理工社

2018
升级版

考研数学

概率论与数理统计必修8课

主编 方浩

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学
概率论与数理统计
必修8课

主编 方 浩

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学概率论与数理统计必修8课 / 方浩主编. —北京：北京理工大学出版社，2017.2

ISBN 978-7-5682-3665-2

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①方…　Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第023280号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京盛彩捷印刷有限公司
开　　本 / 710毫米×1000毫米　1/16
印　　张 / 15
字　　数 / 380千字
版　　次 / 2017年2月第1版　2017年2月第1次印刷
定　　价 / 29.80元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

《概率论与数理统计》是研究生入学考试数学试卷中的重要学科，这门课的特点是深入浅出，向我们介绍了概率统计的观点、方法、模型，给我们提供了丰富的、自由发挥想象的空间。但本课程的应用性非常突出，即紧密的围绕着独立性与不相关性的判别方法，以及基于此条件推广出的大数定律、中心极限定理、点估计、假设检验等重要而实用的话题。因此围绕深入浅出的主题，特编写此书以帮助同学们快速、高效、精准的复习这门课程，此书的特点可以归纳如下：

1. 基本原理部分给出详细的分析、解释以及实例，以帮助读者理解这些定理的重要程度、研究的问题以及主旨。定理的证明本书较少给出，主要是因为这部分并非考试的方向，不会直接涉及。让读者在有限的时间内理解它的意义，抓住应用方向则是重点.

2. 解题方法部分给出了系统性的归纳和总结，例如多维随机变量部分应用卷积公式解决“连续—连续”混合随机变量，运用全概率公式与几何图像快速计算“连续—离散”混合型随机变量，本书对他们使用的条件、思路、注意事项给出了全面而系统性的总结，清晰而易懂.

3. 例题精讲部分列举了每个章节中最常考、最可能考的例题，“从真题中来，到真题中去”是例题部分的编写思路，即按照历年真题命题思路将重要定理和公式的应用体现在例题中，以加强同学们对这些公式的理解。为了突出重点，本书亦选用部分近年考试中的真题进行讲解，以加深印象.

4. 练习题部分给出了在多年概率统计授课中重点讲解的习题，他们的特点是灵活、计算量适中、对概念的理解程度要求较高、部分习题难度略高于真题。适合读者在暑期强化阶段实战练习，以及在考前参照笔记自己进行归纳总结。此部分的多数习题也将在本书配套的数学强化班课程里面讲解.

此门课程是研究生入学考试三门数学课中相对较简单的一门，不需要耗费过多的精力。只要读者们按照理解应用、剖析真题、归纳总结、灵活变通四个要求来进行复习，我相信可以在较短的时间内完全掌握此门课程，并且获取高分甚至满分。希望读者朋友们举重若轻、坚定信念，通读这必修的8课，概率统计的满分指日可待。

本书的解题方法和习题将在我讲解的考研数学基础班和强化班中反复体现，读者可以结合我的授课来更加深刻、快速的理解此书中的内容。

本书的编写过程中得到了我们教学团队的杨超老师、姜晓千老师的大力支持和诸多宝贵的意见，在本书修订过程中大连理工大学的马湘君老师和湖北工业大学的李家雄老师给出了大量的高价值含量的修改意见和思路，特此向以上诸位同仁表示衷心的感谢。

由于本人水平有限，以及编写和校对过程的疏忽，难免会出现错误，欢迎广大同学和同事给出批评和意见。我的新浪微博是：@方浩 Fellow，我的邮箱是：haofang@pku. edu. cn。

祝同学们考研成功，在新的起点上为科学和社会做出更新的，更大的贡献！

方　浩

2017 年 2 月于北京

目　录

第 1 课　随机事件和概率

导　语

本讲内容是概率论的基础理论与理论依据，在后面几讲中都有其具体的表现，毫不夸张地说，学好这一讲是在概率论试题上取得高分的前提.

