高等数学习题册

（上）

主 编 陈永强 张 华
副主编 王晓玲 张 玲 孟媛媛

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学习题册（上）

主　编　陈永强　张　华
副主编　王晓玲　张　玲　孟媛媛

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

“高等数学”是大学教育的一门重要基础课程．为了方便学生迅速而全面地掌握和巩固本课程的基本概念和基本解题方法，为有能力进一步深入学习的学生提供帮助，同时也为方便教师布置、收发作业，我们编写了这本习题册．本习题册与同济大学数学系编写的《高等数学》第七版相配套，本书分上、下两册出版．上册内容包括：一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程．下册内容包括：空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分和无穷级数．

本习题册适用于各类普通高等院校及相关专业（非数学专业）的在校学生．希望本习题册能够为大学生掌握“高等数学”课程的知识提供一条有效的途径．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题册．上/陈永强，张华主编．—天津：天津大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5618-5654-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈…②张… Ⅲ.①高等数学－高等学校－习题集 Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 206745 号

出版发行　天津大学出版社
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
电　　话　发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
网　　址　publish.tju.edu.cn
印　　刷　天津泰宇印务有限公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　210mm×297mm
印　　张　9
字　　数　306 千
版　　次　2016 年 8 月第 1 版
印　　次　2016 年 8 月第 1 次
定　　价　17.50 元

前　　言

本习题册与同济大学数学系编写的《高等数学》第七版相配套，本书分上、下两册出版．上册内容包括：一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程．下册内容包括：空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分和无穷级数．

本习题册有如下特点．

(1)以同济大学数学系编写的《高等数学》第七版的章节为顺序，旨在方便学生和任课教师对本习题册的使用．我们在每一节中配备了适量的基本题，供任课教师向学生布置作业使用，目的是帮助学生迅速、全面地掌握高等数学课程的知识和解题方法．本习题册还提供了三套模拟考试题，以帮助学生做好期末复习．

(2)本习题册的独特之处是在每一章后配备了难度梯度明显的三套自测题：第一套是基本题；第二套是提高题；第三套是考研和竞赛题，供不同学习要求的学生使用．

(3)以活页的形式为学生布置作业，一方面有利于学生做到作业规范，便于教师批改，另一方面有利于减轻学生抄写作业题的负担，同时也便于作业的收、发以及保留整理，利于期末复习．

本习题册是对高等数学课程教学改革的一次尝试，希望本习题册能对学生学习过程中"作业"这一环节做出有益的探索，为高等院校的教师和学生提供切实有益的帮助．

本习题册(上)由天津城建大学五位教师共同编写而成，其中函数与极限部分由张玲编写，导数与微分以及定积分的应用部分由陈永强编写，微分中值定理与导数的应用部分由王晓玲编写，不定积分与定积分部分由张华编写，微分方程部分由孟媛媛编写，书后附有三套模拟考试题由张华编写．全书由陈永强统稿和编辑、张华核对．

由于编写水平有限，错误在所难免，恳请读者不吝指正，编者不胜感激．

《高等数学习题册(上)》编写组

2016 年 7 月

目　录

函数与极限——映射与函数

一、填空题

1. 设$f(x)=ax+b$,则$\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$＿＿＿＿＿＿.

2. 若$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,则$f[f(x)]=$＿＿＿＿＿＿,$f\{f[f(x)]\}=$＿＿＿＿＿＿.

3. 函数$y=\sqrt{1-e^{-x}}$的定义域为＿＿＿＿＿＿,值域为＿＿＿＿＿＿,它的反函数为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

4. 函数$f(x)=\begin{cases} x-3, & -4\leqslant x\leqslant 0, \\ x^2+1, & 0<x\leqslant 3 \end{cases}$ 的定义域是＿＿＿＿＿＿.

5. 函数$y=x\cos x+\sin x$的奇偶性是＿＿＿＿＿＿.

二、选择题

1. 下列各组函数中,$f(x)=g(x)$的是(　　).

