普通高等教育“十三五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU "13·5" GUIHUA JIAOCAI

矿物加工数学模型

吴翠平　编著

冶金工业出版社
www.cnmip.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

矿物加工数学模型

吴翠平　编著

北　京
冶 金 工 业 出 版 社
2017

内 容 提 要

矿物加工数学模型是矿物加工工程各种问题的定量化模型。本书系统叙述了矿物加工数学模型的建立方法与技术，介绍了重选、浮选、粉碎、筛分与分级等专门数学模型，以及矿物加工流程计算软件的国内外最新实例与技术，矿物加工计算流体力学模型的建立求解技术及模拟实例。本书内容照顾了煤炭分选加工数学模型的特点。本书附有教学用上机实验手册，并介绍了矿物加工数学建模的 MATLAB 函数。

本书内容丰富，理论和应用并重，实用性强，吸收了国内外矿物加工数学模型建立与计算机应用的最新成果，反映了矿物加工数学模型技术的最新进展。本书内容深入浅出，详略得当，突出了数学建模的基础方法、计算机技术、最新成果。

本书可作为高等学校矿物加工工程专业的教学用书、矿物加工工程相关科研人员和技术人员的参考用书，也可作为矿物加工厂管理及技术人员计算机应用的培训用书。

图书在版编目(CIP)数据

矿物加工数学模型/吴翠平编著. —北京：冶金工业出版社，2017.2

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5024-7400-3

Ⅰ.①矿… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①选矿—数学模型 Ⅳ.①TD9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 253254 号

出 版 人 谭学余
地　　址 北京市东城区嵩祝院北巷 39 号 邮编 100009 电话 (010)64027926
网　　址 www.cnmip.com.cn 电子信箱 yjcbs@cnmip.com.cn
责任编辑 李鑫雨 美术编辑 彭子赫 版式设计 彭子赫
责任校对 李 娜 责任印制 牛晓波
ISBN 978-7-5024-7400-3
冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2017 年 2 月第 1 版，2017 年 2 月第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16；19.5 印张；473 千字；302 页
45.00 元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 tougao@cnmip.com.cn
冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893
冶金书店 地址 北京市东四西大街 46 号(100010) 电话 (010)65289081(兼传真)
冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgycbs.tmall.com

（本书如有印装质量问题，本社营销中心负责退换）

前　言

矿物加工数学模型一直作为矿物加工学（按工业界的沿袭，曾称为选矿学）的重要内容，是矿物加工工程中相关的设备、工艺以及工厂设计与生产运营中涉及的各种科学问题、技术问题和管理问题的定量化途径。马克思说："一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步"。矿物加工工程，如包括工程技术科学在内的一切应用科学一样，离开了数学和数学模型方法是不可能发展的。

矿物加工数学模型是矿物加工技术与数学相结合的产物，其发展除了伴随着矿物加工技术和矿物加工工业本身的发展外，还与应用数学、计算数学、计算机技术、矿物加工有关物理量的测试技术等的发展密不可分。20 世纪 80～90 年代，中国出现过对选矿和选煤数学模型研究的热潮，不论是设备模型还是流程计算以及过程控制和生产的技术与经济管理方面，都涌现大量研究和文献，并有许多相关教材出版，但其后的近 20 年内，虽然有关研究一直在继续，但文献发表和图书出版的很少。近 10 年内，随着测试技术、计算机技术和计算流体力学技术的发展，为矿物加工数学模型带来了新的研发手段和措施，也积累沉淀了不少研究结果、成果和文献，这些新进展有待及时归纳总结。另外，矿物加工数学模型（尤其照顾煤炭加工数学建模特色）的教材已逾 25 年没有新编，急需跟进与更新；从事矿物加工的相关工程技术人员也希望见到这方面的新书，以便及时了解矿物加工数学建模的新发展。

本书编写的思路为：概念→相关数学知识与基础建模方法→模型→应用，即循着概念解析与发展概述、数学建模基础知识、基础建模方法、专门数学模型、流程计算软件、计算流体力学模型等主题构成的线性结构主线进行编写，综合了数学建模、计算数学、计算机程序设计、矿物加工设备模型、矿物加工流程计算以及计算流体力学模型等方面的有关知识、理论和技术，介绍了国外重选分配曲线模型，结合国内与国外流程计算的典型软件介绍了流程计算技术，总结了作为矿物加工近年新应用的计算流体力学建模的理论和技术及矿物加工计算流体力学的典型应用，吸收总结了近年来矿物加工数学模型建立与应用

