金融数学专业系列规划教材

金融优化基础

张清邦 / 编

版社

金融优化基础

张清邦 / 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书讲授处理非线性最优化问题时必需的基础知识。全书共5章，内容包括最优化问题及风险管理和金融工程中的一些金融优化模型；有限维空间中范数与集合；多元函数分析基础知识；凸分析的基础知识；非线性无约束优化的最优性条件及局部解的迭代算法；CVaR与极小化CVaR；非线性约束优化的最优性条件及其在利润机会鲁棒模型中的应用；对偶理论及其在金融问题中的应用；一般非线性优化的罚函数法；极小极大定理及其在最坏Sharpe率情形的最大值问题等。

本书可作为金融数学、金融工程等财经类专业和计算数学、应用数学等专业高年级本科生或财经院校硕士研究生的教学用书和辅导用书，也可供科研工作者参考。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

金融优化基础/张清邦编. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-46392-4

Ⅰ. ①金… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①金融风险—风险管理—研究 Ⅳ. ①F830.9

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第021751号

责任编辑：陈 明
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170mm×230mm **印 张**：8 **字 数**：147千字
版 次：2017年2月第1版 **印 次**：2017年2月第1次印刷
印 数：1～2000
定 价：20.00元

产品编号：072977-01

前言

尽管近年来有关非线性优化的教材很多，但它们几乎都是针对有良好的拓扑学和实分析等数学基础的理科学生而编写的，或者是由于学时和基础知识的限制而弱化内容完整性的工科教材。自 1952 年 Markowitz 提出均值方差投资组合理论后，数学中的优化理论与方法在金融问题的定量研究中的重要作用越来越显著。应用最优化理论与方法研究金融学科中的相关问题，就是广义下的金融优化。它不仅涵盖投资组合选择的全部内容，而且包括资产定价和风险管理中的相关优化问题。一般来说，在金融优化模型中，尽管涉及随机变量的期望、方差等，但它们都可以转化为线性或非线性优化问题。因此需对一般的线性或非线性优化问题解的存在性和迭代算法的基本理论有清楚的理解和把握。

本教材想写成一本供金融数学、金融工程等财经类专业高年级本科生或财经院校硕士研究生使用的教材。因此本书以处理非线性最优化问题时所必要的基础知识为立足点，结合自己的教学体会，以理论、方法与实例相结合进行编写。体现了以下特色：首先，在内容的选取方面，尽可能避免过分复杂的理论分析，但又不弱化定理证明或理论分析中的数学思维训练，以适应金融数学、金融工程等财经类专业的需要。其次，理论分析时由一般理论到特殊情形，处理问题的方法层层递进，理论、方法与实例相结合，形成自己的特色。另外，在本书中选取一些实例，以使读者加深对理论的理解，同时也了解相关内容在某些金融问题中的应用；在算法实例中，给出了 MATLAB 软件的使用与实现。

本书共分 5 章。第 1 章主要介绍最优化问题及风险管理和金融工程中的一些金融优化模型；第 2 章主要介绍有限维空间中范数与集合，及多元函数的连续性和可微性等多元函数分析基础知识；第 3 章主要介绍凸分析的基础知识，包括凸集、凸函数、共轭函数、锥与极锥、次梯度等；第 4 章介绍非线性无约束优化的最优性条件及局部解的迭代算法，其中包括线性搜索法、最速下降法、牛顿法与修正牛顿法、拟牛顿法及共轭梯度法；并利用相关理论对 CVaR 与极小化 CVaR 进行介绍；第 5 章介绍非线性约束优化的最优性条件及其在利润机会鲁棒模型中的应用、对偶理论及其在金融问题中的应用、一般非线性优化的罚函数法、极小极大定理与最坏 Sharpe 率的最大值问题。由于第 1 章仅作为引言，我们不追

求其全面性，旨在让读者了解最优化问题及一些金融优化模型。第 2 章和第 3 章着重介绍多元函数分析和凸分析的基础知识，力求简明。第 4 章和第 5 章主要介绍光滑非线性优化问题的最优性条件和局部解的迭代算法，层层递进，理论和实例相结合，力求主线清晰、易学易懂；在应用 MATLAB 实现算法时，重在算法思想及软件的使用，弱化了 MATLAB 编程。第 2～5 章均配有金融领域中相关的应用问题及一定的习题，以加深对该章内容的理解。

