胡国专 著

SHUXUE FANGFALUN YU
DAXUE SHUXUE JIAOXUE YANJIU

数学方法论与大学数学教学研究

苏州大学出版社
Soochow University Press

数学方法论与大学数学教学研究

胡国专 著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论与大学数学教学研究 / 胡国专著. —苏州：苏州大学出版社，2016.12
ISBN 978-7-5672-1939-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①胡… Ⅲ.①数学方法一研究②高等数学一教学研究 Ⅳ.①O1-0②O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 298686 号

数学方法论与大学数学教学研究

胡国专 著

责任编辑 肖 荣

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号 邮编：215006)
丹阳市兴华印刷厂印装
(地址：丹阳市胡桥镇 邮编：212313)

开本 700 mm×1 000 mm 1/16 印张 13.5 字数 242 千
2016 年 12 月第 1 版 2016 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1939-7 定价：36.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址 http：//www.sudapress.com

序言

本书主要用微观的数学方法论，分别对化归与归纳、类比、联想、关系映射反演原则的 RMI 法则及数学模型的 MM 方法等主题进行论述；重点探讨了关系映射反演原则、MM 方法及其应用，并结合大学数学的教学实践探讨数学方法论的作用与做法，来佐证数学思想方法在问题解决中所起到的化难为易、化繁为简、化未知为已知的重要性与便捷性。本书着重以思想方法的分析带动数学知识的教学，在教学中真正做到把数学课讲活、讲懂和讲深，培养学生的数学素养，提高数学教学的效率。同时在数学方法论的视角下揭示数学美的精神，分析应用数学的美学方法；揭示数学中的辩证思想，分析应用数学的哲学思维方法。进一步探讨研究提高数学素质与数学教学效率的方法与途径，提出加强数学方法论的学习、教学，加强元认知的培养、训练是提高数学素质与数学教学效率的重要手段，是促进数学素质教育的有力抓手。学生的学习效果应是学生掌握知识的近期目标与学生获得发展的远期目标的统一，是全面推进素质教育、深化教育改革的关键所在，功在当代，利在千秋。

在撰写本书的过程中，笔者参阅了许多资料，在此对参阅的有关文献的作者或单位表示崇高的敬意与谢忱。本书的出版得到了同事的热情帮助，陈玉文老师和蒋国民老师对第 3、4、5 章的实例选择与应用做了深入研讨，对文章的架构与内容提出了宝贵建议，并校阅了书稿，在此向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平，书中难免有论述不全或不妥之处，敬请各位专家、读者批评赐教。

胡国专

2016 年 9 月

目录

第1章

数学方法论概述

法国数学家笛卡尔在其著作《方法论》中指出:“那些只是缓慢地前进的人,如果总是遵循正确的道路,可以比那些奔跑着然而离开正确道路的人走得更远,没有正确的方法,即使有眼睛的博学者也会像瞎子一样盲目摸索。”笛卡尔形象地说明了方法的重要性。事实上,每门学科都有它的方法论,数学也不例外,由于数学既是研究其他科学的强有力的工具,又是一门深深地影响着人们文化素质的重要学科,所以数学方法论的地位就显得特别重要。那么,什么是数学方法论?研究它的目的又是什么?

1.1 什么是数学方法论

笼统地讲,数学方法论就是关于数学方法的理论,那么,什么又是所说的“数学方法”?有的学者曾表达过这样的意见:数学方法不仅指数学的研究方法,而且也包括数学的学习方法和教学方法。另外,在科学方法论的有关著作中,我们又可以看到关于“数学方法”的如下解释:“把事物的状态、关系和过程用数学语言表达出来,进行推导、演算和分析,以形成对问题的解释、判断和预言。”就是提出、分析、处理和解决数学问题所采用的思路、方式、逻辑手段等概括性的策略,也就是从数学角度提出问题、解决问题(包括数学内部问题和实际问题)的过程中采用的各种方式、手段、途径等,其中包括变换数学形式。

通俗地讲,数学方法主要指应用数学去解决实际问题。数学方法具有以下三个基本特征:一是高度的抽象性和概括性;二是精确性,即逻辑的严密性及结论的确定性;三是应用的普遍性和可操作性。数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用,首先是提供简洁精确的形式化语言,其次是提供数量分析及计算的方法,最后是提供逻辑推理的工具。现代科学技术特别是计算机的发展,与数学方法的地位和作用的强化正好是相辅相成的。