的有关最新成果。本书编写照顾了煤炭分选加工数学建模与应用的行业特色。

全书共分10章。第1章细致解析数学模型的含义、分类，叙述矿物加工数学模型的建立方法、应用及相关软件的发展。第2章介绍矿物加工数学模型中推导和建立所需的数学知识，包括概率与数理统计、矩阵与方程组、数值计算、最优化与搜索法、最小二乘法、拉格朗日乘数法等，是数学模型研究必需的理论基础。第3~4章介绍在矿物加工数学模型中具有重要地位的经验模型——拟合模型与插值模型的建立技术。第5~8章介绍重选、浮选、粉碎、筛分和分级等的专门模型，并照顾到煤炭分选方面的模型。第9章介绍已经应用的典型流程计算软件——国内的选煤优化软件包与国外的ModSim，其中包含流程图模拟技术和软件应用实例。第10章介绍计算流体力学模型建立的理论和技术及重介质旋流器、浮选柱、粉体表面改性机等的计算流体力学模型。

本书附有上机实验（C语言版）及上机编程知识，可作为本科生教学上机实验的手册，用于演练矿物加工数学建模的基本技术和方法；还附有MATLAB用于矿物加工数学建模的有关函数总结，可作为借助数学建模软件而展开的预测、优化、模拟等较复杂矿物加工数学建模工作的参考；最后附有相关系数R的数表，以方便使用中进行回归建模分析的有关查阅。

本书第1~6章、第9、10章由吴翠平编写，第7~8章由朱学帅编写，全书由吴翠平统稿。

在本书编写过程中，得到了中国矿业大学（北京）矿物加工工程系老师和课题组人员的大力支持，在此表示衷心感谢。本书以恩师冯绍灌先生所编《选煤数学模型》为全书结构基础，同时引用了国内外相关文献的一些内容和实例，特别是樊民强、刘峰、夏玉明以及R. P. King等人的研究资料与结论。另外，路迈西先生为本书国内流程计算实例提供了细节资料。在此，谨向各位前辈、被引文献作者、涉及出版社和企业表示诚挚谢意。

本书的顺利出版，受益于中国矿业大学（北京）教材建设项目的资助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平所限，不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

吴翠平
（wcuip@vip.sina.com）
2016年10月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

1　概述 …… 1

1.1　数学模型 …… 1

1.1.1　模型 …… 1

1.1.2　模型的分类 …… 2

1.1.3　数学模型 …… 2

1.1.4　数学模型的描述 …… 3

1.2　数学模型的分类 …… 4

1.2.1　依据认识程度的分类 …… 4

1.2.2　依据数学模型要素的分类 …… 4

1.2.3　机理模型与经验模型 …… 7

1.2.4　稳态模型与动态模型 …… 8

1.2.5　确定模型与随机模型 …… 9

1.2.6　经验模型的两种类型——拟合模型与插值模型 …… 9

1.3　数学模型的建立方法 …… 11

1.3.1　机理模型的建立方法 …… 11

1.3.2　经验模型的建立方法 …… 13

1.4　数学模型在矿物加工中的应用 …… 14

1.4.1　矿物加工流程模拟方法 …… 15

1.4.2　相关软件 …… 16

2　矿物加工数学建模相关数学知识 …… 19

2.1　概率论与数理统计 …… 19

2.1.1　概率论 …… 19

2.1.2　数理统计 …… 29

2.2　行列式、矩阵与线性方程组 …… 36

2.2.1　行列式 …… 36

2.2.2　矩阵表示方程组 …… 37

2.2.3　特殊矩阵与矩阵运算 …… 39

2.2.4　线性方程组的解法 …… 40

2.3　数值计算 …… 41

2.3.1　线性方程组的直接解法 …… 41

2.3.2　线性方程组的迭代解法 …… 46

2.3.3 非线性方程的迭代解法 …… 47
2.3.4 非线性方程组的迭代解法 …… 49
2.4 最优化与搜索法 …… 52
2.4.1 线性规划及单纯形法 …… 52
2.4.2 非线性规划 …… 63
2.5 最小二乘法 …… 71
2.5.1 最小二乘法的应用过程 …… 72
2.5.2 经变换的最小二乘 …… 73
2.5.3 最小二乘法的通用定义 …… 74
2.6 拉格朗日乘数法 …… 75

3 拟合模型 …… 77

3.1 原始数据准备 …… 77
3.2 模型形式的确定 …… 79
3.2.1 确定模型形式的方法 …… 79
3.2.2 常用的一元初等函数模型 …… 80
3.2.3 一元多项式模型次数的确定 …… 82
3.2.4 多元模型的确定 …… 83
3.2.5 矿物加工中常用曲线的拟合模型 …… 84
3.3 用回归分析做模型参数估计 …… 84
3.3.1 一元线性回归模型 …… 86
3.3.2 可线性化的一元非线性模型的参数估计 …… 89
3.3.3 一元多项式回归模型 …… 93
3.3.4 多元回归模型 …… 95
3.4 用迭代法做模型参数估计 …… 102
3.4.1 黄金分割法用于模型参数估计 …… 103
3.4.2 阻尼最小二乘法 …… 104
3.5 正交回归建模 …… 108
3.5.1 一次正交试验回归建模 …… 109
3.5.2 正交多项式回归建模 …… 115