大纲要求

本章是概率论中的第一章，是概率论的理论基础."随机事件"与"概率"是概率论中两个最基本的概念，"独立性"与"条件概率"是概率中特有的概念.

本章以随机事件的关系与运算为入门，讨论了随机事件.基于随机事件的理论基础，给出了概率的公理化定义和概率的计算公式，讨论了等可能概型(有限等可能概型为古典概型、无限等可能概型为几何概型)中随机事件的概率.加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式，以及贝叶斯公式是概率的五个基本公式，结合事件运算与概率的基本性质，可以解决不少随机事件概率的计算问题.伯努利公式适用于n次独立重复试验的n重伯努利概型，是区别于古典概型与几何概型的又一重要概率模型.

本章重点是事件的关系和运算，概率的性质(主要是计算性质)，条件概率，乘法公式，全概率公式，贝叶斯公式，事件独立性的概念和应用，独立重复试验(伯努利概型)的计算.

本章难点主要是较复杂事件的等价表示与全概率公式、贝叶斯公式等综合性公式的正确应用.

常考的题型有：全概率公式、贝叶斯公式有背景的应用(包括直接用"抽签原理")，利用概率的计算性质和条件概率的定义求概率(常为选择题)，伯努利概型的判断和计算等.虽然古典概型和几何概型要求略低，但往年也考查过几次.

本章的计算方法主要有两种：一种是概型法，即在特定的古典概型，几何概型与伯努利概型中应用公式直接计算事件的概率；一种是应用概率的性质与五个基本公式结合事件的等价表示间接计算事件的概率.

知识体系

- 随机事件与概率
  - 基本概念
    - 随机试验
    - 样本空间
    - 随机事件的关系及运算
      - 和、积、差、逆
      - 交换、结合、对偶等
  - 概率
    - 概念
    - 古典概型与几何概型
    - 计算公式：加法、减法、求逆公式
    - 条件概率
      - 乘法公式
      - 全概率公式和贝叶斯公式
  - 独立
    - 概念
    - 伯努利概型

1.1 考试内容分析

1.1.1 基本概念

1. 随机试验

如果试验满足下列性质：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确试验所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称该试验为随机试验，简称试验，常记为 E.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为样本空间，记为 Ω. 样本空间的元素，即随机试验每个可能的结果称为样本点或是基本事件，记为 ω

3. 随机事件

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件，简称事件，常记为 A,B,C 等；若一次试验结果 $\omega \in A$ 则称事件 A 发生，若一次试验结果 $\omega \notin \Omega$，则称事件 A 没有发生.

4. 几个特殊事件

基本事件 ω：一个样本点组成的单点集.

必然事件 Ω:样本空间 Ω 包含所有样本点,是随机试验中必然发生的事件.
不可能事件 $\varnothing$:空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,在每次试验中都不发生.

1.1.2 事件的关系与运算

1. 包含、等价、对立、互斥关系

事件关系	语言描述	集合论中的表示	概率论中含义
包含	事件 A 包含于事件 B(或事件 B 包含事件 A)	$A \subset B$,(或 $B \supset A$) 即 $B = A \cup \overline{A}B$	事件 A 发生,则事件 B 一定发生
等价	事件 A 与事件 B 等价(或相等)	$A = B$	事件 A 发生,则事件 B 一定发生,反之亦然
对立	事件 A 的逆事件(或对立事件)	事件 A 不发生,记为 $\overline{A}$,$\overline{A} = \Omega - A$	事件 $\overline{A}$ 发生,当且仅当事件 A 不发生
互斥	事件 A 和 B 互不相容(或事件 A 和 B 互斥)	$A \cap B = \varnothing$	事件 A 与 B 不能同时发生

2. 和事件、积事件、差事件、对称差

事件运算	语言描述	集合论中的表示	概率论中含义
和	事件 A 与 B 的和(n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件)	$A \cup B$ 或 $A+B\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$	事件 A 与 B 至少有一个发生(n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生)
积	事件 A 与 B 的积	$A \cap B$ 或 AB	事件 A 与 B 同时发生
差	事件 A 与 B 的差	$A - B$,或 $A\overline{B}$ 即 $A-B=A\overline{B}=A-AB$,	事件 A 发生且事件 B 不发生