徐利治先生在《数学方法论选讲》一书中提出,数学方法论是主要研究

和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明和创新等法则的一门学问。具体地说，数学方法论是以数学为工具进行科学研究的方法，即用数学语言表达事物的状态、关系和过程，经过推导、运算和分析，以形成解释、判断和预言的方法。此说法是当今数学教育界较为认可的阐述。

为什么研究数学方法论？从上述定义可以简明地回答，学习和研究数学方法论的目的无非是为了正确地认识数学，有效地运用数学以及更好地发展数学。任何一门学科都有其内在的发展规律，数学当然也不例外。从认识论角度看，数学是一种模式真理，这样的模式是客观存在的。另一方面，任何数学知识都来源于具体的现实原型，因此数学是人们从具体问题中抽象出来的模式，并且这样的模式是不断发展变化的。教师不仅要教会学生具体的基本数学知识及逻辑推理能力，而且还要教会学生如何发现数学、创造数学及应用数学。让学生学会数学的源与流，解决这样问题的钥匙就是学习和研究数学方法论。说到这里，有人可能会提出质疑：没有学习和研究过数学方法论的数学教师就不能教好学生了，就不能发明创造数学了？首先我们要解决一个问题：怎样才算教好学生？一般人认为：把所学的数学知识能融会贯通，考试考出好成绩就是教好学生了。这的确没错，教学目的之一就是教会学生所学基本知识和基本技能。真正教好学生的教师本身就对数学有其自己的特殊理解，也许他没有学过数学方法论，但他是合情推理的高手，是数学方法论专家。很多的数学方法论专家都是在数学界很有名望的数学家，这些数学家把自己从事研究工作的思想和方法总结出来，就形成了数学方法论的核心内容。例如，美籍匈牙利数学家波利亚的名著有：《怎样解题》《数学的发现》《不等式》与《数学与猜想》等；中国数学家徐利治的名著有：《数学方法论选讲》《数学方法论教程》《大学数学解题法诠释》与《徐利治论数学方法学》。再如，郑州大学原校长、国内外知名数学物理专家曹策问先生，他没有学过数学方法论，但他的教学方法得到了学生的一致赞赏。要知道点集拓扑学并不是多么容易理解的大学高年级课程，可是听过曹老师讲过这门课程的大学生在应聘工作时就讲这门课。这就说明，学生对这门课心里很有底，是真懂了。那么，曹老师是怎么把学生教懂的呢？他用了什么样的教学方法？这很值得我们探讨。另外，他创造发明的数学物理分支——非线性化方法，在国际上也是独树一帜的。他的学术报告不光内容丰富新颖，而且充满着数学哲理。这些他都是怎么做到的呢？究其原因应当是学习和研究数学达到一定程度后的体会，是知识的升华，升华的结果总结出来就丰富了数学方法论的理论。但对于大多数人来说，能体会到这样的程度是不容易的，甚至是不可能的，正是因为这样，人们才宣传他们

提炼出的数学思想方法。从数学的教学工作而言，数学方法论事实上是对数学教师提出了更高的要求，即不仅应进行具体数学知识的传授，而且也应注意对学生进行数学方法论方面的训练和培养。应当强调的是，在这两者之间存在着相辅相成的辩证关系。就数学教学活动而言，我们只有通过对数学思想方法的分析来带动具体数学知识的教学，才能把数学课“讲活”“讲懂”与“讲深”。所谓“讲活”，是指教师通过自己的教学活动让学生看到“活生生”的数学研究工作，而不是死的数学知识；所谓“讲懂”，是指教师应当帮助学生真正理解有关的数学内容，而不是囫囵吞枣、死记硬背；所谓“讲深”，则是指教师在教学过程中不仅要使学生能掌握具体的数学知识，而且也应当帮助学生领会内在的思想方法。另外，从数学方法论而言，只有与具体的数学知识的教学密切结合，并真正渗透于其中，才不会成为借题发挥、夸夸其谈、纸上谈兵的空头文章。总之，学习和研究数学方法论对提高数学教学质量、提高教师的数学教学与学术研究的水平将起到积极的作用。我们从事数学工作的人，亦即以数学为职业的“数学工作者”，其中包括数以万计的中学和大学的数学教师以及一些专职的科研工作者，为什么应该重视对数学方法论的研究呢？数学工作者总希望在数学科学中有所作为、有所创新，尤其是数学教师们总是希望能够多教出些有创造发明才能的学生来。时时渗透数学思想与方法的教学能够培养与造就数学悟性高的学生，使他们脱颖而出，特别有才能的学生有可能在青年时代就对数学有所突破，做出有创见性的贡献，在数学发展史上我们已经看到许多这样的先例。

