

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第一编

时代文化出版社

刘彦佩 半闲数学集锦

Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu

第一编



时代文化出版社

半闲数学集锦（第一编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文化出版社

地 址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司

地 址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼

电 话：010-68920114 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2016年9月第1版

书 号：ISBN 978-988-18455-0-4

定 价：全套 1890.00元（共22编）



版权所有 翻印必究

集锦总序

此前,刘彦佩选集(计廿三编),已经将我本人主要出版物,以及一些有关的合作论文,汇集在一起.从中反映了我的主要学术活动,特别是在纯粹数学与应用数学中的一些基础理论,以及可能的相关应用方面.对于回答人们所提出的如何选择主攻方向,以及如何在选定的方向上,开展理论研究,这样两个问题,提供了不同程度,成功的或不成功的,在参考过程中的方便.

人们可以看出,组合学,尤其图论,如何从不能登数学的大雅之堂,到现在已然联系到了,数学本身基础理论的,几乎所有重要方面,例如拓扑、几何、代数、甚至泛函等.在方法论上,那里多只侧重分析.

至于如何从中综合出来,一些具有普遍性的理论,则不免尚仍不甚了了.不过,专著的形成,有助于体察,一些综合性研究的范例.

半闲数学集锦(计廿二编,或简称集锦)就是着意于,弥补如此的不足.主要编排设想就是,将我的专著与文章联系,以显示每一个专著的形成与发展的过程,相得益彰.我的专著,大致分为十一个系统.

第1系统,由图的可嵌入性理论[137](方括号内的数字,为第一编1.39(著目)款中,所列著作的序号!), *Embeddability in Graphs*[141],和图的可嵌入性理论(第二扩充版)[438],三本专著组成.它们分别包含在第二编(2.01—2.20),第三编(3.11—3.29),和第五编(5.01—5.23)之中.由此可以看出,对于图在平面上,以及任何给定非零亏格的曲面上,可嵌入性的识别,从基础理论的建立,到趋于完善的发展过程.

第2系统,由纵横嵌入术[135]和纵横布局论[154]—兼谈VLSI的布局,两本专著组成.它们含第六编(6.16—6.27和6.28—6.37).前者确立了基础理论.后者构建了实现理论.

它们所能处理的对象,远不只VLSI线路的定位与布线,例如在公共交通,航空,燃气、水、以及排污等系统的设计中,都有可能得到应用.

在数学理论中,属于一种新型的离散计算几何.这里的节点和连线都要考虑占用面积.事实上,这些在理论中,都可以通过引进合适的度量去实现.虽然原则上,是对于平面而言.不过,基于[396](15.16)中所创建的曲面模型,这两本书,所有已经得到的理论结果,都可以延伸,或扩展到任何亏格非零曲面上.

第3系统,由 *Enumerative Theory of Maps*[183],数组合地图论[241]和数组合地图论(第二扩充版)[397],三本专著组成.它们分别包含在第七编(7.11—7.26),第八编(8.03—8.19)和第九编(9.14—9.33)之中.这个系统首先将Tutte对于地图的形式化的定义,普遍化到适于更一般的组合构形.用局部对称性反映全局.

这就是从任何一个集合出发, 将 Klein 四元群, 粘到这个集合的每一个元素上, 形成基础集. 然后考虑这个基础集上置换. 将 Tutte 以平面三角化为基础的理论, 扩充到各种各样的平面地图类. 但对于亏格非零曲面上的地图, 却只顺带提到. 而且强调的是计数.

第 4 系统, 仅由 *General Theory of Map Census*[419], 一本专著组成. 它包含在第十编(10.04—10.26)中. 在第 3 系列的基础上, 主要提供如何从亏格为零, 发展到亏格非零, 而且强调普查, 或者说, 遍数. 特别是通过函数、差分、微分方程组, 以及泛函方程刻画地图的类型.

第 5 系统, 由 运输网络术[168] 和 运筹学导引(上篇)[271], 两本专著组成. 它们含第十一编的 11.13—11.24 和 11.25—11.47. 前者着重通过运输网络术, 一种源自应用数学的方法, 在解决数学, 尤其是纯粹数学难题中, 所发挥的作用, 向人们揭示应用数学对于基础数学的重要性.

