B 同时发生,则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的**积事件**,记为 $A \cap B$ 或 AB,即 $A \cap B=\{e \mid e \in A$ 且 $e \in B\}$.

易证,$A \subset B$ 当且仅当 $A \cap B=A$.

类似地,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的积事件,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1, A_2, $\cdots$ 的积事件.

(5) 若事件 C 发生当且仅当 A 发生,而 B 不发生,则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记为 $A-B$,即 $A-B=\{e \mid e \in A, e \notin B\}$.

(6) 若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A \cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B

为**互不相容事件**或**互斥事件**. 若 $A_iA_j=\varnothing(i, j=1, 2, \cdots, i\neq j)$,则称 A_1, A_2, $\cdots$ 为**两两互不相容事件组**(或列).

(7) 若 $A\cup B=S, A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**或**对立事件**. 即在每次试验中,事件 A, B 中必有一个发生,且仅有一个发生. 记 A 的对立事件为 $\bar{A}$,且 $\bar{A}=S-A$.

易证,$A-B=A-AB=A\bar{B}$.

关于事件间的关系及运算与集合之间的关系及运算的类比,如表 1.1 所示.

表 1.1 **符号的意义**

符号	概率论	集合论
S	样本空间或必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	样本点	元素
A	事件 A	集合 A
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的余集(补集)
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生,而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 不相交

事件的基本运算律 设有事件 A, B, C,则有

交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$, $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

一般地

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n,$$

$$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n.$$

例 1 设 A, B, C 表示随机试验 E 的三个事件,如何通过 A, B, C 表示出下列事件?

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生;

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A, B, C 这三个事件都发生；

(4) A, B, C 这三个事件中至少一个发生；

(5) A, B, C 至少两个发生；

(6) A, B, C 三个事件都不发生；

(7) A, B, C 中不多于一个事件发生；

(8) A, B, C 中不多于两个事件发生；

(9) A, B, C 中恰有一个事件发生；

(10) A, B, C 中恰有两个事件发生.

解　(1) $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $(A-B)-C$ 或 $A-(B+C)$；

(2) $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$；

(3) ABC；

(4) $A+B+C$ 或 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$；

(5) $AB+BC+CA$ 或 $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$；

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $(\overline{A+B+C})$；

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$ 或 $(\overline{AB+BC+CA})$；

(8) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$；

(9) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$；

(10) $\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$.

例 2　从一批零件中任取两个，A 表示事件“第一个零件为合格品”，B 表示事件“第二个零件为合格品”，问 AB, $\bar{A}$, $\overline{AB}$, $\bar{A}\,\bar{B}$, $\overline{A\cup B}$ 分别表示什么事件？

解　(1) AB 表示事件“第一个，第二个零件都为合格品”；

(2) $\bar{A}$ 表示事件“第一个零件不是合格品”；

(3) $\overline{AB}$ 表示事件“在第一个零件，第二个零件中至少有一个不是合格品”；

(4) $\bar{A}\,\bar{B}$ 表示事件“第一个，第二个都不是合格品”；

(5) 因为 $A\cup B$ 表示事件“第一个零件，第二个零件中至少有一个合格品”，所以 $\overline{A\cup B}$ 表示事件“两个零件都不是合格品”.

1.2　概率的定义

对于一个事件(除必然事件和不可能事件外) 来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们通常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟多大. 为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次

试验中出现的可能性大小的数值——概率.

一、概率的统计定义

在某次试验中一个事件是否发生,事先是无法确定的.在相同的条件下,进行 n 次试验,把事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**,比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义,易见频率有下述基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小反映了事件 A 发生的频繁程度.频率大,A 发生频繁,意味着 A 在一次试验中发生的可能性大,反之亦然.这就提出了一个问题:能否用频率表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小?先看看下述例子.

例 1 考虑"抛硬币"这个试验,我们将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次,各做 10 遍,得到的数据如表 1.2 所示(其中 n_H 表示 H(出现正面)发生的频数,$f_n(H)$ 表示 H(出现正面)发生的频率).