本书可作为金融数学、金融工程等财经类专业和计算数学、应用数学等专业高年级本科生或财经院校硕士研究生的教学用书和辅导用书，也可供有关科研人员和工程技术人员学习和参考。本教材得到了四川省研究生教育改革创新项目（数理金融研究生培养体系探索与实践）及西南财经大学金融数学专项基金、校级规划教材项目等项目的部分支持，在此表示感谢；同时，感谢陈明博士及清华大学出版社的大力支持和辛勤劳动。

由于学识水平所限，书中难免存在一些错误或不足，诚恳希望专家、同行及读者批评指正。

编　者

2016 年 11 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

第 1 章

最优化及金融学中的基本模型

最优化问题的产生可以追溯到开始有人类活动的远古时代。随着人类对自然界认识的不断深入，寻找最优逐渐从下意识的、缺乏系统性的行为发展到目的明确的有意识活动，并在数学工具日渐完善的基础上，对各种寻找最优的活动进行数学描述和分析，指导寻优活动更有效地进行，逐步形成了最优化理论与方法这一应用数学理论分支。特别是 20 世纪 40 年代由于军事上的需求、现代工业的迅速发展及电子计算机技术的出现，极大地推动了最优化理论与方法的发展。

一般地，在有限维空间 $\mathbb{R}^n$ 中，最优化问题是指求解一个多元函数在给定集合上的极值，可以用如下数学模型来描述：

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.t.}\ \ x \in S, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是给定的。通常，称集合 S 为可行域或可行集，称函数 f 为目标函数，称 x 为决策变量，s. t. 是 subject to(受限于)的缩写。当 $S=\mathbb{R}^n$ 时，问题(1.1)为无约束优化问题。

在应用中，通常考虑如下具体的数学模型：

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.t.}\ \ g_j(x) = 0,\ j \in \{1,2,\cdots,l\}, \\ &\qquad h_i(x) \leqslant 0,\ i \in \{1,2,\cdots,m\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $f, h_i, g_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是给定的函数。

记 $E=\{x \mid g_j(x)=0, j=1,2,\cdots,l\}$，$I=\{x \mid h_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m\}$，则在问题(1.2)中 $S=E\cup I$，并称函数 $h_i(i=1,2,\cdots,m)$，$g_j(j=1,2,\cdots,l)$ 为约束函数。若 $E\neq\varnothing$ 且 $I=\varnothing$，称为等式约束优化问题；若 $I\neq\varnothing$ 且 $E=\varnothing$，称为不等式约束优化问题。在问题(1.2)中，如果目标函数是二次函数且约束函数是线性函数，则称为二次规划。当目标函数和约束函数都是线性函数时，称为线性优化。否则，称为非线性优化。

如果在最优化问题中，每个变量的取值都是确定可知的，则该问题为确定性最优化问题。如果某个或某些变量的取值是不确定的，但服从一定的统计规律，则属于随机性最优化问题。

如果最优化问题的数学描述和解是与时间有关的，称为动态最优化问题，或一般地称为最优控制问题；如果与时间无关，则称为静态最优化问题，或简称为最优化问题。这两类最优化问题的解法尽管不同，但相互之间存在联系。在一定条件下可以将动态最优化问题转换为静态最优化问题进行求解。

为了使模型达到最优的目标所提出的各种求解方法称为最优化方法。常用方法有以下几种：

(1) 间接法(解析法)　针对模型具有简单明确的数学解析表达式的最优化问题，根据函数(泛函)极值的必要条件和充分条件求出其最优解析解的求解方法。

(2) 直接法(数值解法)　针对无法用简单明确的数学解析表达式表达其模型的最优化问题，通过在经过一系列迭代过程产生的点列中直接搜索，使其逐步逼近最优点。

(3) 以解析法为基础的数值解法　以梯度法为基础，将解析法与数值计算相结合的最优化求解方法。

(4) 网络最优化方法　以网络图作为数学模型，用图论方法进行搜索的最优化求解方法。

(5) 现代优化算法　运用现代智能计算方法，如遗传算法、模拟退火算法、蚁群算法等，进行直接搜索的最优化求解方法，主要解决大规模复杂优化问题中的 NP-hard 问题。

