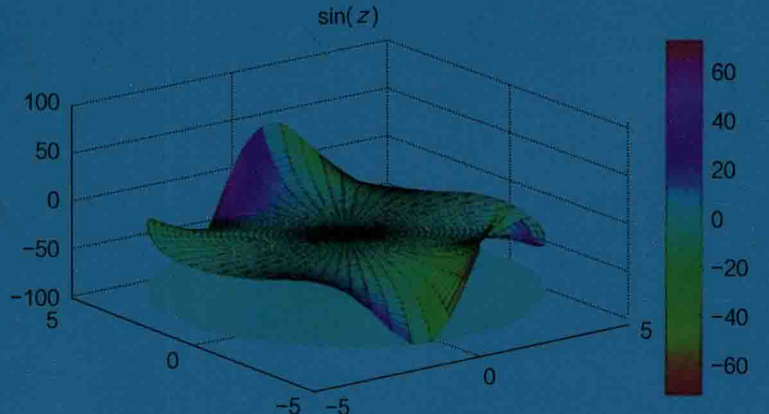
高等学校“十三五”规划教材

复变函数与积分变换

Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan

冯建中 主编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

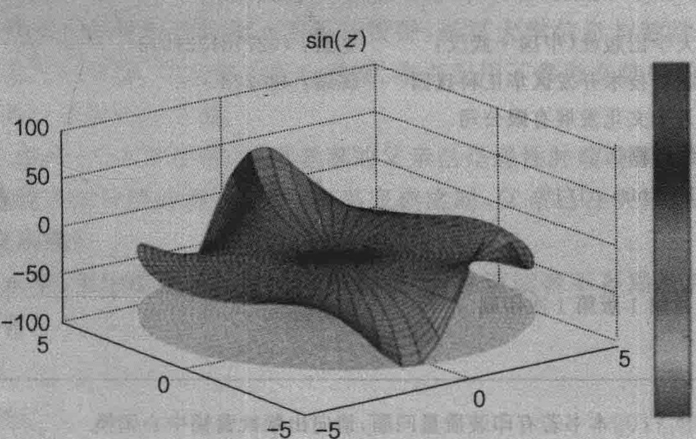
高等学校“十三五”规划教材

复变函数与积分变换

Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan

主　编　冯建中

副主编　李小飞　朱智慧　胡中波



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

内 容 提 要

本书在内容的选择上力图通俗易懂，密切与专业联系，包括复变函数和积分变换 2 个部分共 8 章，有复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等内容. 每章后精心选择了大量难度适中的习题，书后附有参考答案. 书末附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表，便于读者查阅使用.

本书可作为高等工科院校各专业，尤其是自动控制、通信、电子信息、机械工程、地球物理勘探、地球物理测井等本科生的专业复变函数与积分变换课程教材，也可供科技、工程技术人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/冯建中主编. —武汉：华中科技大学出版社，2017.5
ISBN 978-7-5680-2865-3

Ⅰ.①复… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 108444 号

复变函数与积分变换
Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan

冯建中 主编

策划编辑：袁 冲
责任编辑：刘 静
封面设计：孢 子
责任监印：朱 玢
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编：430223
录 排：武汉正风天下文化发展有限公司
印 刷：武汉市籍缘印刷厂
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：13.25
字 数：336 千字
版 次：2017 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：29.00 元

前　言

复变函数与积分变换是运用复变函数的理论知识解决微分方程和积分方程等实际问题的一门基础课程，是现代科学技术的重要理论基础. 本书根据教育部高等院校复变函数与积分变换课程的基本要求，依据工科数学复变函数与积分变换教学大纲，并结合本学科的发展趋势，在积累多年教学实践的基础上编写而成. 复变函数具有严谨且系统的理论体系，在应用方面有着独到的作用，它既能简化计算，又能体现明确的物理意义，在许多领域有广泛应用，如电气工程、通信与控制、信号分析与图像处理、流体力学、地质勘探与地震预报等工程技术领域等. 通过本课程的学习，不仅可以掌握复变函数与积分变换的基础理论及工程技术中的常用数学方法，同时还可以为后续有关课程的学习奠定必要的数学基础.

