面向21世纪高等院校规划教材

随机信号分析

Random Signal Analysis

朱 华 黄辉宁 李永庆 梅文博 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

面向21世纪高等院校规划教材

随机信号分析

朱　华　黄辉宁　李永庆　梅文博　编

哈工程大学·

商交日．507考随机信号分析.

2116 204

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书系高等学校工科电子类专业基础教材。内容为概率论基础、平稳随机过程、窄带随机过程、随机信号通过线性与非线性系统的理论与分析方法等。在相应的部分增加了离散随机信号的分析。

本书的特点侧重在物理概念和分析方法上，对复杂的理论和数学问题着重用与实际的电子工程技术问题相联系的途径及方法去处理。与本书配套的习题和解题指南将与本书同期出版。

本书适用于电子工程系硕士研究生及高年级本科生，也适用于科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/朱华等编. —北京:北京理工大学出版社,2010.1 重印
ISBN 978-7-81013-379-1

Ⅰ.随…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.随机信号-信号分析-高等学校-教材
Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041837 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 涿州市新华印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 19.25
字　　数 / 448 千字
版　　次 / 2010 年 1 月第 1 版第 10 次印刷
印　　数 / 33201～35200 册
定　　价 / 25.00 元

前言

《随机信号分析》这本教材是编者在累积了十多年（1977—1989）教学实践经验的基础上编写而成的。过去我们曾编写了《统计无线电技术》、《随机过程》等教材。在此基础上，结合近年来电子科学技术的发展、在内容上作了相应的加深与拓宽，并加强了对离散系统的阐述，使之能与计算机技术相结合。该教材适用于电子工程系高年级本科生和低年级的硕士研究生，也适用于有关工程技术人员和科研工作者参考。

本教材在选择题材和准备内容时，① 保留了前两本教材的特点，即侧重在物理概念和分析方法上，对复杂的理论和高深的数学处理方法，不是从纯理论和纯数学的角度去解决，而是着重用与实际的电子工程技术问题相联系的途径和方法去处理。② 随着近十年国内外科学技术的迅速发展，特别是计算机技术的迅速发展，使得越来越多的工程问题将要用到数字化的处理技术，为此本教材在相应的各章节中增加了离散时间随机过程的内容。③ 多年来的教学实践使我们深深感到，通过加强练习来巩固某些关键性概念的重要性，为此我们收集和编排了大量习题，并编写了《随机信号分析解题指南》，它将与本教材同期出版。解题指南编排的次序与本教材的章节基本吻合，每章有重要概念的归纳、例题题解和习题。④ 考虑到篇幅有限，有关教学实验的内容未列入本教材，四个教学实验（包括概率密度测试以及随机信号统计特性的测试等硬、软件实验）将在实验指南中说明。

本教材共分七章，可供一学期教学之用，参考学时约为60。考虑到数学类有关概率论的教学参考书已很多，第一章概率论只归纳了主要的内容，对本教材后几章将要用到的内容，如多维随机变量的统计特性、特征函数以及极限定理等作了较为详细的叙述。第二章叙述了随机过程和相关理论的基本概念，特别对平稳随机过程、遍历性随机过程，还有常用到的正态随机过程的概念作了全面的叙述，同时还介绍了离散时间随机过程的基本概念。第三章对随机过程的另一种处理方法即谱分析的概念作了介绍。同时，对离散时间随机过程的谱密度以及谱分解定理作了相应的讨论。对沟通时域和频域分析的重要桥梁——维纳－辛钦定理以及对沟通连续和离散随机信号的采样定理作了证明。第四、五、六章结合电子工程实际、对随机信号通过线性系统、窄带系统、非线性系统如何分析其输出端的统计特性作了全面的介绍。为了便于读者理解这些分析方法，教材中选择了一些电子系统中常见的电路（如积分电路，放大电路，检波电路，限幅电路等），作为例子，分析和计算其输出端的统计特性。最后，第七章的内容是为了拓宽读者的视野，对实际中可能遇到的各种类型的随机过程，如马尔可夫过程、独立增量过程、维纳过程、泊松过程等作了介绍。