从某种意义上讲，金融决策与管理是金融研究的出发点和落脚点。任何金融决策都要面对众多不确定性，而这些不确定性将对交易的风险和收益产生重要影响，因此通过精确地度量风险和收益，研究在各种不确定性市场环境中资源的有效配置就成为了金融决策的核心问题。在金融决策的核心问题中，不确定性市场资源的有效配置过程就是一个金融优化的过程。对参与金融活动的投资者来说，其金融决策与管理的主要内容就是投资组合选择。对复杂的投资组合管理问题进行建模，一般都会导致一个大规模的优化问题。这些优化问题的模型建立及求解，都离不开数学。特别是，20 世纪 90 年代全球性金融危机的爆发，让人们深刻地体会到：没有定量的思想方法，是很难驾驭“金融”这匹野马，而定量的方法自然地依赖于数学。

自 1952 年 Markowitz 提出均值方差投资组合理论后，数学中的优化理论与方法在金融问题的定量研究中发挥了越来越重要的作用。由于优化理论与方法

已经在现代金融理论研究中得到广泛应用，所以出现了金融优化这一名词。金融优化的含义有广义和狭义之分。从广义上讲，金融优化是指应用最优化理论与方法研究金融科学中的相关问题。它不仅涵盖投资组合选择的全部内容，而且包括资产定价和风险管理中的相关优化问题。从狭义上讲，金融优化是指投资组合选择。在该名词出现以前，人们也时常把投资组合选择称为投资组合优化。鉴于数学工具在现代金融理论研究和实践中的广泛应用，因此从广义上定义金融优化显得更为合理。

一般来讲，金融优化是指寻求满足金融模型及其边界条件约束的独立变量，使某金融目标达到最优值。其数学描述包括：系统模型（金融问题的数学刻画）、系统边界（变量取值范围）、目标函数（衡量是否达到最优的判据）、决策变量（其变化影响优化目标取值的自变量）。相应地，求解金融优化问题的一般步骤如下：①提出需进行最优化的问题，收集相关资料和数据；②建立求解最优化问题的相关数学模型，确定变量，列出目标函数和相关约束条件；③分析模型，选择合适的求解方法，求解问题，一般通过编制程序利用计算机求出最优解；④最优解的验证和实证。

下面我们简单介绍一些金融优化模型。

金融优化模型可分为风险管理模型和金融工程模型两大类。概括地讲，风险管理模型通常是指具有对不同风险的特定暴露的投资组合选择问题；而金融工程模型通常是指为了实现具体的投资行为（如利用套利机会等）构造新的金融产品时所提出的优化模型。

1. 投资组合选择

在 20 世纪 50 年代，Markowitz 用风险资产回报的期望与方差来度量收益与风险，建立了投资组合最优选择理论，定量分析了投资组合中的有效分散化原理，并因此而获得了 1990 年诺贝尔经济学奖。

假设一个投资者将一笔资金投资到具有随机回报的 n 种（$n\geqslant 2$）风险资产（股票、债券等），且对于每种资产 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 的期望回报 μ_i 和方差 σ_i^2，及任意两种资产 i 和 j 的相关系数 ρ_{ij} 都是给定的。若把投资到资产 i 的总资产份额记作 x_i，则相应投资组合 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的期望回报和方差分别为

$$E(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_i,\quad R(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}\sigma_{ij}x_ix_j,$$

其中 $\rho_{ii}=1,\sigma_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j,\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$。

Markowitz 的投资组合选择问题，也称均值方差优化（mean-variance optimization，MVO）问题，可用三种不同但等价的形式给出：

$$\begin{aligned}&\max_{x}\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma x}\leqslant\sigma^2,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{Cx}\geqslant\boldsymbol{d},\end{aligned}\tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}&\min_{x}\ \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma x}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}\geqslant R,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{Cx}\geqslant\boldsymbol{d},\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&\max_{x}\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\frac{\delta}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma x}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\\&\qquad \boldsymbol{Cx}\geqslant\boldsymbol{d},\end{aligned}\tag{1.5}$$