基于全国高等院校普遍压缩学时的大环境，本书利用有限的学时对复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等内容做了较为系统的介绍. 基本概念的引入尽可能做到深入浅出，突出其物理意义；基本理论的推导循序渐进，适合工科专业的特点；基本方法的阐述简洁明了，富有启发性，以期达到培养学生创新能力的目的. 为了使学生更好地理解复变函数的方法与应用，提高学生掌握教学内容并提升自身实际应用的能力，我们选择了较多的典型例题. 本书内容较多，但采用不同编排方法，以适应不同的专业和学校、不同的学时要求. 本书可以适用于 32～48 学时等不同层次的教学要求.

本书是作者多年教学的一些心得体会，由冯建中任主编，李小飞、朱智慧、胡中波任副主编. 其中第 1、3、4、7、8 章由冯建中编写；第 5 章由李小飞编写；第 2 章、本书的大部分习题采集和整理及部分图稿由朱智慧完成；第 6 章由胡中波编写. 全书由长江大学何先平教授和赵天玉教授主审，由冯建中统稿. 在审稿过程中，赵教授身体有恙仍坚持通读全部书稿，提出了很多中肯的、建设性的修改意见，向两位审稿教授表示敬意与谢忱，并预祝赵教授早日康复. 在编写的过程中我们得到了长江大学教务处的大力支持与资助，长江大学信息与数学学院各位同人对本书的完成做出了很大的贡献，在此表示衷心感谢. 本书引用了参考文献中的众多内容以及例题、习题，在此谨向各位作者表示感谢.

本书写作期间，恰逢 2017 年春节，河南老家的父亲已是恶性肿瘤晚期，含着眼泪将父母接到荆州，一起度过这说不清味道的新春佳节. 本书完成之时，父亲已在天国. 父爱如山，愿父亲一路走好，天堂没有病痛！

限于作者自身水平，书中疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者不吝赐教并批评指正，以期日后进一步修改完善.

编　者

2017 年 2 月于长江大学

目　　录

第1章 复数与复变函数

我们将要讨论的复变函数论是单复变函数的理论，有人称之为解析函数论，又因为复变函数是高等数学中的一元实变函数的推广，其自变量和因变量均取复数，是变动的矢量间相互联系规律的表现，所以也有人把它称为复分析. 本章中我们首先对复数及其运算性质有一个清晰的认识，再介绍复数的各种表示方法及平面点集的一般概念和复数表示，然后将极限与连续性等概念推广到复变函数，为进一步学习解析函数论奠定必要的基础.

1.1 复数的概念及运算

1.1.1 复数及其代数运算

复数是出于解代数方程的需要而提出的. 1484 年法国的舒开(Chuque)首先提出了一种天才的猜测 —— 每个代数方程都应该有根. 1545 年意大利数学家卡尔丹诺(Cardano)在解标准的二次方程 $x^2-10x+40=0$ 时首次引入了复数，他认为该方程的两个根可以写为 $x_1=5+\sqrt{-15}$ 和 $x_2=5-\sqrt{-15}$. 而我们知道二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内显然无根，为此规定一个新数 i 满足方程 $x^2+1=0$，这个数称为虚数单位并有 $\mathrm{i}^2=-1$，这样方程 $x^2+1=0$ 就有两个根 i 和 $-$i. 又经过达朗贝尔、棣莫弗、欧拉、笛卡儿等人的不懈工作，最后由高斯给出了复数的正式定义.

对于任意两个实数 x,y，我们称 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数，x 和 y 分别称为 z 的实部和虚部，分别记作 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$.

如果 $\mathrm{Im}(z)=0$，则 z 可以看成一个实数；如果 $\mathrm{Im}(z)\neq 0$，那么 z 称为一个虚数；如果 $\mathrm{Im}(z)\neq 0$，而 $\mathrm{Re}(z)=0$，则称 z 为一个纯虚数. 因此，实数集是复数集(全体复数构成的集合)的一个子集，复数集是实数集的扩充.

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等是指它们的实部与虚部分别相等. 一个复数 z 等于 0，必须它的实部和虚部同时为 0. 与实数不同，一般来说，任意两个复数不能比较大小.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法、减法及乘法定义如下：

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2), \tag{1.1.1}$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.1.2}$$

并分别称以上两式右端的复数为复数 z_1 与 z_2 的和、差与积.