还要附带说明一点，本教材的某些节段是补充性的。如果略去或作粗读并不影响课程的连贯性。这些补充材料的节段左上角标有 * 号。

学习本课程以前，读者需具备微积分、概率论、电子线路、数字信号处理等基础课程的知识。

本教材由朱华担任主编。第一、六章由朱华编写，第三、五章由黄辉宁编写，第二、七章由李永庆编写，第四章由梅文博编写。

本教材由中国科学院张志方教授详细审阅，并提出了很多宝贵意见。在本教材的出版过程中，得到了教研室和系领导的热情支持及学校主管教材工作领导的热情帮助，在此深表谢意。由于编者水平有限，难免有错误的地方，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

chap4
79-
10号以上

$R_{XX} = 0$

第一章

概 率 论

§1.1 概率空间的概念

本节的目的是在已学过工科院校概率论的基础上，建立客观事物中随机事件及其概率的数学模型——概率空间的概念。从而在已学概率论的基础上对随机现象本质的理解达到进一步深化的程度。

在目前工科院校的概率论教材中，对随机事件仅给出了描述性的说明。对事件的概率仅在古典概率的情况下给出了明确的定义。但是在实际的各种随机现象中，显然并不能用古典概率来概括，因此仅依靠古典概率中事件概率的定义去研究客观事物中复杂的随机现象，其基础就显得不够了。为了找出各种复杂随机事件及其概率的准确描述方法，就需要从各种具体的随机现象的研究中，找出它们的共同性，从而建立起一个严格的、并能概括所有随机现象及其概率的数学模型。

为了下面叙述简便起见，先对一些术语和符号加以说明。用 E 表示随机试验。即在一组可以重复实现的条件下观察某种现象能否出现的行动。今后把随机试验简称为试验，试验中每一个可能的结果称为样本点，用 s 或带有下标的 s_k 表示样本点。试验 E 中一切可能结果的集合称为样本空间，用 S_E 表示，或简化成 S。集合 S 又可表示成

$$S = (s: s \text{ 是试验 } E \text{ 中的可能结果})$$

在研究某随机问题时，要通过试验 E 去观察现象（或事件），而所观察的现象往往是由 S 中的若干样本点所构成的集合。由此可见，试验 E 中的随机事件（以后简称事件）一定是该试验的样本空间 S 的一个子集。若 A 表示试验 E 中的一事件，则有

$$A \subset S$$

称 A 是 S 的子集。在对试验 E 的一次观察中，若发现其结果 s 是 A 中的元素，即

$$s \in A (\text{读作 } s \text{ 属于 } A)$$

则称事件 A 在这次试验中发生了。

现在，我们先研究三类具体的随机现象的模型及其性质，以便概括出具有普遍意义的随机现象的数学模型。

1.1.1 古典概率

设 E 是一试验，其一切可能的结果是有限多个，用 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$ 表示其全部可能的结果。即

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$$

用$\{s_k\}(k=1,2,\cdots,n)$表示只含有一个可能结果(或样本点)的事件,称$\{s_k\}$是基本事件,用$P[\{s_k\}]$表示基本事件在试验E中出现可能性的大小或基本事件的概率,则有

$$P[\{s_1\}]=P[\{s_2\}]=\cdots=P[\{s_n\}]=\frac{1}{n}$$

这个特性称等可能性,它是研究对象在物理上、几何形状上的均匀性和对称性的概括。

若所观察的随机现象用A表示,在A中含有n_A个样本点,则规定出现事件A的概率$P[A]$为

$$P[A]=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{S\text{ 中所含样本点数}} \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)就是古典概率中事件概率的计算公式。在古典概率中的事件及其概率有下述重要的性质。

1. 设A是试验E中的任一事件,则恒有

$$0\leqslant P[A]\leqslant 1$$

即事件发生的可能性大小是一非负的不超过1的实数。

2. S表示试验E中的必然事件,显然恒有

$$P[S]=1$$

即必然事件的概率是1。

3. 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是试验E中两两互不相交的事件,$\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$表示n个两两互不相交事件之和事件。若$\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$也是试验E中的事件,则有

$$P\left[\sum_{k=1}^{n}A_k\right]=\sum_{k=1}^{n}P[A_k]$$

即有限个两两互不相交的试验E中的事件的和事件,若仍是试验E中之事件时,则和事件的概率等于每一个事件的概率之和。

1.1.2 几何概率

在概率论发展的早期,就已经注意到仅考虑随机现象的可能结果为有限个基本事件是不够的,还必须计算无穷个基本事件的情形。

设与某个随机现象联系的样本空间S,其样本点具有所谓“均匀分布”的性质。这里所指的“均匀分布”类似于古典概率中的等可能性这一概念。设用$L(S)$作为区域S大小的量度,而区域S中任意可能出现的小区域A的量度用$L(A)$表示,例如可能是一维区间的长度,二维区间的面积,三维空间的体积…。并假定这些量度具有非负性和可加性。