4 插值模型 …… 118

4.1 概述 …… 118
4.1.1 插值法有关概念 …… 118
4.1.2 插值法分类 …… 118
4.2 拉格朗日插值及其应用 …… 120
4.2.1 线性插值 …… 120
4.2.2 拉格朗日线性插值 …… 120
4.2.3 拉格朗日抛物线插值与拉格朗日 n 次插值 …… 120

4.2.4　应用 …… 121
4.3　埃尔米特插值及其应用 …… 123
4.4　样条插值及其应用 …… 125
4.4.1　三次样条插值的基本概念 …… 125
4.4.2　三次样条插值公式 …… 125
4.4.3　应用 …… 127

5　重选数学模型 …… 130

5.1　可选性曲线数学模型 …… 130
5.1.1　H－R 曲线的数学模型 …… 130
5.1.2　迈尔曲线的数学模型 …… 132
5.1.3　可选性数据的细化 …… 134
5.2　分配曲线数学模型 …… 137
5.2.1　分配曲线的正态分布模型 …… 140
5.2.2　分配曲线的拟合模型 …… 145
5.2.3　分配曲线的直线化模型 …… 147
5.2.4　分配曲线的插值模型 …… 148
5.2.5　通用分配曲线 …… 148
5.3　实际可选性曲线的数学模型 …… 153
5.4　重选的预测方法 …… 159
5.4.1　给定分选密度的预测 …… 159
5.4.2　给定精煤灰分的预测 …… 160
5.5　重选过程的优化 …… 163
5.5.1　等基元灰分法 …… 164
5.5.2　非线性规划法 …… 169
5.5.3　搜索法 …… 170
5.5.4　穷举法 …… 171

6　浮选数学模型 …… 175

6.1　概述 …… 175
6.2　单相浮选动力学模型 …… 177
6.2.1　浮选速率公式 …… 178
6.2.2　浮选回路的模拟 …… 186
6.3　两相浮选动力学模型 …… 194
6.4　总体平衡模型 …… 196
6.4.1　通用模型的基础 …… 196
6.4.2　通用浮选数学模型 …… 199
6.5　浮选经验模型 …… 200
6.5.1　回归分析模型 …… 201

6.5.2 浮选混合模型 …… 201
6.5.3 浮选实际可选性曲线 …… 203

7 粉碎数学模型 …… 206

7.1 概述 …… 206
7.1.1 粒度减小数学模型 …… 206
7.1.2 破碎解离数学模型 …… 207
7.2 矩阵模型 …… 207
7.2.1 矩阵模型的建立 …… 207
7.2.2 矩阵模型的应用 …… 210
7.3 破碎解离数学模型 …… 211
7.3.1 高登单体解离模型 …… 211
7.3.2 C. S. Hsin 单体解离模型 …… 212

8 筛分和分级数学模型 …… 215

8.1 粒度数学模型 …… 215
8.1.1 粒度特性曲线 …… 215
8.1.2 粒度分布函数 …… 216
8.2 筛分数学模型 …… 217
8.2.1 振动筛数学模型 …… 217
8.2.2 概率筛数学模型 …… 219
8.3 分级数学模型 …… 219
8.3.1 处理量模型 …… 220
8.3.2 分离粒度模型 …… 220

9 矿物加工流程计算 …… 222

9.1 选煤优化软件包 …… 222
9.1.1 概述 …… 222
9.1.2 软件系统架构 …… 222
9.1.3 优化软件包的主要功能 …… 223
9.1.4 优化软件包的主要算法 …… 225
9.1.5 优化软件包的应用 …… 232
9.2 选矿厂模拟软件 ModSim …… 233
9.2.1 概况 …… 233
9.2.2 ModSim 软件使用 …… 234
9.2.3 ModSim 软件的流程图技术 …… 236
9.2.4 ModSim 对单个作业的模拟 …… 240

9.2.5　ModSim 对完整流程的模拟 …… 241

10　矿物加工计算流体力学模型 …… 248

10.1　矿物加工计算流体力学模拟的特点 …… 248
10.2　计算流体力学原理 …… 249
10.2.1　计算流体力学的工作步骤 …… 250
10.2.2　流体流动的控制方程 …… 250
10.2.3　控制方程的离散 …… 254
10.2.4　计算流体力学的软件结构 …… 255
10.3　采用软件进行矿物加工 CFD 模拟的方法 …… 256
10.3.1　准备工作 …… 257
10.3.2　CFD 模拟的求解步骤 …… 257
10.3.3　搅拌槽 CFD 模拟 …… 259
10.4　重介质旋流器的 CFD 模拟 …… 266
10.4.1　由旋流器的 CFD 模拟筛选湍流模型 …… 267
10.4.2　DSM 型重介质旋流器的 CFD 模拟 …… 267
10.4.3　DWP 型重介质旋流器的 CFD 模拟 …… 272
10.4.4　三产品重介质旋流器的 CFD 模拟 …… 273
10.5　浮选柱的 CFD 模拟 …… 277
10.6　粉体表面改性机的 CFD 模拟 …… 278