其中 δ 是风险厌恶常数，σ^2 是投资组合方差的上限，R 是预期收益下限，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{p\times n}$，$\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^p$。集合 $\aleph=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{Cx}\geqslant\boldsymbol{d}\}$ 表示实际金融市场所遇到的各种摩擦(如各种形式的交易费等)。当 $\aleph=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}x_i=1,\boldsymbol{x}\geqslant 0\right\}$ 时，问题(1.3)为标准的 Markowitz 模型，是一个二次规划问题。当 σ^2 取不同的值时，就可得到不同的投资组合 $\bar{x}$ 和预期收益 $\bar{R}$，所有点 $(\bar{R},\sigma^2)$ 形成的曲线则为该投资组合的有效前沿。Merton 在 1972 年给出了标准 Markowitz 模型的有效前沿的解析式。

2. 最大化 Sharpe 率模型

诺贝尔经济学奖得主 William Sharpe 在 1994 年以资本资产定价模型(CAPM)为出发点，提出了 Sharpe 率 $\mathrm{SR}=\dfrac{\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}-\mu_{rf}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma w}}}$，用来衡量金融资产绩效表现，其中 μ_{rf} 表示某一投资期间的无风险资产回报，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 为风险资产投资比率；$\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 分别是 n 种风险资产期末回报的均值和协方差，且 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称正定矩阵。与 Markowitz 提出的均值-方差投资组合模型存在着重要联系的是 Sharpe 率最大化问题：

当 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 给定时，求解

$$\max_{w}\frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}-\mu_{rf}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma w}}}。\tag{1.6}$$

由于 Sharpe 率与输入数据 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是密切相关的，因此无论在理论上还是在实践中都非常有必要研究输入数据 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 对 Sharpe 率的影响。为了讨论 Sharpe 率最大化问题的鲁棒性，人们提出了最坏 Sharpe 率的最大值问题：

$$\max_{w}\inf_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\in\Lambda}\frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}-\mu_{rf}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma w}}}。\tag{1.7}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

3. 风险管理模型

风险在许多经济活动中是客观存在的，特别在金融活动中表现更为突出。这是因为在金融活动中，现在所做出的决策必定因为未来情况的不确定性而产生许多可能的结果。公司会因为不能完全规避风险而不得不对其风险进行管理；在风险识别的基础上，采用数学方法给出充分反映公司意愿的数量化的风险测度对其风险进行度量。金融风险管理中的优化问题通常是指最优化受限于操作约束和金融资产风险约束的绩效指标（如期望投资回报等）。其数学模型如下：

$$\begin{aligned}&\max_{x} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}\\&\text{s.t. } \mathrm{RM}[\boldsymbol{x}] \leqslant \gamma,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{Cx} \geqslant \boldsymbol{d},\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中 $\mathrm{RM}[\boldsymbol{x}]$表示投资组合 x 的某种风险测度，γ 是该测度的给定上限。一般来说，$\mathrm{RM}[\boldsymbol{x}]$是 $\boldsymbol{x}$ 的非线性函数，故问题(1.8)是一个非线性规划问题。当然也可以使风险测度函数最小化，同时使投资组合的期望回报达到或不超过给定的目标值 R，于是有下列模型：

$$\begin{aligned}&\min_{x} \mathrm{RM}[\boldsymbol{x}]\\&\text{s.t. } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} \geqslant R,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{Cx} \geqslant \boldsymbol{d}。\end{aligned} \tag{1.9}$$

4. 资产/负债管理

一个金融机构对其资产进行配置所得到的模型，称为资产配置模型。它的目标是在资产类中确定最优投资，与投资组合选择问题(1.4)具有同样的数学结构。在某个阶段，资产/负债现金流配置中的短期融资和专项投资组合都可以表示为一个线性规划问题。如果金融机构进行多阶段资产/负债管理，则它需要在有限(或无限)时间内满足每个阶段的负债要求，从而得到一个多阶段优化模型。