设某一事件A(也是某一区域),它的量度大小为$L(A)$,若以$P[A]$表示事件A发生的概率,考虑到“均匀分布”性,事件A发生的概率取为

$$P[A]=\frac{L(A)}{L(S)} \tag{1.1.2}$$

这样的概率称之为几何概率。

[**例1.1**] 在时间间隔T内的任何瞬间,两个不相关的信号等可能地进入收音机。如果当且仅当这两个信号进入收音机的间隔时间不大于t,则收音机受到干扰,试求收音机受到干

扰的概率。

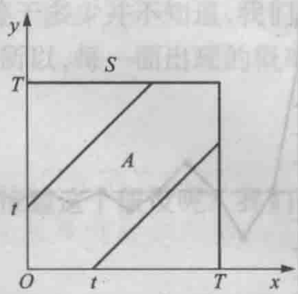

图 1.1 说明几何概型的示意图

解:以 x 和 y 分别表示两个信号进入收音机的瞬间,由假定有

$$0 \leqslant x \leqslant T$$

$$0 \leqslant y \leqslant T$$

则样本空间是由点 (x,y) 构成的边长为 T 的正方形 S,其面积为 T^2,如图 1.1 所示。

依题意,收音机受到干扰的充分必要条件是

$$|x-y| \leqslant t$$

这区域如图 1.1 中的 A,该区域位于区域 S 内直线 $x-y=t$ 及 $x-y=-t$ 之间,其面积为 $T^2-(T-t)^2$ 由式(1.1.2)可得所求概率为

$$P[A]=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

从上式可以看到,当 t 相对 T 来说很小时,收音机受干扰的概率 $P=0$。另一方面,当 $t=T$ 时,则有 $P=1$,它表明受干扰的间隔时间 t 与信号可能进入收音机的时间间隔 T 差不多相等时,则收音机以概率为 1 地受干扰,以上结果在直观上是明显的。

从几何概率的叙述中,设 E 是几何概率试验,S 表示在 E 试验下的样本空间,且 $L(S)>0$,我们同样可以概括出这类随机问题的基本性质如下。

1. 对任何事件 $A(\subset S$,且 $L(A)$ 存在)均有

$$0 \leqslant P[A] \leqslant 1$$

2. $P[S]=1$

3. 对可列多个事件列 $\{A_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$,若 $A_i \cap A_j=\phi(i \neq j)$,$\phi$ 代表空集;$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相交的事件,则

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]=\sum_{i=1}^{n} P[A_i]$$

上面三个性质中,性质 1、2 是很明显的,性质 3 的证明,则由度量的可加性得到。

1.1.3 统计概率

前述的两种随机概率显然远远概括不了客观上的复杂的随机现象。对这两种随机概率概括不了的随机事件概率的计算问题,在实际上往往采用试验统计的方法,或者说,用事件的频率近似地去表达事件的概率。为此下面我们将研究事件的频率及其性质。

设 E 是一试验,S 是其样本空间,$A(\subset S)$ 是试验 E 中的一事件。若在同样的条件下,将 E 独立地重复做 n 次。事件 A 出现了 n_A 次,则称 n_A 是这 n 次试验中事件 A 出现的频数,比值

$$f_A^{(n)}=\frac{n_A}{n}$$

称为 n 次试验中事件 A 出现的频率或简称为事件 A 的频率。

显然,事件的频率是具有随机性的。同时还表明,事件的频率是具有稳定性的,即在试验的次数 n 增大时,其中大量的频率聚集在一个常数的周围。这个常数是客观存在的,它反映了事件 A 出现可能性的大小。很自然地,我们认为大量事件频率聚集的那个常数就是事件的概