1.2 宏观的数学方法论与微观的数学方法论

一般说来，关于数学发展规律的研究属于宏观的数学方法论。宏观的数学方法论可以撇开数学内在因素，而是通过对历史的考察揭示出数学发展的动力与规律。关于数学思想方法以及数学中的发现、发明和创新等法则的研究属于微观的数学方法论。现如今数学界较为一致的观点是：数学学习与数学教学分别属于数学学习论与数学教学论的范围，这两者与数学方法论及教学课程论等一起构成数学教育学的主要内容。数学方法主要指应用数学解决实际问题的方法，这里的实际问题也包括数学内部问题。由于其中的关键是构造相应的数学模型，因此也特别称为“数学模型方法”。数学模型方法应当被看成数学方法论的一个重要内容，但是数学方法论的研究又远远超出数学模型方法的范畴，特别是集中在数学内在的研究方法之上。至此，我们可以更为明确地提出微观的数学方法论的定义。着眼于数学工作者个人的研究活动，可以不考虑数学发展的外在推动力，专就数学

内部体系结构中的特定问题来进行分析研究，即集中在对数学的思想方法及数学发明创造的启发性法则的研究属于微观的数学方法论。本书主要讨论的是微观的数学方法论，主要从数学研究的角度去进行分析，同时也从数学方法论的角度探讨数学教学与数学学习的效率。

事实上，在不同的场合人们常以两种既有区别又有密切联系的含义来理解“数学方法”。例如，工程师会把它理解为数学模型方法与计算方法；科学工作者会把它理解为描述客观规律、进行定量分析的工具；数学研究人员则常常把它与“单纯形方法”“有限元方法”“差分方法”“优化方法”等专业方法有机联系；而数学教师又多半会把它看成是解题方法。对数学方法的不同理解反映了数学这一科学门类有应用广泛的特性。数学方法体系同数学学科本身一样是极为多元的，与此相应的是大量不同的关于数学方法的分类。数学方法可分为四个层次：

(1) 数学发展和创新的方法；

(2) 运用数学理论研究和表述事物的内在联系以及运动规律的方法；

(3) 具有一般意义的数学解题的方法；

(4) 特殊的数学解题方法。

上述四个层次中数学发展和创新的方法应属于宏观数学方法论的范畴，其余三个层次均属于微观数学方法论的范畴。

1.3 数学方法与数学思想

数学方法是指在提出问题、解决问题(包括具体数学问题和实际生活问题)的过程中，所采用的各种方式、技巧、手段、途径等。它是处理、探索、解决问题的工具，特点是比较具体、简单。数学方法往往和具体数学内容联系在一起，是解决各类数学问题的方法。数学方法主要有：① 概括与抽象。数学中的概念、定理等都具有高度的概括性与抽象性，许多实际问题都可概括、抽象成数学模型，利用数学方法求解数学模型，进而解决实际问题。② 归类与对比。将所学内容进行归类，相关部分做对比，这是数学学习中必不可少的一个环节。③ 分析与综合。任何一个题目的解答都是分析与综合的过程，只不过有些分析过程在头脑中一闪而过，人们没有注意到罢了，看似只有综合的解答过程，其实是分析与综合相结合的。④ 辩证方法。如有限与无限、一般与特殊、曲与直、数与形、正与反等，都是辩证统一的方法。⑤ 变换方法。即通过恰当的转换，使问题由烦琐变简便，由困难变容易，最终得以解决。⑥ 逻辑演绎法。严谨的、简短的逻辑语言是数学的特色，也正是数学的魅力。还有观察、实验、合情推理、逆向思维等容易被忽略