3. 事件的运算律

(1) 吸收律：若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B, AB = A$；

(2) 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$；

(3) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A(BC) = (AB)C$；

(4) 分配律：$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC), (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$；

(5) 德·摩根律(对偶律)：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

【考点强调】准确理解事件之间的关系，是掌握加法公式，减法公式，乘法公式的基础. 在求解事件概率时往往需要注意事件的关系，选择正确的概率计算公式. 该部分的内容常与 1.1.3 内容放在一起考查.

【例 1.1】设随机事件 A,B 满足 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，则下列选项中正确的是(　　)

(A) $A \cup B = \varnothing$　　　　(B) $A \cup B = \Omega$

(C) $A \cup B = A$　　　　(D) $A \cup B = B$

【分析与解答】本题考查的是随机事件的运算.

由于 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，利用德·摩根律得 $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B} = AB$，即

$$A \cup B = A \cup B \cup AB = (A \cup B) \cup \overline{(A \cup B)} = \Omega.$$

答案为(B).

【例 1.2】设 A,B 是任意两个随机事件，则 $(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}) =$ ________.

【分析与解答】

因为

$$\begin{aligned}
&(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}) \\
=&(\overline{A}A + AB + \overline{A}B + B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}) \\
=&(AB + \overline{A}B + B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}) \\
=&B(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}) \\
=&B\overline{A}(A+\overline{B}) \\
=&B\overline{A}A + B\overline{A}\,\overline{B} \\
=&\varnothing.
\end{aligned}$$

1.1.3　概率定义与性质

1. 概率的定义

设 E 是随机试验，Ω 是样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$.

(2) 规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性：设事件 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

2. 概率计算公式

(1) 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

特别地，若 A,B 是互不相容事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

若 $A_1,\cdots,A_n$ 是两两互不相容事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(2) 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

下面注意减法公式的几种形式：

当 $A\supset B$ 时，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

(当 $A\supset B$ 时，有 $P(B)\leqslant P(A)$，称此为概率的单调性)

当 $A\subset B$ 时，则 $P(A-B)=0$；

当 A,B 互不相容时，则 $P(A-B)=P(A)$.

(3) 求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

【考点强调】这类问题多以填空题、选择题的形式出现，只要充分利用事件的关系、运算律和概率的基本性质抓住本质公式，加以简单推导不难求解.

【例 1.3】设事件 A,B 互斥(互不相容)，则(　　)

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【分析与解答】本题考查的是事件互斥条件下的概率.

由于事件 A,B 互斥，则 $AB=\varnothing$，即得 $P(AB)=0$，事实上，本题没有说明事件 A,B 是否独立，所以选项(B)不能直接得到；同时事件 A,B 不一定是互逆事件，不能选(C)；对选项(A)，

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B),$$

不能计算出结果；对选项(D)，

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1.$$

故选(D).

【例 1.4】当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则下列结论正确的是

(A) $P(C)=P(AB)$　　(B) $P(C)=P(A\cup B)$

(C) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$　　(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

【分析与解答】

由于 $AB\subset C$，故

$$\begin{aligned}P(C)&\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&\geqslant P(A)+P(B)-1.\end{aligned}$$

即选(C).

1.1.4　古典概型与几何概型

1. 古典概型

随机试验的概率模型称为古典概型，如果随机试验满足下面条件：

(1) 只有有限个基本事件(样本点)；

(2) 每个基本事件(样本点)发生的可能性都一样.

对于古典概型，随机事件 A 的概率为：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件的个数 }n_A}{\Omega\text{ 中基本事件总数 }n}.$$

【例 1.5】袋中有 3 只红球，4 只黑球，2 只白球，从中任取 3 球，求取出的球为一只红球两只黑球的概率.