设公司在阶段 $t\in\{1,2,\cdots,T\}$的负债 L_t 是已知分布的随机变量。在资产/负债管理中，一个典型的问题是确定公司在每个阶段应当持有多少(或哪些)资产去最大化它在阶段 T 末的期望财富。假设公司可选择的资产类的随机回报的分布是已知的，用 R_{it} 表示资产 i 在阶段 t 的回报。因为公司可以在观测上一阶段的资产回报和负债情况后确定下一阶段的决策，因此可得到在满足账面平衡的条件下，最大化最后一个阶段末的期望总财富的模型如下：

$$\begin{aligned}&\max_{x} E\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{i,T}\Big)\\&\text{s.t. } \sum_{i=1}^{n}(1+R_{it})x_{i,t-1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = L_t,\ t = 1,2,\cdots,T,\text{(资产积累)}\\&\quad\ x_{i,t} \geqslant 0,\ \forall\, i,t,\end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $x_{i,0}$ 是公司分配于资产 i 的初始资产量。

5. 合成期权模型

由于投资组合选择问题中某个关键限制可能使得该组合的价值下降，所以公司投资者需要控制下降趋势带来的损失风险。为了控制风险，大型机构或投资者可以利用可获得的资源人为地提出想要的收益结构，称为合成期权。

设投资者的初始财富为 W_0，规划周期为 T，每一阶段的无风险资产收益为 R，在时刻 t 资产 i 的收益 R_{it} 是已知分布的随机变量，θ_{it} 是时刻 t 资产 i 的交易成本。令 x_{it} 是时刻 t 分配到资产 i 的数量，A_{it} 是时刻 t 买入资产 i 的数量，D_{it} 是时刻 t 卖出资产 i 的数量，α_t 是时刻 t 分配到无风险资产 i 的数量，则规划周期末的投资组合价值为 $v = R\alpha_{t-1} + \sum\limits_{i=1}^{n}(1+\theta_{it})R_{iT}x_{i,T-1}$。我们将该价值分成投资组合的无风险价值 Z 和依赖于随机事件的盈余 $z(z\geqslant 0)$，则可得到如下具有动态约束的优化模型：

$$
\begin{aligned}
&\max_{x} E(z)+\mu Z \\
&\text{s. t. } R\alpha_{t-1}+\sum_{i=1}^{n}(1+\theta_{it})R_{iT}x_{i,T-1}=Z+z, \\
&\qquad \alpha_0+\sum_{i=1}^{n}x_{i0}=W_0, \\
&\qquad x_{it}=R_{it}x_{i,t-1}+A_{it}D_{it},\ t=1,2,\cdots,T, \\
&\qquad \alpha_t=R\alpha_{t-1}-\sum_{i=1}^{n}(1+\theta_{it})A_{it}+\sum_{i=1}^{n}(1-\theta_{it})D_{it},\ t=1,2,\cdots,T, \\
&\qquad \alpha_t,x_{it},\theta_{it},A_{it},D_{it},z\geqslant 0,\ \forall i,t,
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

其中 $\mu\geqslant 1$ 是投资者的风险厌恶系数。

上述金融优化模型中，尽管都涉及随机变量的期望、方差等，但它们都可以转化为线性或非线性优化问题。因此需对一般的线性或非线性优化问题解的存在性和迭代算法的基本理论有清楚的理解和把握。

习题 1

1. 假设某证券当前时刻 0 的价格为 S_0，时刻 1 的随机价格为 S_1，且在到期时刻 1 对应于该证券有 n 种衍生债券，它们有一个分段线性的支付函数 $\Psi_i(S_1)$，其分段点为 $K_i(i=0,1,\cdots,n)$（不妨设 $K_i>K_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$）；$S_0^i$ 表

示第 i 种衍生债券的当前价格。考虑投资于这 n 种衍生债券的投资组合 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则该投资组合的支付函数为 $\Psi^x(S_1)=\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(S_1)x_i$，在时刻 0 的成本为 $\sum_{i=1}^{n}S_0^i x_i$。试建立优化模型以确定在当前价格 S_0^i 是否存在静态的套利机会,即建立模型考虑:对所有 $S_1\in[0,+\infty)$,其支付函数 $\Psi^x(S_1)$非负(即未来无损失)的 n 种衍生债券最便宜的投资组合 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是什么?