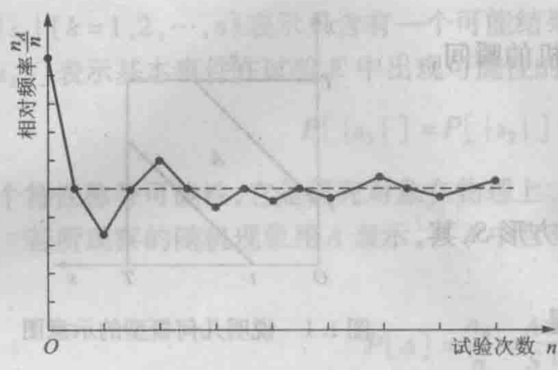

图 1.2 事件的相对频率与试验次数的关系

率。由此可见,事件的频率在一定程度上反映了事件概率的特征,事件频率的性质在客观上反映了事件概率的性质。

对于任意的事件 A,事件的频率具有下列的性质。

1. 对于任意事件 A 均有

$$0 \leqslant f_A^{(n)} \leqslant 1$$

2. $f_s^{(n)} = 1$

3. 若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是试验 E 中两两互不相交的事件,且 $\sum_{i=1}^{n} A_i$ 仍是一事件,则有

$$f_{\sum_{i=1}^{n} A_i}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} f_{A_i}^{(n)}$$

由事件的频率可以看出,事件的概率 $P[A]$ 也应具有这三个性质。

从以上三类随机问题可以看出,不同类型的随机问题中事件的概率计算方法是不同的,且无法统一其计算方法成一个模式。但由这些不同的计算公式所推导出的事件概率的基本性质是相同的。归纳起来就是:事件是样本空间 S 的子集,S 是必然事件,事件的概率 $P[A]$ 是事件 A 的函数,亦即是一集合函数,且此集合函数还需满足:

1. $$0 \leqslant P[A] \leqslant 1$$
2. $$P[S] = 1, P[\phi] = 0$$
3. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相交的事件,则有

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k]$$

由此可以看到,无论对古典概率、几何概率或统计概率它们都具有以上三个基本性质。这些从客观事实总结出来的共同属性可以给概率赋予一个数学定义,它既可包括前面三种特殊情况,又具有更广泛的一般性。

✓ 定义:规定一个试验,所有样本点之集合构成样本空间 S,在样本空间中一个样本点或若干个样本点之适当集合 $\mathscr{F}$ 称为事件域,$\mathscr{F}$ 中的每一集合称为事件。若 $A \in \mathscr{F}$,则 $P[A]$ 就是事件 A 的概率,并称这三个实体的结合 $(S, \mathscr{F}, P)$ 为一个概率空间。

下面举例说明如何建立概率空间。

[例 1.2] 掷骰子,所有样本点构成的样本空间是

$$S = \begin{Bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{Bmatrix}$$

每一个样本点为一个事件,给每一个事件赋予一个概率值,即 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$,那么 p_i 应是多少呢?根据概率的三个基本性质 $p_i > 0$, $P[S] = 1$,又因各事件互不相交,即 $s_i \cap s_j = \varnothing$, $i \neq j$,故

$$P[s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup \cdots] = \sum_{i=1}^{6} P[s_i] = 1$$

也就是全空间 S 的概率 $P[S]=1$,但是,具体的 $p_1,p_2,\cdots,p_6$ 应等于多少并不知道,我们假设这是一颗均匀的六面体的骰子,每一面出现的可能性都是一样的,所以,每一面出现的概率为

$$p_1=p_2=\cdots=\frac{1}{6}$$

如果令 $p_1=\frac{1}{3},p_2=\frac{1}{4},\cdots$,就不能得到合理的结果,那么怎样去检验这个假设呢? 我们可以把骰子抛掷上万次,再统计出每一面分别出现多少次来求得。

总之,概率的分配完全由数学模型的式子给出(也和集的性质有关)。如果 S 是有限的,我们可以给样本点标上一个数目。如果 S 是可数无限的,我们通常用某种算法来确定第 n 个样本点的概率。如果 S 是(数值上)不可数无限的样本空间,我们可以用一加权函数来分配概率。由此我们应注意到,概率的正规定义涉及到一个样本空间的详细说明。以后,当我们提到给定一个概率空间 $(S,\mathscr{F},P)$,即表明一个样本空间 S,一个适当的事件集合 $\mathscr{F}$,和相应的概率赋值 P 都已给定。