【分析与解答】袋中一共有 9 只球，从中取出三只，样本空间中一共有 C_9^3 个样本点；取出一只红球两只黑球为随机事件，包含 $C_3^1C_4^2$ 个样本点，故所求概率

$$p=\frac{C_3^1C_4^2}{C_9^3}=\frac{3}{14}.$$

2. 几何概型

随机试验的概率模型称为几何概型，如果随机试验满足下面条件：

(1) 样本空间(基本事件空间) Ω 是一个可度量的几何区域；

(2) 每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样，即样本点 ω 落入的某一可度量样本空间 Ω 的子区域 A 的可能性大小与 A 的几何度量成正比，而与 A 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中，如果 S_A 是样本空间 Ω 一个可度量的子区域，则事件 $A=$“样本点落入区域 S_A”的概率为

$$P(A)=\frac{S_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

【考点强调】(1) 古典概型与几何概型都有某种等可能性，或者说"均匀性". 两个概型的区别在于：几何概型的样本空间是无限(不可列)的，而古典概型的样本空间是有限的.

(2) 古典概型问题的主要计算工具是排列和组合，考试中考查古典概型往往与随机变量分布、数字特征等相结合；而几何概型问题的主要计算工具是用几何方法计算长度、面积等，计算过程有时会用到积分.

(3) 古典概型的难点在于正确选定样本空间，而几何概型难点在模型化即如何化为数学问题.

【例 1.6】在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

【分析与解答】本题考查的是几何概型.

设取正数 $x,y\in(0,1)$，由 (x,y) 所构成的点的全体为 Ω，其几何面积为 $S(\Omega)=1$.

记事件 A 为两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$，事件 A 构成的几何区域为图 1.1 中的阴影部分，其几何面积为

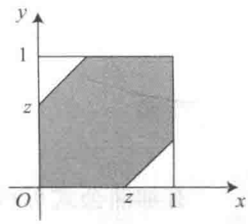

图 1.1

$$S(A)=1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

于是

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{3}{4}.$$

本题中事件的几何度量为二维平面区域的面积.

【注】做几何概型题关键是抓住几何测度函数，可以类比于二维随机变量中的均匀分布.

1.1.5 条件概率与乘法公式

1. 条件概率的定义

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为条件概率，记作 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

【考点强调】(1) 条件概率 $P(\cdot\,|A)$ 也是一种概率,概率的一切性质和结论对条件概率都适用;

(2) 计算条件概率 $P(B|A)$ 一般有两种方法:一种方法是按条件概率的含义,直接求出 $P(B|A)$,在求 $P(B|A)$ 时已知事件 A 已发生,样本空间 Ω 中所有不属于 A 的样本点都被排除,原有的样本空间 Ω 缩减成为 $\Omega' = A$. 在缩减了的样本空间 $\Omega' = A$ 中计算事件 B 的概率就得到 $P(B|A)$. 一种方法是在 Ω 中计算 $P(AB)$ 及 $P(A)$,再按条件概率的定义式求得 $P(B|A)$.

【例 1.7】 设 A,B 为随机事件,且 $P(B)>0,P(A|B)=1$,则必有(　　)

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

【分析与解答】 本题考查的是条件概率,采用公式法求解.

因为

$$1=P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

于是

$$P(AB)=P(B),$$

有加法公式可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A).$$

故选(C).

【例 1.8】 已知事件 A 发生必导致 B 发生,且 $0<P(B)<1$,则 $P(A\mid \overline{B})=$(　　)

(A) 0　　(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

【分析与解答】

方法一: 由题设知 $A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset \overline{A}\Rightarrow \overline{B}A=\varnothing$,

从而推知 $P(A\mid \overline{B})=0$. 故选(A).

方法二: $P(A\mid \overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A)}{P(\overline{B})}=0,$

故选(A).

2. **乘法公式**

若 $P(A)>0$,则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$,此公式称为乘法公式.