2. 试分析 MVO 模型中三种不同形式的等价性。

3. 试给出几种不同风险度量下的风险管理模型。

4. 假设三个投资项目的收益函数分别为

$$f_1(x)=\frac{10x}{1+x},\quad x=0,1,\cdots;$$

$$f_2(x)=\sqrt{x},\quad x=0,1,\cdots;$$

$$f_3(x)=10(1-e^{-x}),\quad x=0,1,\cdots。$$

试求:

$$\max_{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)}\sum_{i=1}^{3}f_i(x_i)$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{3}x_i=5,\quad x_1,x_2,x_3\in\mathbb{N}。$$

第 2 章

多元函数分析

本章主要介绍定义在 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的函数连续性和可微性等相关定义及结论。

2.1 范数与集合

n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$是一个定义了距离的线性空间。设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$。通常，$\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的距离定义为 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$；且它满足以下性质：

(1) 非负性　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$，且 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$；

(2) 对称性　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；

(3) 三角不等式　对任意 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$，有 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\rho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$。

n 维欧氏空间中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积(inner product)定义为$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$；$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$的范数(norm) $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

以 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$为球心，$r>0$ 为半径的球记为 $B(\boldsymbol{x},r)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\mid\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|<r\}$。

注　(1) n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中向量范数的一般定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}(l_p\text{- 范数}),$$

其中 $1\leqslant p<+\infty$。特别地，l_1-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$；$l_\infty$-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$；$l_2$-范数：$\|\boldsymbol{x}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

(2) l_1-范数、l_2-范数和 l_∞-范数是等价范数。

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，由向量范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的矩阵范数 $\|\cdot\|_\mu$ 定义为

$$\|\boldsymbol{A}\|_\mu=\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|。$$

易验证，l_1-范数、l_2-范数和 l_∞-范数诱导的矩阵范数分别为

$$\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,\text{（也称列和范数）}$$

$$\|A\|_2=\max\{\sqrt{\lambda}\mid\lambda\in\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\},\text{（也称谱范数）}$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\text{（也称行和范数）}$$

其中 $\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值集合。经常使用的矩阵范数还有 Frobenius 范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}))^{\frac{1}{2}}。$$

一般地，范数具有如下性质：对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$，都有

(1) $\|a\boldsymbol{x}\pm b\boldsymbol{y}\|^2=a^2\|\boldsymbol{x}\|^2\pm2ab\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+b^2\|\boldsymbol{y}\|^2(\forall a,b\in\mathbb{R})$；

(2) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2)$；（平行四边形等式）

(3) $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2)$；（极化恒等式）

(4) $|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$，$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$。

定义 2.1　设 $S\subset\mathbb{R}^n$，若对任意 $\boldsymbol{x}\in S$，都存在 $r>0$，使得 $B(\boldsymbol{x},r)\subset S$，则称 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集；若 $\mathbb{R}^n\backslash S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid x\notin S\}$ 是开集，则称 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集。全空间 $\mathbb{R}^n$ 和空集 $\varnothing$ 既是开集又是闭集。包含 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的开集称为 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域(neighborhood)。

定义 2.2　对于给定的集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 和点 $\boldsymbol{x}\in S$，若存在 $r>0$ 使得 $B(\boldsymbol{x},r)\subset S$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的内点(interior point)。S 的所有内点构成的集合称为 S 的内部(interior)，记为 $\mathrm{int}S$。包含 S 的最小闭集称为 S 的闭包(closure)，记为 $\mathrm{cl}\,S$。属于 $\mathrm{cl}\,S$ 但不属于 $\mathrm{int}S$ 的所有点构成的集合称为 S 的边界(boundary)，记为 $\mathrm{bd}\,S$。

包含 S 的最小仿射集（即包含由其中任意两点所确定的直线的集合）称为 S 的仿射包(affine hull)，记为 $\mathrm{aff}\,S$。若存在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域 U 使得 $U\cap\mathrm{aff}\,S\subset S$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的相对内点(relatively interior point)；S 的所有相对内点构成的集合称为 S 的相对内部(relative interior)，记为 $\mathrm{ri}\,S$。