参考文献 …… 281

附录 …… 283

附录 1　上机实验 …… 283
附录 1.1　用线性化回归进行一元非线性模型的参数估计 …… 283
附录 1.2　黄金分割法 …… 287
附录 1.3　三次样条插值 …… 289
附录 1.4　分配曲线的正态分布模型 …… 291
附录 2　上机涉及的编程知识 …… 293
附录 2.1　编译系统给出错误的种类 …… 293
附录 2.2　附录 1 所列上机任务的常用库函数 …… 294
附录 3　MATLAB 用于矿物加工数学建模 …… 296
附录 3.1　MATLAB 简介 …… 296
附录 3.2　矿物加工数学建模有关 MATLAB 函数 …… 296
附录 4　相关系数 R 表 …… 301

1 概　　述

为探索客观事物的内在规律，提高生产效率和生活质量，人们在科学与技术领域采用数学表达式描述被研究对象的输入与输出之间的关系，由来已久。矿物加工数学模型是矿物加工过程或设备的简化描述与数学抽象，是矿物加工技术与数学相结合的产物。

本章主要解释有关数学模型的术语，介绍数学模型的建立方法及数学模型在矿物加工中的应用，以便建立概念，明了学习与研究矿物加工数学模型的意义。

1.1 数学模型

1.1.1 模型

矿物加工是现代矿业中必不可少的工艺过程。在20世纪初至今的这一百年里，矿物加工的理论和技术都得到了前所未有的发展。随着可被开采矿物的减少和加工工艺与技术的发展，从事矿物加工的人们，也越来越深刻体会到：矿物加工工程是复杂的。

“简化”是工程师或科学家们分解系统复杂性的基本策略；实际上，日常生活中我们也是这么做的。也就是说，了解复杂系统或解决相关问题时，应考虑使用系统的简化描述。而系统的简化描述，就是系统的“模型”。1965年，Minsky提出的模型的一般定义为：如果研究者使用对象 A^* 来解决对象A的某个问题，则称 A^* 是A的模型。

一般认为，模型（Model）是原型（Prototype）的简化描述，而原型是指人类在社会实践中所关心和研究的存在于现实世界中的事物或对象。所以，模型是相对于原型而言的，不同的对象实体，对应有不同的模型。例如，对象是一台矿物加工设备，对应的模型称为设备模型；对象是一个工艺过程（如矿物分选过程），对应的模型称为过程模型。

同时，模型又是原型的简化描述，即为了某个特定目的将原型所具有的本质属性的某一部分信息经过简化、提炼而构成的原型替代物。由原型到模型，需要经过两大步，即适当过滤或筛选对象实体和用适当的表现规则描绘出该对象实体的简洁模仿品。所以，模型应含有对象实体的主要性质，但又不能（或不可能）包含对象实体的全部性质。

理论上，采用模型研究复杂系统可以分为几个步骤：定义→分析原型系统→建立系统模型→仿真→确认。其中，“定义”即明确需要解决或回答的问题，并定义原型系统；“分析”原型系统就是识别与问题相关的原型系统的部分信息；之后，就可以以分析结果为基础，“建立”系统模型；而“仿真”是基于模型开展的试验，也就是应用模型解决问题，并导出解决问题的策略。“确认”则是判定仿真过程导出的策略是否能够解决或回答“定义”中提出的问题。还要注意，实际的研究项目很少能一次按照上述步骤直接完成，各个步骤间往往存在交叉。例如，如果模型确认失败，需要返回到上述循环式结构的某个步骤；改进模型，抑或是重新分析原型系统，甚至重新界定问题。

那么，好的模型是不是要“尽可能逼近”原型？回答是否定的。模型研究的目的是

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

简化，而不是复杂现实的无意义模仿。所以，“最佳模型”是符合目的的最简单模型，但它仍然复杂到足以帮助我们了解原型系统和解决问题。最佳模型可使人们明晰思路，透过矿物加工的复杂系统，看到其本质。