而基础数学对于应用数学的意义, 在第 1 系统的专著中已经显示出来了. 这就形成了我的所谓“数学一体观”. 事实上, 基础数学对于应用数学重要性, 从华罗庚、陈省身、吴文俊等的贡献中, 早已有更具备说服力的体现.

后者着重于综合运筹学的研究, 通过提炼具有相同核心内涵的专题, 形成精简的教程. 出版之后, 至今尚未得到相关科技工作者和教育工作者应有的广泛注意. 我希望通过这种尝试, 能够减轻学生负担, 培养自学, 以至在独立工作能力方面, 起到积极作用.

第 6 系统, 由 *Introduction to Combinatorial Maps*[336] 和 组合地图进阶[292], 两本专著组成. 它们含第十二编的 12.25—12.38 和 12.39—12.62. 可以将它们视为第 1 系统和第 3 系统所必需的, 先导理论基础. 从此, 使我开始统一地, 用本人前期研究中形成的联树, 构建各种以高等数学为基础的图论, 乃至组合学的理论框架. 前者是后者的雏形.

在后者中, 我第一次提出“有限(以及强有限)递归原理”和“曲面(亏格非零)闭曲线定理”(当亏格为零时, 就是 Jordan 定理, 或公理). 开始用一定的篇幅, 在每章后, 安排我研究工作中形成的, 分三个等级思考题, 练习题和研究题, 分别针对初学者, 硕士生和博士生, 或研究人员.

第 7 系统, 由 地图的代数原理[354] 和 *Introductory Map Theory*[459], 两本专著组成. 它们分别包含在第十三编(13.27—13.56)和第十六编(16.01—16.37)之中. 可以将后者视为集前者之大成. 虽然后者是由美国一家出版社出版, 在国际上对这个出版社并不大知名. 但此书出版后, 很快得到一位拓扑图论元老 White(A.T.) 的正面评论.

他是第一位赞赏联树表示的外国人. 当然, 这一专著本身, 就是以联树贯穿始终的, 验证了它早已被理论证明了的效力.

第 8 系统, 只由 *Theory of Polyhedra*[396] 一本专著组成, 含于第十五编(15.01—15.21). 之所以这一本专著就形成一个系统, 是因为它为用现代几何学的观点, 研究图, 或更普遍地, 组合构形, 建立了一个独立的理论基础. 在这里, 第一次提出了曲面的纵横模型, 为将平面的纵横嵌入理论, 发展到任意给定非零亏格曲面上, 建立了一个新的理论思路.

尤其要注意的是,这本专著,对于各种带普遍性的多面形,提供了确定它们,多项式型完全不变量,的方法.

第9系统,只由 *Topological Theory on Graphs*[400],一本专著组成,含于第十七编(17.01—17.20).这本专著的形成,源自 Abram 和 Slaluty,在国际图论杂志上,发表一篇文章,提到第1系统中的专著[141]的一对同调与上同调定理,只有必要性而不会有充分性.为了澄清他们的错误,指出这种错误产生的根由,使我在此基础上,不能不再写一本专著,用拓扑学的观点,研究图的总体性质,而不是如文献中,拓扑图论只侧重用拓扑的一些方法研究图.

特别值得一提,就是在这一对同调与上同调定理的基础上,导出识别一个图是,或否,能嵌入到任意给定非零亏格曲面(包括可定向与不可定向!)上,的判准.而且,这个判准的亏格为零的特殊性形,一举导出 Euler, Whitey, MacLane, 以及 Lefschetz 四个被人们认为相互独立的定理.

而这篇国际图论杂志上的文章,只讨论推广 Whitney 定理到射影曲面(不可定向亏格 1!)上.

第10系统,仅由 *Elements of Algebraic Graphs*[486],一本专著组成,含于第十九编(19.11—19.36).将图,或更普遍地,组成要素带相同对称性的组合构形,若这个对称性可以用一个群 Γ 表示,通过考察从粘 Γ 到每一个要素,而得基础集上的置换或者剖分,揭示这种组合构形的,内在全局性质.

当 Γ 是二元群时,基础集上的剖分就是图(允许自环和重边!),和置换,就是可定向地图(连通性!).当 Γ 为四元群时,基础集上的置换,就不仅可以表示可定向地图,而且还可以表示不可定向地图.

由此出发,讨论在各种等价变换之下的不变量,以及确定在给定一些不变量之下的分类,甚至在给定计数参数之下,类数.