显然，当 z_1 与 z_2 均为实数时，分别依据上述运算法则与实数的相应运算法则求得的结果一致，并可验证，与实数类似，复数的运算也满足：

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$；$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；

(2) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$；$z_1\cdot(z_2z_3)=(z_1z_2)\cdot z_3$；

(3) $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

这表明复数的运算规律(交换律、结合律、分配律)与实数的运算规律是一样的.由此可以推知,从这几条规律所推演出来的一切代数恒等式,无论它的数字形式是复数形式还是实数形式,结果都同样成立.例如：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}),$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k},$$

等式中的 a 与 b 同时取复数,原式仍成立.

我们又称满足

$$z_2z=z_1(z_2\neq 0)$$

的复数 $z=x+iy$ 为 z_1 除以 z_2 的商,记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$,利用式(1.1.2)可知：

$$x_1+iy_1=(x_2+iy_2)(x+iy)=(xx_2-yy_2)+i(xy_2+x_2y).$$

由两个复数相等的定义,可以得到

$$x_1=xx_2-yy_2,y_1=xy_2+x_2y,$$

由此解得

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

所以

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.1.3}$$

实部相等而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数,记复数 $z=x+iy$ 的共轭复数为 $\overline{z}=x-iy$.

共轭运算具有下列性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$,$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$,$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $\overline{\overline{z}}=z$；

(3) $z\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=x^2+y^2$；

(4) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)=2x$,$z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)=2iy$.

例 1.1　已知 $z=\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}+2i^{-15}$,求其实部与虚部及 $\overline{z}$.

解
$$z=\frac{-i}{i(-i)}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{2\cdot i}{i^{15}\cdot i}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

故 $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2}$,$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{1}{2}$,$\overline{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

例 1.2　试确定等式 $(3-6i)x+(5+9i)y=6+7i$ 中的实数 x,y.

解　原式化简为：$(3x+5y)+(-6x+9y)i=6+7i$.由复数相等知：

$$\begin{cases} 3x+5y=6, \\ -6x+9y=7. \end{cases}$$

解此二元方程组得

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}, \\ y=1. \end{cases}$$

例 1.3 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证 $$\begin{aligned} z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 &= (x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)+(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-y_1x_2) \\ &= 2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}). \end{aligned}$$

或者

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

同样的思想也可证明：

$$z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2}).$$

1.1.2 复数的几何表示

在一平面上取定一个笛卡儿直角坐标系，设其原点为O，二坐标轴为Ox 与Oy（见图 1.1），则任意一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 便可以由一对有序实数(x,y)唯一确定，所以复数的全体与该平面上点的全体就构成一一对应关系，从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为(x,y)的点来表示，这是复数的一种常用表示方法. 此时 Ox 轴称为实轴，Oy 轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面 C 或 z 平面. 复平面赋予了复数直观的集合意义，它建立了“复数”和“复点”的联系，以后我们不去区分“复数”和“复点”，例如复数 $2+3\mathrm{i}$，我们常说成复点 $2+3\mathrm{i}$，反之亦然. 这种一一对应的关系，能让我们借助几何语言和方法来研究复变函数的问题，进而也为复变函数应用于实践奠定了良好基础.

由于点 $P(x,y)$ 与矢量$\overrightarrow{OP}$ 是一一对应的，所以任一复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 又可视为一个起点在原点、终点在点 $P(x,y)$ 的矢量，这是复数在复平面上的又一几何解释. 由于在很多实际应用问题中许多量都是矢量，所以复数的矢量表示的实际意义是明显的. 矢量$\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模（或绝对值）（见图 1.1），定义为：

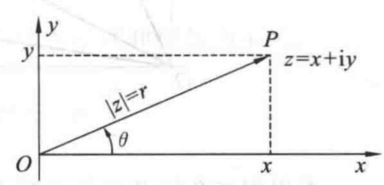


图 1.1

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然，关于模与共轭复数有：

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|,\ |z|=|\bar{z}|,\ z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

在 $z\neq0$ 的情况下，以正实轴为始边，以矢量$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角θ的弧度数称为复数 z 的辐角（见图 1.1），记作 $\mathrm{Arg}z$，这时有

$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\frac{y}{x}. \tag{1.1.4}$$

辐角具有多值性，任一非零复数 z 都有无穷多个辐角. 若 θ_1 是其中一个辐角，那么

$$\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi \quad (k\in\mathbf{Z}) \tag{1.1.5}$$

就是 z 的全部辐角. 在非零复数 z 的辐角中,把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\theta_0 = \arg z$;当 $z=0$ 时,辐角不确定.