(A)$f(x)=\sqrt{x^2}$,$g(x)=x$　　(B)$f(x)=\ln x^2$,$g(x)=2\ln x$

(C)$f(x)=\ln x^3$,$g(x)=3\ln x$　　(D)$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$,$g(x)=x-1$

2. 设函数$f(x)$的定义域是实数集$\mathbb{R}$,则函数$f(x)\cdot f(-x)$是(　　).

(A)有界函数　(B)周期函数　(C)奇函数　(D)偶函数

3. 函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内(　　).

(A)有上界无下界　　(B)有下界无上界

(C)有界,且$-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$　　(D)既无上界又无下界

4. 设$f(x)$的定义域为$(0,1]$,则$f(\sqrt{1-x^2})$的定义域为(　　).

(A)$(0,1]$　(B)$(-1,0]$　(C)$[-1,1]$　(D)$(-1,1)$

5. 设$[x]$表示不超过x的最大整数,则$y=x-[x]$是(　　).

(A)无界函数　(B)周期为1的周期函数　(C)单调函数　(D)偶函数

三、解答题

1. 求 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数．

2. 设 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}\ (0\leqslant x<+\infty)$，证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界．

3. 下列函数是由哪些基本初等函数复合的?(要求写出具体的复合结构，如 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=\varphi(x)$ 等．)

(1) $y=\sin^3\dfrac{1}{x}$．

(2) $y=2^{\arcsin x^2}$．

(3) $y=\ln[\ln(\ln\sqrt{x})]$．

(4) $y=\arctan \mathrm{e}^{\cos x}$．

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，试写出 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的表达式．

函数与极限——数列的极限

一、选择题

1. “对任意给定的 $\varepsilon>0$(无论 ε 多么小),总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

(A)充分条件　(B)必要条件　(C)充要条件　(D)既非充分又非必要条件

2. 数列 $\{x_n\}$ 收敛是 $\{x_n\}$ 有界的(　　),数列 $\{x_n\}$ 有界是 $\{x_n\}$ 收敛的(　　).

(A)充分条件　(B)必要条件　(C)充要条件　(D)既非充分又非必要条件

3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0$,那么存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有(　　).

(A) $x_n>0$　(B) $x_n\geqslant 0$　(C) $x_n<0$　(D) $x_n\leqslant 0$

4. 如果从某项起有 $x_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则(　　).

(A) $a>0$　(B) $a\geqslant 0$　(C) $a=0$　(D)以上都不正确

5. 下列数列中发散的是(　　).

(A) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$　(B) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$　(C) $\{(-1)^{n+1}\}$　(D) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$

6. 下列数列中收敛的是(　　).

(A) $\{3^n\}$　(B) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$　(C) $\{\sin n\}$　(D) $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}$

7. 下列断言正确的是(　　).

(A)有界数列必收敛　(B)无界数列必发散

(C)发散数列必无界　(D)以上都不正确

二、计算题

1. 设 $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]$.

* 三、证明题

1. 根据数列极限的定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

2. 设数列$\{x_n\}$有界,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$.

函数与极限——函数的极限

一、填空题

1. 设$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0, \\ ax+b, & x>0, \end{cases}$ 则$f(0^-)=$____，$f(0^+)=$______，当$b=$____时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$．

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=$__________，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=$__________，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$__________．

3. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$，则函数$y=\dfrac{1+x^3}{2x^3}$图形的水平渐近线是______________．

二、选择题

1. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(常数)，则$f(x)$在点$x_0$处(　　)．

(A)一定无定义　　(B)一定有定义

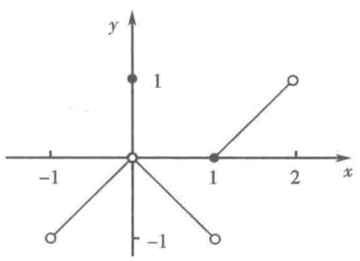
(C)有定义，且$f(x_0)=A$　　(D)可以有定义，也可无定义

2. 对下面图示的函数$f(x)$，$x\in(-1,2)$，下列陈述正确的是(　　)．

(A)(1)(5)正确　(B)(2)(4)(6)正确　(C)(2)(5)(6)(7)正确　(D)(3)正确

(1)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在；(2)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；(3)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$；(4)$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$；

(5)$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在；(6)$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$；(7)对任意$x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在．



3. 下列结论正确的是(　　)．

(A)在某变化过程中，若$f(x)$有极限，$g(x)$无极限，则$f(x)g(x)$必无极限

(B)若$f(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$A>0$

(C)若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$

(D)若$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

三、已知$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ x+1, & x<0, \end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

* 四、根据函数极限定义证明$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

* 五、已知$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,证明$\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=|A|$,并举例说明反之不成立 .