表 1.2 **抛硬币试验(1)**

实验序号	n	n_H	$f_n(H)$	n	n_H	$f_n(H)$	n	n_H	$f_n(H)$
1	5	2	0.4	50	22	0.44	500	251	0.502
2		3	0.6		25	0.50		249	0.498
3		1	0.2		21	0.42		256	0.512
4		5	1.0		25	0.50		253	0.506
5		1	0.2		24	0.48		251	0.502
6		2	0.4		21	0.42		246	0.492
7		4	0.8		18	0.36		244	0.488
8		2	0.4		24	0.48		258	0.516
9		3	0.6		27	0.54		262	0.524
10		3	0.6		31	0.62		247	0.494

在概率论的发展历史过程中，有许多数学家也做过“抛硬币”的试验，其相关数据如表 1.3 所示.

表 1.3 **抛硬币试验(2)**

试验人	“抛硬币”试验次数	出现正面(H)	频率
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.509 6
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

由表 1.2 和表 1.3 中数据发现，当抛掷次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间的随机波动较大. 当 n 较大时，$f_n(H)$ 的随机波动较小. 当 n 逐渐增大时，$f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，而且逐渐稳定于 0.5.

例 2 考察英语中特定字母出现的频率. 当观察字母的个数 n(试验的次数)较小时，频率有较大幅度的随机波动. 当 n 增大时，频率呈现稳定性. Dewey. G统计了约 438 023 个字母后归纳了一份英文字母频率统计表如表 1.4 所示.

表 1.4 **字母出现频率**

字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	F	0.025 6
T	0.097 8	M	0.024 4
A	0.078 8	W	0.021 4
O	0.077 7	Y	0.020 2
I	0.070 6	G	0.018 7
N	0.063 4	P	0.018 6
S	0.059 4	B	0.015 6
R	0.057 3	V	0.010 2
H	0.039 4	K	0.006 0
L	0.038 9	X	0.001 6
D	0.028 0	J	0.001 0
U	0.026 8	Q	0.000 9
C	0.070 6	Z	0.000 6

大量试验表明，当试验次数 n 逐渐增大时，同一事件发生的频率尽管不一定相

同,然而却在某一固定的常数附近摆动,呈现出相对稳定的状态.我们把这种"频率稳定性"称为**统计规律性**.频率接近的这一固定常值看作相应事件的概率.于是得到概率的统计定义.

定义 1 在大量重复试验中,若事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近摆动,则称该常数 p 为事件 A 发生的**概率**,记为 $p(A) = p$.

由例 1 知,$P(H) = 0.5$.

二、概率的公理化定义

概率的统计定义从直观上给出了概率的定义,然而在理论上和应用中它又存在着缺陷.从理论上讲,人们会问:为什么频率具有稳定性?(要回答这个问题,需要用到第 5 章中的大数定律);从应用上讲,没有充分的理由认为,试验 $n+1$ 次计算出的频率总会比试验 n 次的更接近已求的概率,n 多大才好呢?没法确定.因此,必须研究概率更加严格的数字化定义.这个定义已经由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫于 1933 年给出,即概率公理化定义.

定义 2 设随机试验 E 的样本空间为 S,对 E 的某一事件 A 赋予一个实数记为 $P(A)$.如果集函数 $P(\cdot)$[*](* 集函数就是一个定义域为 S 的子集的某个集合、值域为某一数集的函数)满足下列条件:

(1) **非负性** 对于任意一个事件 A,有 $P(A) \geqslant 0$;

(2) **规范性** 对必然事件 S,有 $P(S) = 1$;

(3) **可列可加性** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件列,即当 $i \neq j$ 时,$A_iA_j = \varnothing (i, j = 1, 2, \cdots)$,则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$,即

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k), \tag{1-1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的公理化定义,可推得一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing) = 0$.

证 令 $A_n = \varnothing (n = 1, 2, \cdots)$,则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$,且 $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots$.由概率的可列可加性,得

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

又 $P(\varnothing) \geqslant 0$,所以 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2(有限可加性) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1-2}$$

证　令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = 0$,则 $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots$. 由概率的可列可加性及性质 1,得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0 \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质 3　设 A, B 为试验 E 的两个事件,若 $A \subset B$,则

(1) $P(B-A) = P(B) - P(A)$. (1-3)

(2) $P(A) \leqslant P(B)$. (1-4)

(3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (1-5)

证　因 $A \subset B$, $B = A \cup (B-A)$,且 $A \cap (B-A) = \varnothing$,所以由概率的有限可加性(1-2),有 $P(B) = P(A) + P(B-A)$.