一般地，从原型得到模型的过程称为建立模型，简称建模。

1.1.2 模型的分类

模型作为原型的模仿品，按“模仿”角度的不同，有多种类型。只对几何尺寸按一定比例增大或缩小，称为几何相似模型。如：地球仪、原子模型。依据相似理论中的一些准数进行几何尺寸的变化，称为量纲相似模型。国内曾用这种模型进行过大型跳汰机研究。通过相似的数学公式描述不同实体的特殊物理规律，称为数学形式相似模型。如电阻电容充电电路的充电过程与单容积水槽的充水过程，其动态方程完全一样，只是方程中参数的物理意义不同。

按照对实体的认识深度，模型分为具体模型与抽象模型。具体模型又分为直观模型、物理模型；抽象模型又分为思维模型、符号模型、数学模型。数学模型采用数学语言来模拟原型系统。

另外，按照描述规则的不同，还可以有多种分类方法。如实际模型与思考模型；精确模型与近似模型；动态模型与静态模型。又如，按表现形式分类，可分为数学模型、逻辑模型、图形模型、模拟模型等。

实际中，人们会根据不同的需要，对同一研究对象，从不同角度建立不同形式的模型。如对选煤工艺，可以用流程图表示；也可以用一系列有顺序的运算表示。另一方面，具体某种模型，可以按不同分类角度归类，如选煤厂工艺流程图，可以视为煤炭分选过程的直观模型、近似模型、静态模型和图形模型。

1.1.3 数学模型

从不同角度，数学模型有很多定义。

狭义讲，数学模型是指将原型系统的特征或本质用数学表达的关系式来表示的模型。

从建模过程的角度，数学模型是三要素（S，Q，M）的集合体，其中，S 是原型系统，Q 是与系统 S 相关的问题，M 是用来回答问题 Q 的一组数学表达式。这个定义强调了建立数学模型的先后顺序，即（通常情况下）首先定义原型系统，然后提出与系统相关的问题，最后建立数学表达式。（S，Q，M）集合体中的三个要素都是数学模型不可或缺的组成部分；没有问题 Q，就无法建立数学模型。

从数学角度，数学模型是“与现实组成部分相关，并根据特定目的而建立的一个抽象及简化的数学结构”。

当然，作为模型的一种类型，数学模型的主要优势依然在于简化系统，即，使复杂系统的信息内容简单化。

需要注意，实际应用中，模型的数学关系式是多种多样的，不单局限于显式的函数关系，可以是图形，也可以是表格，（使用计算机后，）还可以是计算机程序。

由原型建立数学模型的过程简称数学建模。数学建模不仅需要一定的数学知识与技巧，还需要敏锐的洞察力与理解力（有赖于专业知识）。

一般地，数学建模包含模型求解在内，即数学建模不单单包括由原型得出一个数学表示，更重要的是要求解模型并揭示其现实意义，还要为确认模型的可用性和适用性而进行模型检验。

还要注意，为了便于建模（也包括求解），数学模型往往只把生产过程中主要的输入与输出的变量关系描述出来，忽略一些次要和影响不大的因素，所以建模时要善于抓住问题的内在联系，作出合理的假设与简化，找出影响问题的各种因素及其相互关系。建立应用于矿物加工工程这样的工业过程的模型更是如此，可能出现数学中不够合理，但对实际生产却是切实可行的假设、简化、省略、近似。

所以，还应始终牢记：谨慎地使用数学模型。在使用数学模型解决实际问题时，数学建模过程中所做的简化和假设将或多或少地限制我们对真实系统的理解。

1.1.4 数学模型的描述

数学模型描述时，涉及一些术语。本节给出这些术语的含义界定。

（1）因变量。对以集合体（S，Q，M）代表的数学模型，在表达式 M 中用以描述系统 S 的状态以及用于回答问题 Q 的数学量y_1，y_2，…，y_n称为（S，Q，M）的因变量。可见，因变量用于描述所关注的原型系统的属性。

（2）系统参数。对以集合体（S，Q，M）代表的数学模型，x_1，x_2，…，x_n为数学量（可以是数值、变量或函数），且这些数学量可借由表达式 M 得到描述系统 S 状态的因变量以及用于回答问题 Q，则 x_1，x_2，…，x_n称为数学模型（S，Q，M）的系统参数。所以，系统参数用于描述系统特性，进而通过数学方法确定因变量。

从数学角度，系统参数也就是数学表达式 M 的自变量。

（3）模型中的数学问题。通常情况下，很容易区分数学模型的表达式 M 与数学模型隐含的待求解的数学问题。模型中的数学问题可以凭借数学专业求解、还可用软件进行求解。换言之，实际中，模型被表达为纯粹数学问题后，其求解可以“扔给”数学家去完成。意即，即使不是数学家，也可以采用数学模型方法便捷地解决问题。