这就提供了,与文献中的代数图论不同的,一种用现代代数的观点,研究图,甚至更普遍地,组合构形的理论基础.

第11系统,仅由组合泛函方程论[500],一本专著组成,含于第廿编(20.07—20.21).

这个系统的中心在于,从我以往遇到的各种方程入手,在 Laurent 环伴随消去律而得的整域,及其扩张上,建立定性理论.只通过在这个整域扩张上的变换,就求出这些方程的解.因为这些方程特定初值的解,都有组合构形,尤其是地图计数上的意义,它们都有正项有限和表示.

特别值得一提,通过我在所有曲面地图计数方面的新进展,第一次给出了,一直视为很困难的,曲面介子泛函方程解的无和显式.这就为利用现代分析的观点,确定无和显式,及其渐近行为,提供了一种新的理论路线.因此,这个系统为解析图论,甚至解析组合学,的形成,构建一种理论基础.

穿插在上面提到的各编中的文章,在专著前,多为专著的理论准备.在后,多为专著的某些内容的引伸,或扩展.

其它编(即第一编,第四编,第十四编和第十八编,以及第廿一、廿二编)中的文章,除一些特殊的需要,不是为已经出版的专著做理论准备,以及它们后续发展,就是为新的尚还不够条件形成专著的课题,提供为了达到所需条件的理论积累.

在第廿二编中,除补遗的文章外,都是为便利读者,所附加的.特别要提一提的是,在我的“自述纲要”(22.05)中,除提供尽可能准确的背景材料外,还精心列出了我希望能完成,至少在近期,能取得不同程度进展,的 165 个研究计划.

它们都具有理论和/或实际价值,困难性和可接近性.然而,要想完满完成,则远非易事.所谓完满,应该是完成下面的三个阶段:理论系统化—运行有效化—利用智能化.

之所以,将通过我本人思考过的,都如实地纳入到这个集锦中,试图展示我在各专题研究中,认识发展过程,为研究人的认识论,也或许会,提供作为客观参考的,一些实际材料.

刘彦佩
2015 年 10 月
於北京稻田村

第一编序

一年之计在于春,一月之计在于朔,一日之计在于晨,一生之计在于立,一事之计在于初.这个第一编就是先从我步入科研之门时,所思、所求和所作起,以及由此如何一直影响到如今.内容包括以下十个方面.

第一、在唯物宇宙观,包括自然观与社会观,的影响下,自然地接受了“理论联系实际”中,要想搞清一种客观存在的内蕴规律性,总是从调查这种存在的方方面面开始.在上世纪 60 年代初,我两次被派往鞍钢,企图用数学方法,解决那里生产管理中有关问题.主要目标是极少浪费.在这个过程中,从未想过,用一个甚么模型强加进来.文 1.01[003] 和 1.02[004] 就反映了,所取得的成果.它们都是在 10 余年后,前者由于操作简单而且已经无余料浪费,一直在用着,和后者恰遇西方人介绍如何解决港口吞吐量设计问题,发现与之用的是同样的原理,才公开发表.再过 10 余年,在 1.01 中提到的 ϵ -最优的手段,竟在标志线性规划发展阶段的有效化研究中再现.在 1.02 中,采用的“权衡利弊”法,运筹学的存储论,和更新论等中,也已屡见不鲜.

第二、借用社会上“批林批孔”的时机,通过对古代典籍的学习,总结出两篇文章,即 1.03[005] 和 1.04[006].前者揭示了宋人沈括曾说“算术不患多学,见简即用,见繁即变,不胶一法,乃通术也”,他所创的估计坛形容器堆积,占用最少体积的近似公式,在中国古代数学史的大厦上,又增加了一砖一瓦.后者则至今仍然保持着,是第一篇关于研究运筹学思想发展史的文章.

第三、在 1.05[007] 和 1.12[016] 中,将线性规划的各种单形(或单纯形)方法规范到同一个框架下,特别是提出双正交类型的算法,提高了计算精度.用 ALGOL 语言编制出一个标准程序,并且在当时中国科学院数学研究所的 DJS-21 机上得以实现.文 1.12[016] 不仅从理论上证明,这个算法比其他单形法的精度都高,同时也得到在计算机上,计算结果的验证.