辐角主值 $\arg z(z \neq 0)$ 可由反正切函数 $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按如下关系构造:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0, y\in\mathbf{R}. \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y>0. \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0, y>0. \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0, y<0. \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y<0. \\ \pi, & \text{当 } x<0, y=0. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

我们容易验证,由于复数与矢量之间的对应关系,两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的加减运算与对应矢量的加减运算一致,也可以用平行四边形法则或三角形法则求解.

由图 1.2 易见,矢量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 减去矢量 $\overrightarrow{Oz_2}$ 就是从点 z_2 到 z_1 的矢量,这个矢量所对应的复数就是 $z_1 - z_2$,也即 $\overrightarrow{z_2z_1} = \overrightarrow{Oz_1} - \overrightarrow{Oz_2} = z_1 - z_2$. $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 之间的距离,事实上,

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 - \mathrm{i}y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

这正是平面上两点欧几里得距离的表达式.

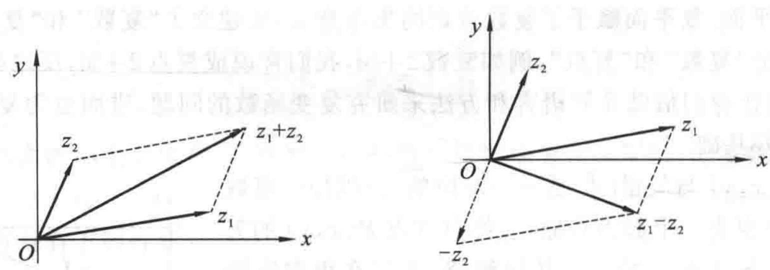


图 1.2

再根据三角形两边长之和大于第三边,两边长之差小于第三边的法则,可以得到关于复数模的三角不等式:

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|; \tag{1.1.7}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1.1.8}$$

在复平面 C 上,共轭复数 $\bar{z}$ 与 z 关于实轴对称,因而 $|z| = |\bar{z}|$. 若 z 不在负实轴上且不为零,则有 $\arg z = -\arg\bar{z}$.

1.1.3　复数的三角表示与指数表示

由极坐标与直角坐标的关系,我们可以得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角间的关系:

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\theta = \tan(\mathrm{Arg}z) = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \tag{1.1.9}$$

以及

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

于是复数 z 又可表示为

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.1.11}$$

这种表示形式称为复数 z 的三角表示式.

再利用欧拉(Euler) 公式

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

可以得到

$$z = re^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.12}$$

这种表示形式称为复数的指数表示式.

复数的各种表示形式可以互相转换,以适应不同问题讨论时的需要.若两复数的实部、虚部分别相等,则称这两复数相等,则可由式(1.1.9) 和式(1.1.10) 知两复数相等,这两复数的模相等,辐角可以相差 2π 的整数倍(若辐角都取主值,则应相等);反之,如果复数的模、辐角均对应相等,那么这两个复数必定相等.也就是说,一个确定的复数的标准三角表示式是唯一的.

例 1.4 将复数 $z = -\sqrt{12} + 2\mathrm{i}$ 化为三角表示式和指数表示式.

解 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{12})^2 + 2^2} = 4$,且复数 z 在第二象限,则

$$\arg z = \arctan\left(\frac{2}{-\sqrt{12}}\right) + \pi = -\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi = \frac{5}{6}\pi.$$

因此,z 的三角表示式为 $z = 4\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$,$z$ 的指数表示式为 $z = 4e^{\mathrm{i}\cdot\frac{5}{6}\pi}$.

例 1.5 将复数 $z = 1 + \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 化为三角表示式和指数表示式.

解
$$\begin{aligned} z = 1 + \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

且 $2\cos\frac{\theta}{2} > 0, 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$,满足复数三角表示中的模和辐角的要求,所以该复数三角表示式为 $2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right)$,指数表示式为 $2\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\theta}{2}}$.

利用复数的三角表示,我们可以更简单地表示复数的乘法与除法:设 z_1、z_2 是两个非零复数,并设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2), \tag{1.1.13}$$

则有

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

于是

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.1.15}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2, \tag{1.1.16}$$

即把两复数相乘，只要把它们的模相乘、辐角相加就可以了.