数学建模通常涉及多学科的交叉内容，非数学专业人员通过对系统进行深入分析后，才可以建立数学模型。数学模型的作用是将“数学”这个工具应用于看似非数学性质的问题中；数学建模将非数学问题“转换”成数学语言。“转换”之后就可以采用强大的数学方法进行模型求解。

（4）辅助变量。有些情况下，需要通过引入辅助变量才能便捷地将问题描述转化成数学表达式，即用辅助变量帮助确定未知量。自然，要确定辅助变量和未知量，需要问题描述时提供更多信息（即辅助变量增加了模型求解时方程组的大小）。

（5）统计方法。统计方法在数学建模中具有重要地位。一方面，统计方法本身就是一类可用于对数据进行描述和推论的数学模型集合；另一方面，统计方法为非统计数学模型与真实世界之间提供了联系纽带。因为，系统参数和因变量都需要实验测量，而实验测量的数据结果需要用统计方法来处理。

统计方法中，描述统计学用来描述或概括数据；而推论统计学可以通过对数据进行分析，获得随机性问题和不确定性问题的结论。

1.2 数学模型的分类

数学模型分类的意义在于，帮助建模人员知道所建数学模型处于数模空间的哪个位置，以及一旦原有模型不适用时可以选择其他哪些模型。

按照不同的标准，数学模型有多种分类，且不同角度的分类，还互有交叉。

最直接的分类是按照数学模型所针对的原型进行分类。如针对浮选过程的数学模型称为浮选数学模型，针对重选过程或重选分选结果的数学模型称为重选数学模型等。

本节头两节给出数学模型的通用分类，建立起关于数学模型分类的系统思想。之后，再单列标题展开介绍与矿物加工数学模型有关系的几种重要分类。

1.2.1 依据认识程度的分类

当对系统 S 的认识仅处于对因变量（和系统参数）观测与统计的阶段，而对其内部工作过程毫无了解时，所得模型称为黑盒模型。而对系统 S 能提供其由系统参数到因变量的明确过程信息的模型，称为白盒模型。

黑盒模型中，系统 S 像是一个被“黑色”笼罩的盒子，对其内部过程毫无认识；白盒模型中，系统 S 像是一个“透明”的盒子，对其内部过程已全部掌握。介于黑盒模型与白盒模型之间的，是灰盒模型。所以模型的“灰度”便成为认识程度的代名词。

图 1.2-1a 给出基于认识程度（从黑盒模型到白盒模型）的数学模型分类方法，而且从 S、Q、M 三种角度进行了排列。

从原型 S 的角度，心理学系统和社会学系统居左，因为这类问题复杂性极高，包括很多子过程，比较难以理解，只能通过对外围信息的收集、分析、判定来解决问题。另一方面，机械系统和电路系统占据最右端，通过物理定律和公式，很容易掌握这些系统的特性。其他系统（如生物系统）的模型逐渐由黑盒向白盒渐变。

从能够解决的问题角度，随着模型逐渐由黑盒变为白盒，数学模型可以解决的问题越来越具有挑战性。在黑盒端，模型可依据数据进行大致可靠的预测，化学系统模型则可以精确地用于控制反应过程；在白盒端，在原型实体实现之前，可在计算机上采用数学模型对系统与过程进行设计、测试和优化，其中包括计算流体力学交互设计、虚拟现实等技术。例如，可使用数值模拟软件计算三维装置（如集成芯片）的温度分布，进而能通过在计算机上虚拟更改设备特性、观察温度分布变化，先在计算机中对设备构造进行优化、获得预期的温度分布特性，之后再付诸实际制造。

需要指出，灰盒模型也可称为半经验模型，或称为综合模型。灰盒模型基于 S 的部分信息构建，但还有一些重要信息难以获得。

1.2.2 依据数学模型要素的分类

按照数学模型的三要素定义，把数学模型看作一种集合，则该集合可在 S、Q、M 三要素构成的空间（不妨称为 SQM 空间）内描述，据此可将数学模型分类（如图 1.2-1b 所示）。

1.2.2.1 SQM 空间之 S 轴

按 S 轴的分类即是按原型系统的分类。

可分为针对实体系统的数学模型与针对概念系统的数学模型。实体系统是真实世界的一部分；概念系统主要是由思想、创意等组成。矿物加工工程属实体系统。

可分为针对自然系统的数学模型与针对技术系统的数学模型。自然系统是自然界的一部分；技术系统是一辆车或一部机器等。矿物加工工程属技术系统。

可分为针对随机系统的数学模型与针对确定系统的数学模型。随机系统包含随机效应；确定系统不包含或包含很少以至可以忽略的随机效应。矿物加工工程中这两类系统都存在。

可分为针对连续系统的数学模型与针对离散系统的数学模型。连续系统中包含与连续时间变化相关的变量。离散系统只包含与离散时间变化相关的变量。矿物加工工程中主要是连续系统，涉及离散系统的地方很少（产品的装车、打包之类，可归为离散系统）。