虽然线性规划求解的软件,例如 LINGO,随着小型台式机,甚至笔记本电脑的普及,因为方便,利用已经相当普遍,对于计算精度要求,似乎不甚迫切.对于大型工程计算,精度有时至关重要.虽然 ALGOL 语言现在似已经无人用了,文 1.05[007] 后附加的计算逻辑框图,却是不依赖计算语言的.现在仍不知,在国内是否还有第二个,如是计算线性规划,的标准程序.

第四、文 1.06[008]) 与 1.07[009]).前者是恢复中国科学院的基础理论研究地位后,属于我,在有关基础数学方面,的开篇之作.后者则是,对前者,在文献方面的,一个当时全面的补充.为下一编(即第二编)中的专著图的可嵌入性理论开辟了一条研究路线.

不料,20 年后,Archdeacon 和 Siran 在国际图论杂志上,发表的用 θ -图判定图的平面性的文章,在理论思路,竟与 1.06 如出一辙.不过他们结果的复杂度是指数阶,而 1.06 的复杂度确是至多二阶的.因为 1.06 中推演出的派

生图(之后, 平面性辅助图, 或演生网, 似后者更切题!)只是 θ -图的一个很小的子图. 之所以能会如此, 全在于 1.06 所蕴含的对于支撑树不变性的理论基础. 也许这就是, 至今仍未能, 被大众所接纳之症结.

第五、文 1.08[010], 1.09[011], 1.10[014], 1.12[016] 和 1.13[017]. 它们都关联图在曲面(一类 2-流形)上的嵌入. 其中, 1.08, 1.09 和 1.12 讨论图的最大亏格, 1.10 和 1.13 则是确定了图 $K_n - K_3$ 的亏格(即最小亏格!).

因为 K_n 的亏格通过寻找电流图, 历经近一个世纪, 才圆满完成, 引起人们对于图的亏格的注意. 成为那时的热点. 因为考虑到, 对于图的亏格的确定, 必须选择高对称的图. 不打算卷入这个热点. 只是用演示法顺手牵羊, 确定 $K_n - K_3$ 亏格的两种未决情形, 最终完成 $K_n - K_3$ 亏格的确定.

考虑到最大亏格, 可以不考虑图的对称性, 使我能从任意图招手. 虽然 1.08 对于不可定向情形, 从理论结果和嵌入的有效性实现, 都得以圆满完成. 但对可定向情形 1.09 和 1.12 的理论结果远不如不可定向情形完美, 这里所导出的上可嵌入性的研究, 直到今天仍未能终结.

第六、1.14[018]—1.18[024]. 在 Ringel 专著 *Map Color Theorem* 的基础上, 对于曲面上的地图着色定理与图的曲面上的嵌入, 做了一个精简的系统总结. 由于 20 年后, 联树模型开辟了, 对于任何图(不必考虑对称性!), 确定亏格的新方向, 为这个近百年才完成的定理, 做出本质的简化, 带来了愈来愈大地, 接近实现的希望.

第七、1.19[026], 1.20[027], 1.23[036], 1.24[038] 和 1.27[047]. 在精简 Ore 专著 *The Four Color Problem* 的基础上, 主要增添有关色多项式和计算机解决途径的部分. 着重通过色多项式的代数手段. 可惜至今, 尚未喜见端倪.

第八、文 1.21[034], 1.22[035], 1.25[045], 1.26[046]), 1.28[057] 和 1.29[058]. 将 Tutte(William Thomas, 1917–2002) 退休前, 在 Waterloo 大学做的 12 报告, 经过整理, 翻译成中文, 补充必要的参考文献而成的. 得到 Tutte 本人允许后, 以中文形式发表. 因为 Tutte 是使图论现代化的一位标志性的人物, 他的研究历程应该引起人们注意. 退休 10 余年后, Tutte 以这些报告为基础, 又出版他的专著 *Graph Theory as I Have Known It*.

第九、除 1.39[著目] 外, 其它所有未提到的文章, 都属于评述. 例如, 1.34[067] 是为中国大百科全书所写的一个词条和 1.31[082] 是为自然科学年鉴中数学进展栏所写的, 反映在图论研究上所取得的进展.

文 1.32[136] 为应世界数学家思想方法之约所写的, 探讨 Tutte 在数学上成功之路, 以及一些重要思想发展的渊源.