函数与极限——无穷小与无穷大

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 =$ ＿＿＿＿＿, $\lim\limits_{x\to\infty} x^5 =$ ＿＿＿＿＿.

2. $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2} =$ ＿＿＿＿＿, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2} =$ ＿＿＿＿＿.

3. $\lim\limits_{x\to0^+} 2^{\frac{1}{x}} =$ ＿＿＿＿＿, $\lim\limits_{x\to0^-} 2^{\frac{1}{x}} =$ ＿＿＿＿＿, $\lim\limits_{x\to0} 2^{\frac{1}{x}}$ ＿＿＿＿＿.

4. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan x =$ ＿＿＿＿＿, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x =$ ＿＿＿＿＿.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x =$ ＿＿＿＿＿, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x =$ ＿＿＿＿＿, $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ ＿＿＿＿＿.

二、选择题

1. 无穷小是(　　).

(A)比零稍大一点的一个数　　(B)一个绝对值很小的数

(C)以零为极限的一个变量　　(D)数零

2. 无穷大与有界变量的关系是(　　).

(A)无穷大可能是有界量　　(B)无穷大一定不是有界量

(C)有界量可能是无穷大　　(D)不是有界量就一定是无穷大

3. "当 $x\to x_0$ 时 $f(x)-A$ 是无穷小"是"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$"的(　　).

(A)充分条件　　(B)必要条件　　(C)充要条件　　(D)既非充分又非必要条件

4. 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, 下列极限成立的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　(B) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

三、求下列极限.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$.　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4}{x^3 + 5}$.

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

四、求函数 $f(x) = \dfrac{4}{2 - x^2}$ 图形的铅直渐近线.

* 五、根据定义证明:当 $x \to 0$ 时 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小.

函数与极限——极限运算法则

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x=0$ 的根据是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^2+bn+5}{3n-2}=2$，则 $a=$＿＿＿＿＿，$b=$＿＿＿＿＿.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$＿＿＿＿＿＿.　4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=$＿＿＿＿＿.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=$＿＿＿＿＿＿.　6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^2(3x+2)^3}{(5x+1)^5}=$＿＿＿＿＿.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x=$＿＿＿＿＿＿.　8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=$＿＿＿＿＿.

二、选择题

1. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$均存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$(　　).

(A)存在　(B)不存在　(C)不一定存在　(D)存在但非零

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则下列断言正确的是(　　).

(A)仅当$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 时，才有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$

(B)当 $g(x)$ 为任意函数时，有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$

(C)当 $g(x)$ 为有界函数时，有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$

(D)仅当 $g(x)$ 为常数时，才能使$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$ 成立

3. 下列断言正确的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2}=\infty-\infty=0$

(B)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0$

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}(u_nv_n)=0$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 或者$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$

(D)$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$

三、求下列极限．

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$．

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)}{n^2}$．

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \arctan x}{x + \arctan x}$．

4. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$．

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5x - 4} - \sqrt{x}}{x - 1}$．

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{\sqrt{1 + x^2}} \arctan \dfrac{1}{x}$．

函数与极限——极限存在准则　两个重要极限

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}=$＿＿＿＿＿＿.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$＿＿＿＿＿＿.

3. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$＿＿＿＿＿＿.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$＿＿＿＿＿＿.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=$＿＿＿＿＿＿.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=$＿＿＿＿＿＿($k$为正整数).

二、选择题

下列断言正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,且$n\leqslant 100$时$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$;$n>100$时$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(B)若数列单调,则数列必收敛

(C)数列收敛的充分必要条件是数列单调有界

(D)若数列有界,则数列必收敛

三、求下列极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin(\sin x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.