一般地，集合的相对内部有可能是空集，但当 S 是非空凸集时，$\mathrm{ri}\,S\neq\varnothing$。特别地，若 $\mathrm{aff}\,S=\mathbb{R}^n$，则 $\mathrm{ri}\,S=\mathrm{int}\,S$。

例 2.1 $\mathbb{R}^3$的子集$S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1, x_3=1\}$的内部$\operatorname{int} S=\varnothing$，而相对内部$\operatorname{ri} S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2<1, x_3=1\}$；$S'=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2=1, x_3=1\}$的内部$\operatorname{int} S'=\varnothing$且相对内部$\operatorname{ri} S'=\varnothing$。

定义 2.3 设$\{\boldsymbol{x}^k \mid k=1,2,\cdots\}$是$\mathbb{R}^n$中的无穷点列，若存在点$\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n$使得$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^k-\bar{\boldsymbol{x}}\|=0$，则称$\bar{\boldsymbol{x}}$为点列$\{\boldsymbol{x}^k\}$的极限(limit)，或称点列$\{\boldsymbol{x}^k\}$收敛于$\bar{\boldsymbol{x}}$，记为$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^k=\bar{\boldsymbol{x}}$或$\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{x}(k\to\infty)$。若存在$\{\boldsymbol{x}^k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}^{k_i}\}$收敛于$\bar{\boldsymbol{x}}$，则称$\bar{\boldsymbol{x}}$为点列$\{\boldsymbol{x}^k\}$的聚点(accumulation point)。

在$\mathbb{R}^n$中，若集合S内的任意点列$\{\boldsymbol{x}^k\}$的聚点都属于S，则S是闭集；S中的所有收敛点列的极限构成的集合是S的闭包，即

$$\operatorname{cl} S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \text{存在}\{\boldsymbol{x}_n\}\subset S, \text{使得}\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}\}。$$

例 2.2 设$\boldsymbol{x}^k=\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k}\right),\sin\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{k}\right)\right)^{\mathrm{T}}(k=1,2,\cdots)$，则$\mathbb{R}^2$中的点列$\{\boldsymbol{x}^k\}$无极限，但其子列$\{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^5,\boldsymbol{x}^9,\cdots\}$，$\{\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^6,\boldsymbol{x}^{10},\cdots\}$，$\{\boldsymbol{x}^3,\boldsymbol{x}^7,\boldsymbol{x}^{11},\cdots\}$和$\{\boldsymbol{x}^4,\boldsymbol{x}^8,\boldsymbol{x}^{12},\cdots\}$分别收敛于$(0,1)^{\mathrm{T}}$，$(1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,-1)^{\mathrm{T}}$和$(-1,0)^{\mathrm{T}}$。这4个点都是$\{\boldsymbol{x}^k\}$的聚点。

定义 2.4 设$S\subset\mathbb{R}^n$，若存在$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$和$r_0>0$使得$S\subset B(\boldsymbol{x}_0,r_0)$，则称$S$有界(bounded)；若开集族$\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$满足$S\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$，则称$\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是$S$的一个开覆盖(open covering)；若$S$的任一开覆盖都存在有限子覆盖，即对$S$的任一开覆盖$\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$，总存在$\Lambda$的一个有限子集$\tilde{\Lambda}$，使得$S\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\tilde{\Lambda}}G_\lambda$，则称$S$是紧集(compact set)。

若$S\subset\mathbb{R}^n$是紧集，则S中的任意无穷点列必有聚点，并且每个聚点都属于集合S。在$\mathbb{R}^n$中，S是紧集等价于S是有界闭集；非空闭集A是紧集的充要条件是A中每个具有有限交性质(任意有限个子集族的交集都是非空的)的闭子集族有非空的交。

2.2 函数的连续性

定义 2.5 设函数$T:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$在$\boldsymbol{x}_0\in X$的某邻域内有定义。若对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对任意$\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0,\eta)\cap X$有$|T(\boldsymbol{x})-T(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，则称$T$在点$\boldsymbol{x}_0$连续。若$T$在$X$中每一点连续，则称$T$在$X$上连续或$T$是$X$上的连续函数。

定理 2.1 函数$T:X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$在点$\boldsymbol{x}_0$连续的充分必要条件是对$X$中任意

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com