§1.2 条件概率空间

1.2.1 条件概率的定义

在实际问题中,一般除了要考虑事件 A 的概率 $P[A]$,还需考虑在"事件 B 已发生"这一条件下,事件 A 发生的概率。一般地说,后者的概率与前者的概率未必相同。为了区别起见,我们把后者叫做条件概率,记为 $P[A|B]$;读作在条件 B 下,事件 A 的概率。下面我们用相对频率的概念引导出条件概率的公式。

试验次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 发生	√	√	×	×	√	×	√	×	×	√
B 发生	×	×	√	×	×	√	√	√	×	√
$A\cap B$ 发生	×	×	×	×	×	×	√	×	×	√

其相对频率是

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_B}=\frac{\frac{n_{A\cap B}}{n}}{\frac{n_B}{n}}\approx\frac{P[A\cap B]}{P[B]}$$

即 $$P[A|B]=\frac{P[A\cap B]}{P[B]}\qquad P[B]>0\qquad(1.2.1)$$

或 $$P[A\cap B]=P[A|B]P[B]=P[B|A]P[A]$$

从图 1.3 中看到,$P[A|B]$ 表示在样本空间 S_B 中发生 A 事件的概率。

推论:若 $A\cap B=\phi$,则 $P[A|B]=0$。这样,我们对条

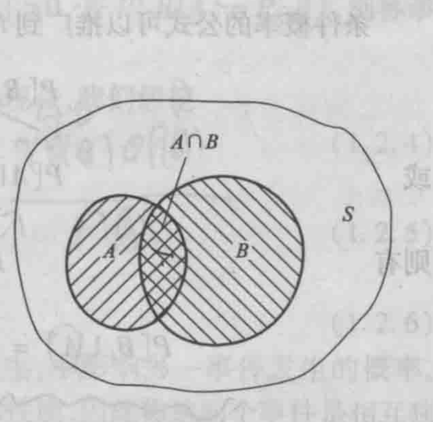

图 1.3 相交事件的样本空间示意图

$P[A|B] = \frac{P(AB)}{P(B)}$

件概率 $P[A|B]$ 作如下定义：

设 $(S,\mathscr{F},P)$ 是一个已知的概率空间，对于 $B\in\mathscr{F}$ 且 $P[B]>0$，令

$$P[A|B]=\frac{P[A\cap B]}{P[B]}\quad (A\in\mathscr{F})$$

则 $P[\,\cdot\,|B]$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的概率。记 $P_B[A]=P[A|B]$，称 $(S,\mathscr{F},P_B)$ 为给定事件 B 的条件概率空间，简称为条件概率空间。

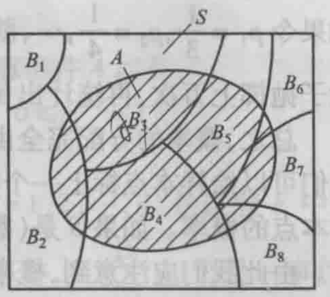

图 1.4　样本空间 S 有限划分的示意图

1.2.2　全概率公式

在样本空间 S 上定义的任何一个事件 A 的概率 $P[A]$，可以用条件概率的公式来表示。

假定我们给出 N 个互斥事件 $B_n\,(n=1,2,\cdots,N)$，它的并等于整个 S，这个事件满足

$$B_i\cap B_j=\phi\quad i\neq j=1,2,\cdots,N$$

$$\bigcup_{j=1}^{N}B_j=S$$

则
$$P[A]=\sum_{j=1}^{N}P[A\mid B_j]P[B_j]\tag{1.2.2}$$

证：由于 $A\cap S=A$

$$A\cap S=A\cap\left(\bigcup_{j=1}^{N}B_j\right)=\bigcup_{j=1}^{N}(A\cup B_j)$$

$$P[A]=P[A\cap S]=P[\bigcup_{j=1}^{N}(A\cap B_j)]$$

$$=\sum_{j=1}^{N}P[A\cap B_j]$$

故
$$P[A]=\sum_{j=1}^{N}P[B_j]P[A\mid B_j]$$

1.2.3　贝叶斯公式

条件概率的公式可以推广到 N 个事件

$$P[B_i|A]=\frac{P[B_i\cap A]}{P[A]}\qquad P[A]\neq 0$$

或
$$P[A|B_i]=\frac{P[A\cap B_i]}{P[B_i]}\qquad P[B_i]\neq 0$$

则有
$$P[B_i|A]=\frac{P[B_i]P[A|B_i]}{P[A]}$$

$$P[B_i\mid A]=\frac{P[B_i]P[A\mid B_i]}{\sum_{i=1}^{N}P[B_i]P[A\mid B_i]}\quad i=1,2,\cdots,N\tag{1.2.3}$$