文 1.33[201] 是我为国际离散数学杂志, 所主编一卷(含三期), 写的序. 其中列举了中国古代一些对于组合学的贡献.

文 1.34[278] 和 1.35[279] 是数学辞海中的两个学科首条. 在这里提出数学的研究研究对象, 是数(shù)与数(shǔ). 后者是近代组合学研究发展所显现出来的.

文 1.36[280] 诠释为什么“博学之, 审问之, 慎思之, 明辨之, 笃行之”也可以作为学习数学的方法. 文 1.37[306] 是为国际离散应用数学杂志, 合作主编的一期, 所写的序. 在 1.38[458] 中, 提出了线性规划, 两个有待完善和普遍化

的问题。

第十、1.39[著目] 提供了我的著作目录。包括 2014 年初以前的, 一些文章, 在美、德、俄出版的三个文摘与评论的索引, 以及被选文章, 在中文文选和英文文选中, 的各自排序。因为在各编的文章排序中, 伴随一对方括号, 其中的三位数字就是在这个著作目录中, 冠以相应文章的序号, 以便查阅。

刘彦佩
2015 年 4 月
於北京上园村

集锦总目

第一编

1.01[003]	关于一类钢筋下料问题.....	1
1.02[004]	提高钢管成材率的研究.....	14
1.03[005]	沈括的数学工作(徐光輝等).....	25
1.04[006]	我国古代的一些运筹思想(徐光輝等).....	30
1.05[007]	线性规划三角分解算法和 它的 ALGOL(DJS-21) 语言程序.....	38
1.06[008]	模 2 规划与平面嵌入.....	85
1.07[009]	图的平面性判定与平面嵌入.....	94
1.08[010]	图的不可定向最大亏格.....	110
1.09[011]	The maximum orientable genus of a graph.....	121
1.10[014]	图 $K_n - K_3$ 的亏格.....	136
1.11[015]	线性规划的近代算法.....	137
1.12[016]	若干典型图类的最大亏格.....	147
1.13[017]	The orientable genus of $K_n - K_3$	163
1.14[018]	地图着色定理与图的曲面嵌入(I).....	164
1.15[019]	地图着色定理与图的曲面嵌入(II).....	178
1.16[020]	地图着色定理与图的曲面嵌入(III).....	189
1.17[021]	地图着色定理与图的曲面嵌入(IV).....	201
1.18[024]	地图着色定理与图的曲面嵌入(V).....	210
1.19[026]	平面图的理论及四色问题(I) ——平面性与对偶性.....	221
1.20[027]	平面图的理论及四色问题(II) ——五色定理与四色问题的形式.....	235
1.21[034]	我所了解的图论(一)(W.T. Tutte).....	251

1.22[035]	我所了解的图论(二)(W.T. Tutte)	257
1.23[036]	平面图的理论及四色问题(III) ——由四色问题导出的理论工作	263
1.24[038]	平面图的理论及四色问题(IV) ——三着色与四色问题的几何表征	283
1.25[045]	我所了解的图论(三)(W.T. Tutte)	297
1.26[046]	我所了解的图论(四)(W.T. Tutte)	318
1.27[047]	平面图的理论及四色问题(V) ——四色问题的计算机的解决途径	333
1.28[057]	我所了解的图论(五)(W.T. Tutte)	347
1.29[058]	我所了解的图论(六)(W.T. Tutte)	359
1.30[067]	四色问题	383
1.31[082]	图论的进展(颜基义, 堵丁柱)	385
1.32[136]	塔特(W.T. Tutte): 生平与成就	392
1.33[201]	Preface of <i>Discrete Mathematics in China</i>	413
1.34[278]	组合学	414
1.35[279]	图论	416
1.36[280]	序, SPT高等院校选用教材(理工类数学丛书)	418
1.37[306]	Preface of <i>Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science</i> (J.E. Chen et al)	420
1.38[458]	序, 运筹学基础(王周宏编)	421
1.39(著目)	著作目录与国外文摘评论索引	422