空间变量的个数称为系统维度（常用 1D、2D、3D 表示）。依研究人员的关注角度，这三种维度的模型在矿物加工中都会出现。

还可按应用领域分类。此处“应用领域”若理解为数学模型所涉及的领域，如化学系统、物理系统、生物系统等，则图 1.2-1a 中罗列的系统在矿物加工工程中都有所涉及。

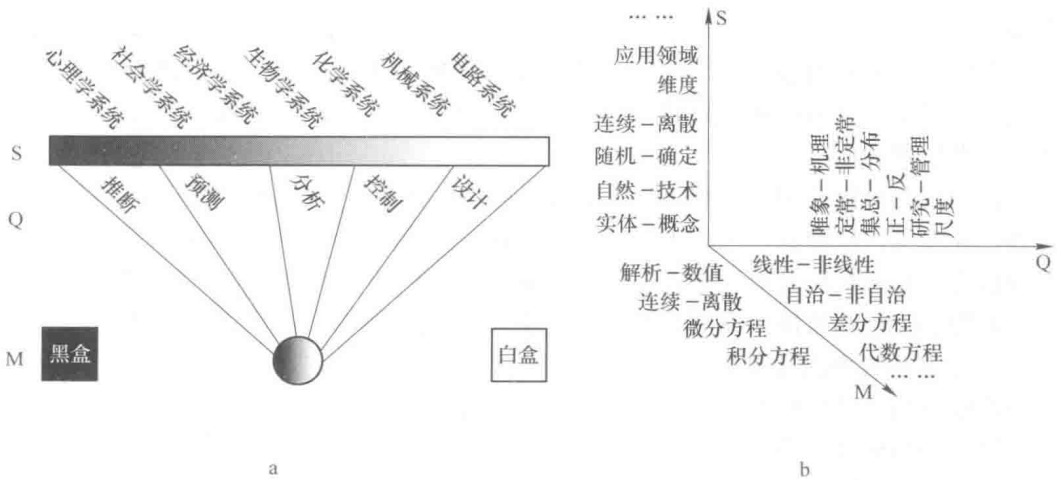

图 1.2-1 数学模型的分类

a—基于认识程度的数学模型分类；b—基于 SQM 空间的数学模型分类

1.2.2.2 SQM 空间之 Q 轴

按 Q 轴的分类即是按问题类型的分类。其中，唯象模型与机理模型、定常模型与非定常模型，将单列标题讨论。但是，先要指出，唯象模型也被称为经验模型，机理模型等同于理论模型。

集总模型与分布模型：对数学模型（S，Q，M），若至少一个系统参数或因变量与空间变量相关，则称为分布模型；若系统参数或因变量都与空间变量无关，则称为集总模型。集总模型（与空间无关）和分布模型（与空间有关）的区分，主要取决于所提的问题。例如，对重介质旋流器，当虑及混合液密度与空间有关时，其数学建模问题需要用分布模型来解决；当把混合液密度视作均一时，其数学模型将是集总模型。

正问题与反问题：若问题Q是通过给定输入量和系统参数来确定输出量，则模型解决的是正问题。反之，若问题Q是确定输入量和系统参数，则模型解决的是反问题。如果问题只是确定系统参数，则称为参数辨识。矿物加工实践中，产品指标管控中，解决的是正问题；而控制策略研究时，需要解决反问题。

研究模型与管理模型：若问题Q是为了理解系统S，可使用研究模型。若问题Q是确定系统S的实际问题的解，可用管理模型。研究模型所要考虑的问题更加复杂，不便于管理。矿物加工过程中，依问题角度，同一个数学方程可能是研究模型的组成部分，也可能是管理模型的组成部分。

尺度：针对问题Q，模型以合适的尺度对系统进行描述。例如，空气重介质流化床干法选煤中，问题Q可能是研究加重质颗粒在床层中的运动规律，也可能是确定流化床床层的密度，显然，这两种情况需要建立两种不同尺度的数学模型。

1.2.2.3 SQM空间之M轴

按M轴分类实质是按模型表达式的数学类型分类。这些类型均可能出现在矿物加工数学模型中。

线性模型与非线性模型：在线性模型中，未知量之间通过线性数学运算组合在一起，例如参数的加、减、乘等。在非线性模型中，可能涉及未知量相除或超越函数等。通常情况下，非线性模型会有多个解，求解较为困难。矿物加工过程的许多问题都是非线性问题，线性模型很少。为简化建模过程，非线性模型可以（在一定程度或一定范围内）近似成用线性模型表示。