于是

(1) $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

(2) 由概率的非负性,知 $P(B-A) \geqslant 0$,则 $P(B) \geqslant P(A)$.

(3) 取 $B = S$, $B - A = S - A = \bar{A}$,则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 4　对任一事件 A,有 $P(A) \leqslant 1$.

证　因 $S \supset A$,由式(1-4),得 $P(A) \leqslant P(S) = 1$.

性质 5(加法公式)　设 A, B 为试验 E 两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1-6}$$

证　因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$, $A \cap (B - AB) = \varnothing$, $AB \subset B$. 由概率的有限可加性及性质 3,得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

推论 1(次可加性)　设 A, B 为试验 E 两个事件,则

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B). \tag{1-7}$$

推论 2　对于任意 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n,有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + \\ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right). \end{aligned} \tag{1-8}$$

用数学归纳法可证得推论 2.

特别地,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

推论 3 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1-9}$$

1.3 等可能概型(古典概型)

在 1.1 节中抛掷硬币时,由硬币两面的对称性,出现正面 H 和出现反面 T 的可能性是一样的;投掷骰子时,同样会认为 6 个点数出现的可能性是一样的. 观察可知,这两例具有两个共同的特性:

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素;

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验是大量存在的. 这种试验被称为**等可能概型**,它是概率论发展初期的主要研究对象,也称为**古典概型**. 等可能概型的概率具有直观、容易理解的特点,有广泛的应用.

下面我们来讨论等可能概型中事件概率的计算公式.

设试验 E 的样本空间 $S = \{e_1, e_2, \cdots e_n\}$. 由于在每次试验中每个基本事件发生的可能性是相同的,即 $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$.

又由于基本事件两两不相容,于是

$$\begin{aligned} 1 = P(S) &= P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_n\}) \\ &= nP(\{e_i\}), \end{aligned}$$

得 $P(\{e_i\}) = \dfrac{1}{n}(i = 1, 2, \cdots, n)$.

又事件 A 含的基本事件数为 k,设 $A = \{e_{n_1}, e_{n_2}, \cdots, e_{n_k}\}$,这里 $k_1, k_2, \cdots, k_k$ 是 1, 2, …, n 中某 k 个不同的数, 所以 $P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{e_{n_j}\}) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}$.

定理　设样本空间 S 的基本事件数为 $|S|=n$，事件 A 含的基本事件数为 $|A|=k$，则事件 A 的概率

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{n_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}. \tag{1-10}$$

式(1-10) 就是古典概型中事件的**概率计算公式**.

式(1-10) 表明，在计算古典概型事件的概率时，只要求得试验的样本空间中的基本事件总数和事件所含的基本事件数，就容易求得概率了.

例 1　将一枚硬币抛掷三次，求(1) 恰好出现一次正面的概率；(2) 至少出现一次正面的概率.

解　试验 E_2 样本空间包含的基本事件数为

$$|S_2|=|\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}|=8.$$

(1) 用 A 表示事件"恰好出现一次正面"，则

$$\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数为 } |A|=|\{HTT, THT, TTH\}|=3,$$

所以 $P(A)=\dfrac{3}{8}$.

(2) 用 B 表示事件"至少出现一次正面"，则

$$|B|=|\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}|=7,$$

所以 $P(B)=\dfrac{7}{8}$.

$P(B)$ 还可用 B 的对立事件来求出. 事实上，事件 B 的对立事件 $\bar{B}$ 表示"不出现正面"，即"三次全出现反面"，有 $|\bar{B}|=|\{TTT\}|=1$，则 $P(\bar{B})=\dfrac{1}{8}$. 从而 $P(B)=1-P(\bar{B})=\dfrac{7}{8}$.

当样本空间的元素较多时，一般不再将 S 中的元素一一列出，而只需要分别求出 S 中与 A 中包含的元素的个数(即基本事件的个数)，再由式(1-10) 即可求出 A 的概率.

例 2　一袋中有形状大小相同的球 8 个，其中黑色球 5 个，白色球 3 个，从袋中取球两次，每次随机取一只. 考虑两种取球方式：

(1) 第一次从袋中取出一个球，观察颜色后不放回，第二次从剩余球中再取出一个球，这种方法叫作**不放回抽样**；

(2) 第一次从袋中取出一个球，观察后放回袋中，搅匀后再取一球，这种方法叫作**放回抽样**.