第二编

专著[137]	图的可嵌入性理论	499
2.01	序	501
2.02	目录	505
2.03	第一章 预备知识	509
2.04	第二章 图中的树	534

2.05	第三章 图中的空间	548
2.06	第四章 可平面图	576
2.07	第五章 平面性	601
2.08	第六章 高斯交叉问题	629
2.09	第七章 平面嵌入	650
2.10	第八章 纵横可嵌入性	684
2.11	第九章 网格可嵌入性	721
2.12	第十章 多面形的同构	753
2.13	第十一章 图的分解	779
2.14	第十二章 曲面可嵌入性	808
2.15	第十三章 极值问题	840
2.16	第十四章 图和上图拟阵	869
2.17	第十五章 纽结不变量	894
2.18	参考文献	921
2.19	名词索引(汉英)	970
2.20	名词索引(英汉)	987

第三编

3.01[028]	k -valent maps on the surfaces	1005
3.02[048]	On the linearity of testing planarity of a graph	1011
3.03[068]	A new approach to the linearity of testing planarity of graphs	1021
3.04[069]	Boolean planarity characterization of graphs	1030
3.05[096]	On Boolean characterizations of planarity and planar embeddings of graphs	1044
3.06[138]	A polyhedral theory in graphs	1054
3.07[148]	Some characterization of the up-embeddability of graphs(Y. Huang)	1061
3.08[152]	A characterization of the embeddability of	

	graphs on the surface of given genus(Yi. Liu)	1070
3.09[153]	Bicycles, matchings and trees(K. Berman)	1076
3.10[155]	Generalized bicycles(K. Berman)	1086
专著[141]	<i>Embeddability in Graphs</i>	1100
3.11	Preface	1102
3.12	Contents	1107
3.13	Chapter 1 Preliminaries	1111
3.14	Chapter 2 Trees in graphs	1131
3.15	Chapter 3 Spaces in graphs	1143
3.16	Chapter 4 Planar graphs	1166
3.17	Chapter 5 Planarity	1187
3.18	Chapter 6 Gauss crossing problem	1209
3.19	Chapter 7 Planar embeddings	1227
3.20	Chapter 8 Rectilinear embeddability	1254
3.21	Chapter 9 Net embeddability	1287
3.22	Chapter 10 Isomorphisms in polyhedra	1315
3.23	Chapter 11 Decompositions of graphs	1337
3.24	Chapter 12 Surface embeddability	1365
3.25	Chapter 13 Extremal problems	1394
3.26	Chapter 14 Cographic matroids	1420
3.27	Chapter 15 Invariants on knots	1440
3.28	References	1462
3.29	Index	1498

第四编

4.01[190]	New approaches to the graphicness of a matroid	1521
4.02[156]	Maximum genus and maximum non-separating independent set of a 3-regular graph(Y. Huang) . . .	1533

4.03[158]	Embeddability of graphs on surfaces(Yi. Liu)	1543
4.04[159]	图的最大亏格与 2-因子(黄元秋)	1553
4.05[160]	Embeddings of one kind of graphs(Yi. Liu).....	1563
4.06[163]	Some classes of up-embeddable graphs(Y. Huang)	1569
4.07[164]	Maximum genus and 2-factors of graphs(Y. Huang) ...	1577
4.08[165]	Lower bound number of irreducible graphs on surfaces(Yi. Liu).....	1587
4.09[167]	Extensions on 2-edge connected 3-regular up-embeddable graphs(Y. Huang).....	1594
4.10[169]	图的上可嵌入性(黄元秋)	1604
4.11[171]	图的上可嵌入性与非邻节点度和(黄元秋)	1610
4.12[172]	A characterization of embeddability of graphs on surfaces(Yi. Liu)	1616
4.13[174]	The smallest non-upper embeddable 2- connected 3-regular simplicial graphs(D.M. Li)	1622
4.14[175]	Upper embeddability of graphs(Huang)	1626
4.15[177]	关于图的最大亏格的一个定理改进(黄元秋)	1633
4.16[178]	On the crossing number of circular graphs (Tongyin Liu)	1637
4.17[179]	The degree-sum of nonadjacent vertices and up-embeddability of graphs (Y. Huang)	1644
4.18[181]	The maximum genus of graphs with diameter three(Y. Huang),	1650
4.19[187]	An efficient algorithm for finding an adjacent matching of a graph (with D. Li)	1661
4.20[189]	The maximum genus of a 3-regular simplicial graph (D. Li)	1666
4.21[192]	New upper bounds on crossing number of circular graphs(R. Hao)	1678
4.22[195]	图的直径与 Betti 亏数(黄元秋)	1684
4.23[198]	图的上可嵌入性的邻域条件(黄元秋)	1689
4.24[199]	A tight lower bound on the maximum genus of 3-edge connected loopless graphs(D. Li).....	1693
4.25[200]	A polynomial algorithm for finding the minimum feedback vertex set of a 3-regular simple graph(D. Li)	1700
4.26[203]	关于图的平面可嵌入的一个上可嵌入性(黄元秋)	1707