的方法。

按影响的程度分，数学方法可分成三个层次。第一，基本的和重大的数学方法，这是一些哲学范畴的数学侧面，如模型化方法、概率统计方法、拓扑方法等。第二，与一般科学相应的数学方法，如联想类比、综合分析、归纳演绎等。第三，数学中特有的方法，如数学等价、数学表示、公理化、关系映射反演、数形转换等。按作用的范围分，数学方法可分为三个不同的层次。第一，一般的逻辑方法，如分析、综合、类比、联想、归纳、演绎、猜想等，它们不仅适用于数学，而且适用于其他学科领域。第二，全局性的数学方法，如极限方法、关系映射反演方法、数学模型方法等，这些方法的作用范围广，有的甚至影响着一个数学分支和其他学科的发展方向。第三，技巧性的数学方法，如换元法、待定系数法、配方法等。数学方法还可以按运用的功能分为数学发现方法、数学计算方法与数学证明方法等。

数学思想是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人们的意识之中，经过思维活动而产生的结果。数学思想是对数学事实与理论概括后产生的本质认识。数学思想是数学中处理问题的基本观点，是对数学内容的本质概括。数学思想是从数学方法中提炼出来的，是解决数学问题的指导方针。其特点是较为抽象，属于较高层次。钱佩玲教授在《数学思想方法与中学数学》中指出："所谓数学思想是对数学知识的本质认识，是从某些具体的教学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点，它在认识活动中被反复运用，带有普遍的指导意义，是建立数学和用数学解决问题的指导思想。"布鲁纳指出，掌握基本数学思想和方法能使数学知识更易于理解和记忆。领会数学思想和方法是通向迁移大道的"光明之路"。

徐利治先生说：数学有两种品格，其一是工具品格，其二是文化品格。数学之文化品格、文化理念与文化素质原则之深远意义和至高价值在于：他们当年所受到的数学训练，一直会在他们的生存方式和思维方式中潜在地起着根本性的作用，并且受用终生。这就是说数学方法与数学思想对人具有很大的影响，它虽然来自于数学科学，但却是解决问题的一种非常普遍的思想方法，其应用范围远不局限于数学领域。数学思想方法与数学知识相比，知识的有效性是短暂的，思想方法的有效性却是长期的，能够使人"受益终生"。数学教育要实现上述目标，只在数学教学中进行数学知识的学习是不够的，还应进行数学思想方法的学习，即不是就知识学知识，而是让学生在数学知识的学习中了解其背后的精神、思想和方法，得到数学文化的熏陶，启迪智慧。

一项来自美国的统计表明：基本的数学思想和数学方法运用的频率最高，从而也最不易被遗忘；因为不易遗忘，所以反复地应用。古人云："授人

以鱼，不如授之以渔。”这句至理名言即道出了数学思想方法学习的重要性。日本数学教育家米山国藏说：“我搞了这么多年的数学教育，发现学生在初中、高中等接受的数学知识，因毕业进入社会后几乎没有什么机会应用这种作为知识的数学，所以通常是出校门后不到一两年，很快就忘记了。然而，不管他们从事什么业务工作，唯有深深铭刻于头脑中的数学的精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法，却随时随地发生作用，使他们受益终生。”由此他认为：无论是对科学工作者、技术人员，还是数学教育工作者，最重要的就是数学的精神、思想和方法，而数学知识只是第二位的。数学的思想方法是处理数学问题的指导思想和基本策略，是数学的灵魂。因此，在教学中引导学生领悟和掌握以数学知识为载体的数学思想方法，是使学生提高思维水平，真正懂得数学的价值，建立科学的数学观念，进而做到发展数学、运用数学的重要环节。

数学思想作为数学方法论的一个重要概念，我们完全有必要对它的内涵与外延有较为明确的认识。关于这个概念的内涵，我们认为，数学思想是人们对数学科学研究的本质及规律的理性认识。这种认识的主体是人类历史上过去、现在以及未来的数学家；而认识的客体，则包括数学科学的对象及其特性、研究途径与方法的特点、研究成果的精神文化价值及物质世界的实际作用、内部各种成果或结论之间的互相关联和相互支持的关系等。由此可见，这些思想是历代与当代数学家研究成果的结晶，它们包含于数学材料之中，有着丰富的内容。