下面举一个有关贝叶斯公式和条件概率的例子。

P(A)　P(Bn) → 先验概率　P(A|Bn) → 转移概率　P(Bn|A) → 后验概率

［例 1.3］ 设有一个二进制的数字通信系统，主要由 1 和 0 两种符号组成，如图 1.5 所示，且 $P(B_1)=0.6$，$P(B_2)=0.4$，求条件概率。

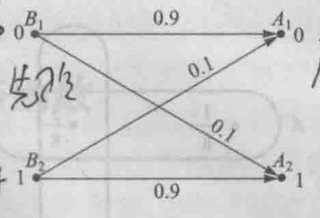

图 1.5 二进制数字通信示意图

解：$P[B_1]=0.6$ $P[A_1|B_1]=0.9$ $P[A_1|B_2]=0.1$

$P[B_2]=0.4$ $P[A_2|B_1]=0.1$ $P[A_2|B_2]=0.9$

其中 $P[A_1|B_1]+P[A_2|B_1]=1$，它们彼此是互斥事件。

因为

$$P[A_1]=P[A_1|B_1]P[B_1]+P[A_1|B_2]P[B_2]$$
$$=0.9\times0.6+0.1\times0.4=0.58$$
$$P[A_2]=P[A_2|B_1]P[B_1]+P[A_2|B_2]P[B_2]$$
$$=0.1\times0.6+0.9\times0.4=0.42$$

故可求出条件概率为

$$P[B_1|A_1]=\frac{P[A_1|B_1]P[B_1]}{P[A_1]}=\frac{0.9\times0.6}{0.58}=0.931$$

$$P[B_2|A_2]=\frac{P[A_2|B_2]P[B_2]}{P[A_2]}=\frac{0.9\times0.4}{0.42}=0.857$$

$$P[B_1|A_2]=\frac{P[A_2|B_1]P[B_1]}{P[A_2]}=\frac{0.1\times0.6}{0.42}=0.143$$

$$P[B_2|A_1]=\frac{P[A_1|B_2]P[B_2]}{P[A_1]}=\frac{0.1\times0.4}{0.58}=0.069$$

以上四种条件概率中，$P[B_1|A_1]$、$P[B_2|A_2]$是传输符号的正确概率，而 $P[B_1|A_2]$、$P[B_2|A_1]$是系统传输符号的错误概率。条件概率在通信中称之为传输概率。有时又把 $P[B_n|A]$ 称之为后验概率。这是因为在某个事件 A 已被得到的情况下，应用试验的方法去确定是哪一个因素产生此事件，因此称之为后验概率。与此对应的 $P[B_1]$、$P[B_2]$ 称之为先验概率。当然，类似于上述情况，我们还可以推广到多个事件的情况，在此不再多述。读者可以进一步参考有关书籍，在信号检测与估值等有关课程中，也将会进一步阐明类似的问题。

1.2.4 独立事件、统计独立

设$(S,\mathscr{F},P)$为一概率空间，事件 $A\in\mathscr{F}$、$B\in\mathscr{F}$ 且 $P[A]>0$，若 $P[B|A]=P[B]$，则称事件 B 随机独立于事件 A（或简称 B 独立于 A）。

根据式(1.2.1)，$P[B|A]$和 $P[A|B]$都能明确地定义。现在，我们假设

$$P[B|A]=P[B] \tag{1.2.4}$$

将式(1.2.4)代入式(1.2.1)得

$$P[A\cap B]=P[A]P[B] \tag{1.2.5}$$

将式(1.2.5)代入式(1.2.1)得

$$P[A|B]=P[A] \tag{1.2.6}$$

由此可知，如果式(1.2.4)成立，则事件 A 或事件 B 是否发生，不影响另一事件发生的概率。这样从概率的意义上看，这两个事件的独立性具有相互对称性质，因此称这两个事件是相互独立的。以上讨论表明，如果乘积公式(1.2.5)成立，则条件概率关系式(1.2.4)和式(1.2.6)两