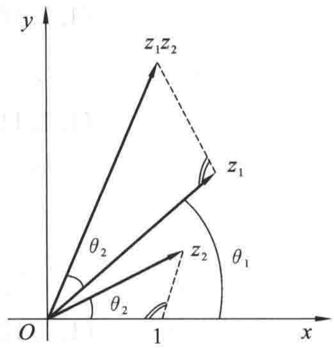


图 1.3

由此也可以得到两复数相乘的几何意义：当利用矢量来表示复数时，复数 z_1z_2 表示的矢量是将矢量 z_1 伸长（或缩短）$|z_2|$ 倍，然后再旋转 $\operatorname{Arg}z_2$ 得到的，如图 1.3 所示.

特别地，当 $|z_2|=1$ 时，乘法便只是旋转. 例如 $-\mathrm{i}z$ 相当于将 z 顺时针旋转90°，$-z$ 相当于将 z 逆时针旋转180°，这也与我们原先讨论的负矢量相对应；如果 $\arg z_2 = 0$ 时，乘法就便伸长（或缩短）.

值得注意的是，式(1.1.16) 应理解为集合相等. 利用数学归纳法，上述乘积运算可以推广到 n 个复数的情况. 假设 $z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}(k=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{aligned} z_1z_2\cdots z_n &= r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)} \\ &= r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

同理，对除法($z_2 \neq 0$)，有

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]. \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.1.19}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2, \tag{1.1.20}$$

即把两复数相除，只要把它们的模相除、辐角相减就可以了.

例 1.6　化简 $\dfrac{(2+2\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}$.

解　因为

$$2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta = \cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta),$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\mathrm{i}\sin\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)[\cos(-\theta-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta-\theta)] \\ &= 2\mathrm{i}(\cos2\theta-\mathrm{i}\sin2\theta). \end{aligned}$$

例 1.7 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + \mathrm{i}$,求它的另一个顶点.

解 所求顶点可以认为是在矢量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 基础上绕点 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}\left(\text{或者} -\frac{\pi}{3}\right)$ 所得矢量的终点 z_3(或 z'_3),如图 1.4 所示.

根据复数乘法的几何意义,可得

$$\overrightarrow{z_1 z_3} = \overrightarrow{z_1 z_2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$$

也即

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = (1 + \mathrm{i})\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

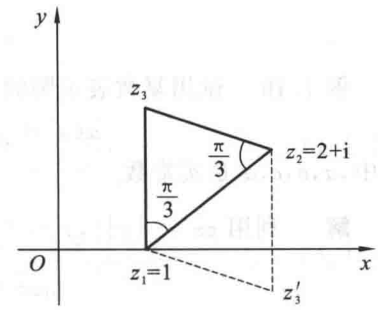


图 1.4

所以

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

同理可求

$$z'_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 1.8 设 z_1、z_2 是两个复数,求证:

(1) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$;

(2) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

证 (1)
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}). \end{aligned}$$

(2) 由(1)得:
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \\ &\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

然后两边进行开方运算,即可证 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ 成立.

1.1.4 复数的几何意义与复球面

复数及其各种运算的几何意义主要用于以下几个方面:一是很多平面图形能利用复数形式的方程或不等式来表示;二是可通过给定的复数形式的方程或不等式来确定它所表示的平面图形的特征;三是可以利用复数的具体几何意义来证明一些几何命题.

例 1.9 求通过两点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的直线方程.

解 过 (x_1, y_1),(x_2, y_2) 的直线参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), & (1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1). & (2) \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

(1) + i × (2) 可得

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (-\infty < t < +\infty).$$

通过 z_1 和 z_2 的直线方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

由此例中 z_1 和 z_2 的直线的复数形式的参数方程可知，平面上三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件为

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = t \quad (t \in \mathbf{R}).$$

例 1.10 试用复数表示圆的方程：

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (a \neq 0),$$

其中，a, b, c, d 是实常数.

解 利用 $z\bar{z} = |z|^2, x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}, y = \dfrac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$，代入方程得

$$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma\bar{z} + d = 0 \quad (a \neq 0).$$

其中，$\beta = \dfrac{1}{2}(b - \mathrm{i}c), \gamma = \dfrac{1}{2}(b + \mathrm{i}c)$.