解析模型与数值模型：在解析模型中，可通过包含系统参数的数学公式对系统行为进行描述。建立解析模型后，可不用给定具体数值，便可在理论上研究参数的定性影响和整个系统特性。数值模型是由计算机求解的近似解，主要用于研究给定参数值情况下的系统特性。矿物加工计算流体力学模型是典型的数值模型，能给出指定工况（用边界条件表示）下，原型系统中因变量的空间离散取值。

自治模型与非自治模型：如果方程与时间无关，称为自治模型；否则为非自治模型。

连续模型与离散模型：在连续模型中，自变量在一定时间间隔内是任意值（通常为实数）。在离散模型中，自变量被假定为某些离散值。对用于过程控制的矿物加工数学模型，对原型过程来说，属连续模型；但在使用数字计算机作为控制器之后，控制器内采用的数学模型属于离散模型。

差分方程、微分方程、积分方程、代数方程：这些都是数学模型表达为方程（方程组）后基于方程（方程组）类属的分类形式。在差分方程中，获得的结果是一系列离散数据，常用来描述离散系统；微分方程是指包含未知函数导数的方程，是建立连续机理模型的主要工具；积分方程是指包含未知函数积分项的方程，也常见于机理模型中；代数方程是指包含加、减、乘等基本代数运算的方程。

必须强调，以上数学模型分类互有交叉。例如，唯象模型也被称为统计模型或黑盒模型。唯象模型可以是集总、离散、定常或非定常模型等。

综上，可以发现，术语“矿物加工数学模型”实质是按原型系统分类而命名的。矿物加工数学模型是关于矿物加工理论和矿物加工生产的数学模型，建模目的是要解决矿物加工学的理论分析问题（科学问题）和生产过程的计算、预测、优化问题（技术问题），

为设计、管理、控制提供依据和方法。研究目的和应用场合不同，对建模要求也自然不同。矿物加工数学模型建立时，应根据需要，选择适宜形式的模型。

1.2.3 机理模型与经验模型

一直以来，矿物加工行业中最常见的一种分类是按模型来源分为机理模型与经验模型（其他工业行业也是如此），而介于两种类型之间的，便是综合模型（又称混合模型）。研究人员总希望得到机理模型，但由于认识的局限和原型系统的复杂性，在还未完全掌握原型系统内部的所有过程信息但又必须建立模型以解决实际问题的阶段，得到的就是综合模型。综合模型可看作是由经验模型通往机理模型的漫长研究历程上的中间产物。

所以，按照来源，数学模型可分为机理模型、经验模型和综合模型。

国外文献给出的定义为：对数学模型（S，Q，M），如果只基于实验数据构建，而未使用系统 S 的任何关于系统内部工作过程的信息，则所建数学模型称为经验模型；如果 M 中的一些表达式是基于系统 S 内部工作过程信息而建立的，这样的数学模型称为机理模型。

相对于经验模型，机理模型具有以下重要优点（也是机理方法的特色优势）：第一，机理模型可以更准确地预测系统行为。这是因为机理模型是基于具有普适性的物理理论或其他理论而建立，即使超出实验数据范围，仍然有效。第二，机理模型允许修改系统，以对其特性进行更好的预测。例如，可以换为另外的某个原型系统，仍然有效。第三，机理模型通常涉及具有实际物理意义的参数，这些参数可真实反映实际系统特性，意即，机理模型中的参数与系统特性紧密相关。经验模型中数值系数，只是数字而已。所以，如有可能，应尽可能采用机理模型。

但是，现实是很多情况下，根本无法建立系统的机理模型。为了给 Q 一个合理可用的 M，不得不使用经验模型。在工程领域或科学研究、开发中，对系统信息知之甚少的情况并不少见，或者虽然已经掌握了足够的系统信息，但系统极为复杂，建立机理模型需要花费大量时间和资源，这时就会用到经验模型。建立经验模型的一个重要优点是，只需要花费少得多的时间和资源。

在实际工程中，如果建立经验模型所需花费很少且可以给出问题的答案，那么建立经验模型当然是一种不错的选择。

以上讨论是广义性质的，有助于抓住两类数学模型的实质内涵。下面给出适合矿物加工工程角度的分类定义。

1.2.3.1 机理模型

机理模型是指按照原型实体内部的物理或化学规律分析推导出来的模型。对于作用机理清楚、因果关系明确的理论问题和生产过程，可以建立机理模型。矿物加工过程中，能建立机理模型的情况不多。一般地，涉及化学反应或水力分级过程的作业单元，有可能建立机理模型。建立机理模型的过程称为机理建模或理论建模。

1.2.3.2 经验模型

经验模型是指在不考虑原型实体内部变化的情况下，收集实体外部的输入、输出数据，用拟合、插值或数理统计等数学方法，推导出来的模型。任何系统或过程，只要收集其输入、输出数据，都能建立经验模型。矿物加工过程中大量采用经验模型。例如，对实

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com