【推广】 一般地,设 $A_1,A_2\cdots A_n$ 为事件,$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1).$$

【考点强调】当事件 A_i 先于事件 A_{i+1} 发生，求事件 A_iA_{i+1} 发生的概率时用乘法公式.

【例 1.9】某厂的产品中有 4% 的废品，在 100 件合格品中有 75 件一等品，试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率.

【分析与解答】设 $A=\{$任取的一件是合格品$\}$，$B=\{$任取的一件是一等品$\}$.

因为所求的是在某厂的产品中任取一件，即样本空间是某厂的产品，因此这是属于 $P(AB)$ 问题，

由

$$P(A)=1-P(\overline{A})=96\%, P(B\mid A)=75\%,$$

可得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{96}{100}\cdot\frac{75}{100}=0.72.$$

1.1.6 全概率公式与贝叶斯公式

1. 完备事件组

设随机试验 E，样本空间 Ω，$A_1,\cdots,A_n$ 为 E 的一组事件，若满足

(1) $A_iA_j=\varnothing, 1\leqslant i\neq j\leqslant n$，

(2) $A_1\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

则称事件 $A_1,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分或称为样本空间 Ω 的一个完备事件组.

2. 全概率公式

设随机试验 E，样本空间 Ω，B 为 E 的随机事件，$A_1,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

【例 1.10】从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，求 $P\{Y=2\}$.

【分析与解答】本题考查的是全概率公式.

由题意可知，共有两个动作，分别依次取了两个数，而不知道第一次取得的是什么数，问第二次取数 2 的概率，这个问题需要讨论第一次取数的情况，即构成了一个划分 $\{X=1\}$，$\{X=2\}$，$\{X=3\}$，$\{X=4\}$，于是

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}=&P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}+\\&P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}+\\&P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&P\{X=4\}P\{Y=2 \mid X=4\}\\
&=\frac{1}{4}\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\
&=\frac{13}{48}.
\end{aligned}
$$

特别地，以事件 B 与 $\overline{B}$ 为一个划分，则全概率公式为

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \overline{B})P(\overline{B}).$$

3. 贝叶斯公式

设随机试验 E，样本空间 Ω，B 为 E 的随机事件，$A_1,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},j=1,2,\cdots,n.$$

【考点强调】(1) 全概率公式与贝叶斯公式经常一起考察，我们可以这样来理解这两个公式：

完成事件 B 需要经历两个步骤，

第一步是完成事件 A，有 n 种相互独立的途径 $A_j(1\leqslant j\leqslant n)$，

第二步是在完成 $A_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 的基础上完成 B；

所以全概率公式表示的是完成 B 的总的概率，而贝叶斯公式 $P(A_j\mid B)$ 指的是通过第一步完成 A_j 并在此基础上完成 B 的概率占总的完成 B 的概率的比例.

(2) 全概率公式与贝叶斯公式分为两个阶段：

全概率公式是求第二阶段某一结果的概率；而贝叶斯公式则是已知第二阶段的某一结果的概率，求第一阶段的某一结果的概率.

(3) 抓阄模型可以简化全概率公式，贝叶斯公式的本质是条件概率.

【例 1.11】某炮台有 3 门炮，第 1,2,3 门炮命中率分别为 0.4,0.3,0.5，3 门炮各发射一枚炮弹，如果恰有 2 门命中目标，求第 1 门炮命中目标的概率.

【分析与解答】本题考查的是两个事件的贝叶斯公式.

设 A 为 2 门炮命中目标，B 为第 1 门炮命中目标，于是

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \overline{B})P(\overline{B})},$$

其中 $P(B)=0.4,P(\overline{B})=0.6$.

事件 $A\mid B$ 为在第 1 门炮命中目标的条件下，2 门炮命中目标，即第 2 门和第 3 门炮仅有 1 门炮命中目标；

另一方面，事件 $A\mid \overline{B}$ 为第 1 门炮没有命中目标的条件下，2 门炮命中目标，即第