例 1.11 方程 $|z + \mathrm{i}| = 2$ 表示什么曲线？

解 由解析几何知，方程表示动点 z 到定点 $-\mathrm{i}$ 的距离恒为 2，故它表示的是一个圆：以点 $(0, -1)$ 为圆心，以 2 为半径，即 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$. 也可设 $z = x + \mathrm{i}y$，易得该方程的直角坐标形式为

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

例 1.12 证明三角形内角和等于 π.

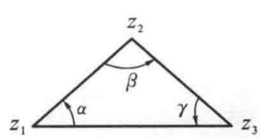


图 1.5

证 设三角形三个顶点分别为 z_1, z_2, z_3，对应的三个顶角分别为 α, β, γ（见图 1.5）. 则

$$\alpha = \arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1},$$

$$\beta = \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2},$$

$$\gamma = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3},$$

且

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = -1.$$

根据复数乘法的几何意义

$$\arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} + \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg(-1) + 2k\pi \quad (k \text{ 为某个整数}).$$

由于三角形内角要求 $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi, 0 < \gamma < \pi$，所以

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

故 $k = 0$，因而 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

复数除了可以用复平面上的点或矢量表示外，还可以用球面上的点来表示. 该方法是借用地图学中将地球投影到平面上的测地投影法，建立复平面与复球面上点与点之间的一一对应关系，并引入无穷远点.

在点坐标是 (x, y, u) 的三维空间中，把 xOy 面看作就是 $z = x + \mathrm{i}y$ 面. 考虑球面 S：

$$x^2+y^2+u^2=1,$$

取定球面上一点 $N(0,0,1)$，称为球的北极. 作连接 N 与 xOy 面上任一点 $P(x,y,0)$ 的直线，设该直线与球面的交点是 $P'(x',y',u')$，且称 P' 为 P 在球面上的球极射影(见图 1.6). 利用 P，P'，N 三点共线，我们有

$$\frac{x-0}{x'-0}=\frac{y-0}{y'-0}=\frac{0-1}{u'-1}, \tag{1.1.21}$$

再利用

$$|z|^2=x^2+y^2=\frac{(x')^2+(y')^2}{(1-u')^2}=\frac{1+u'}{1-u'}, \tag{1.1.22}$$

于是有

$$x'=\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1},\quad y'=\frac{z-\bar{z}}{|z|^2+1},\quad u'=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \tag{1.1.23}$$

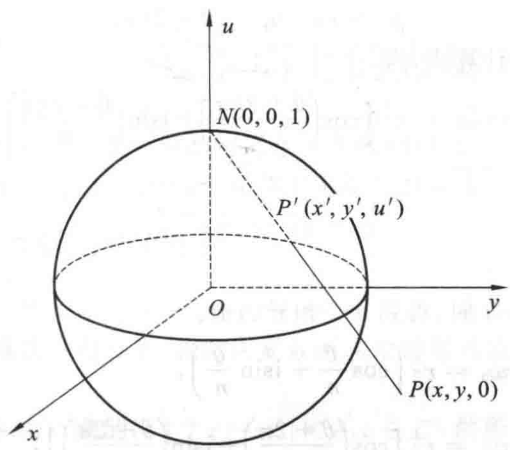


图 1.6

这样我们可以建立一个复平面 C 与 $S-\{N\}$ 之间的一一对应关系. z 的模越大，那么它的球极射影就越接近于球的北极 N. 由于球上只有一个北极 N，我们约定复平面上有一个理想或者非正常的点，称为无穷远点，记为 ∞，它的球极射影为北极 N，并称 $C\cup\{\infty\}$ 为扩充复平面，记为 C_∞. 不包括无穷远点的复平面 C 称为有限复平面，以后若没有特意说明，我们所说的复平面都是有限复平面.

关于 ∞，其实部、虚部、辐角无意义，模等于 $+\infty$。它的基本运算为

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty,$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\quad(a\neq 0),$$

$$\frac{a}{0}=\infty\ (a\neq 0),\ \frac{a}{\infty}=0\ (a\neq\infty),$$

其中，a 为有限复数.

1.1.5　复数的乘幂与方根

利用复数的三角表示，我们也可以考虑复数的乘幂：设 $|z|=r$，$\mathrm{Arg}z=\theta$，则

$$z^n=|z|^n(\cos n\mathrm{Arg}z+\mathrm{i}\sin n\mathrm{Arg}z)=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.1.24}$$

特别是当 $r=1$ 时，即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时，由上式有