4.27[204]	Maximum genus, independent number and girth of a graph (Y. Huang)	1712
4.28[205]	关于图的最大亏格的下界(黄元秋)	1718
4.29[206]	Strong embedding of outer planar near-triangulations on non-orientable surfaces(T. Liu, H. Ren)	1723
4.30[208]	New approaches to the double cover conjecture of graphs	1731
4.31[213]	Maximum genus and girth of a graph (Y.Huang)	1736
4.32[214]	关于点的度在 Modulo 4 下等值的上可嵌入 图类(黄元秋)	1743
4.33[216]	Near-triangulations of small circuit double cover with at most $n - 2$ (T.Liu)	1748
4.34[220]	Maximum genus, girth and connectivity(D. Li)	1752
4.35[221]	Lower bounds on the maximum genus of loopless multigraphs(D. Li)	1759
4.36[222]	A tight lower bound on the maximum genus of a 3-connected loopless multigraph(D. Li)	1769
4.37[224]	Face size and the maximum genus of graph— 1. Simple graphs (Y. Huang)	1777
4.38[227]	A relative maximum genus graph embedding and its local maximum genus (D. Li)	1792
4.39[229]	平面性理论与布线自动化	1799
4.40[230]	Determination of regular embeddings of graphs on surfaces(E.Wei)	1826
4.41[231]	Maximum genus and structures of 2-connected cubic simplicial graphs (D. Li)	1841
4.42[232]	关于 (ξ, k) -临界图 (黄元秋)	1849
4.43[233]	On 3-connected cubic graphs whose maximum genus attains the bound (D. Li)	1855
4.44[237]	A note on strong embeddings of maximal planar graphs on nonorientable surfaces(T. Liu)	1861
4.45[242]	Boolean approaches to graph embeddings related to VLSI	1865
4.46[243]	Face size and the maximum genus of graph— 2. Nonsimple graphs (Y. Huang)	1873
4.47[244]	关于直径为 4 图的最大亏格(黄元秋)	1885
4.48[245]	图的最大亏格与双重图上的 Euler 闭迹(黄元秋)	1891

4.49[260]	Equilibrium small circuit double covers of near-triangulations(T. Liu)	1896
4.50[266]	图的最大亏格与图的着色数(黄元秋)	1903
4.51[269]	Evaluations of crossing numbers by applying auxiliary graphs(R. Hao)	1912
4.52[277]	一类图的强最大亏格嵌入(魏二玲)	1919
4.53[282]	Strong embeddings of planar graphs on higher surfaces(T. Liu)	1922
4.54[283]	A note of interpolation theorem(E. Wei)	1929
4.55[286]	完全二部图的少面数强嵌入(魏二玲)	1934
4.56[287]	图的曲面嵌入I	1939
4.57[288]	On the isomorphisms of Cayley graphs of Abelian groups(Y.Q. Feng and M.Y. Xu)	1944
4.58[291]	图的曲面嵌入II	1960
4.59[293]	图的可定向嵌入的标根可数性(毛林繁)	1965
4.60[297]	关于图的上可嵌入性的一个新的临域条件(何卫力)	1972
4.61[298]	New automorphism groups identity of trees(L. Mao) ...	1977
4.62[301]	Maximum genus of strong embeddings (E. L. Wei and H. Ren)	1982
4.63[307]	A note on the maximum genus of graph G^3 (W. He)	1992
4.64[308]	从嵌入到地图	1997
4.65[313]	关于图的最大亏格的可约与不可约性(黄元秋)	2002
4.66[319]	Strong maximum genus of planar Halin graph (E. Wei)	2009
4.67[327]	Unique embeddings for graphs on orientable surfaces permitting short noncontractible cycles(H. Ren) ...	2015

第五编

· 著[438]	图的可嵌入性理论(第二扩充版)	2023
5.01	第二版序	2025
5.02	第一版序	2028
5.03	目录	2031