通常认为数学思想包括模型思想、极限思想、统计思想、方程思想、函数思想、数形结合思想、化归思想、分类讨论思想和公理化思想等。这些都是通过对数学活动经验概括而获得的认识成果，既然是认识就会有不同的见解，不同的看法，实际上也确实如此。例如，有人认为数学教材可以用集合思想作主线来编写；有人认为以函数思想贯穿数学内容更有利于提高数学教学效果；还有人认为数学内容应运用教学结构思想来处理；等等。尽管看法各异，但只要是在充分分析、归纳概括数学材料的基础上来论述数学思想，那么所得的结论总是可以做到并行不悖、互为补充的，总是能在数学教材中起到积极的促进作用的。

关于这个概念的外延，从量的方面讲有宏观、中观和微观之分。属于宏观的有数学观，如数学的起源与发展，数学的本质和特征，数学与现实世界的关系，数学在科学中的文化地位，数学方法的认识论、方法论价值等。属于中观的有关于数学内部各个部分之间分流的原因与结果，各个分支发展过程中积淀下来的内容上的对立与统一的关系等。属于微观的则有对各个分支及各种体系结构中特定内容和方法的认识，包括对所创立的新概念、新

模型、新方法和新理论的认识。从质的方面说，还可分为表层认识与深层认识、片面认识与完全认识、局部认识与全面认识、孤立认识与整体认识、静态认识与动态认识、唯心认识与唯物认识、谬误认识和正确认识等哲学高度的辩证认识。

数学思想与数学方法是紧密联系的，思想指导方法，方法体现思想。数学思想是指人们对数学理论和内容的本质的认识，数学方法是数学思想的具体化形式，实际上两者的本质是相同的，差别只是两者看问题的角度不同。同一数学成就，当用它去解决别的问题时，就称之为方法；当评价它在数学体系中的自身价值和意义时，就称之为思想。当强调指导思想、解题策略时，称之为数学思想；强调操作时，称为数学方法。数学思想和数学方法很多时候是很难区分的，因此，人们常常不加区分，而统称为数学思想方法。

数学思想广泛存在于数学方法中，是数学方法的灵魂，而数学方法则是数学思想的载体，二者是“灵与肉”的关系。数学方法与数学思想互为表里，密切相关，两者都以一定的知识为基础，反过来又促进知识的深化以及向能力的转化。例如：思想方法中的“化归”思想，在思考过程中，我们把“要解决的问题”转化为“已知的问题”或“能够解决的问题”，这就是“化归思想”。

数学方法具有层次性。数学是由低级到高级，由客观现实到抽象世界形成和发展起来的。数学方法的载体是数学知识，数学知识具有层次性，因此也赋予数学方法层次性。

数学思想方法的研究始于20世纪40年代，数学家波利亚著有《怎样解题》，20世纪80年代徐利治教授在大学数学系开设“数学方法论”，著有《数学方法论选讲》。此后，数学思想方法的研究不断深入。关于数学思想方法，北京师范大学钱佩玲教授指出：“数学思想方法是以数学内容为载体，基于数学知识，又高于数学知识的一种隐性知识。”“是处理数学问题的指导思想和基本策略，是数学的灵魂。”数学思想方法是一种指导思想和普遍适用的方法。数学本身作为一种科学，具有严谨性、逻辑性、简洁性、可靠性等特点。对数学思想方法的研究，有益于数学本身的研究，同时，数学是一种文化，是一种态度。人们在领悟数学的真理、懂得数学的内涵和价值之后，形成一种素养，学会数学地思考和解决问题。“数学思想方法”一词，自20世纪90年代以来，在数学学科和数学教育范围内开始使用，使用率在逐渐提高。在其他学科内也有使用。数学思想方法贯穿在《数学课程标准》中：一方面把它作为教育的目标，在前言中要求教师“应激发学生的积极性”，帮助学生在学习的过程中真正理解和掌握基本的数学知识和技能、数学思想方法；同时也把它作为学生学习的目标。

数学是一门思维的艺术。数学思维的活动过程中有方法论因素，即运

用各种方法分析和处理实际问题。数学思维的发展中也有方法论因素，即通过适当的方式和途径培养人们的数学思维品质和思维能力，完善数学思维结构自身。数学与发展相结合是教学的一项基本原则。数学教学要以学生一定的心理发展水平为基础，同时，数学教学又要发展学生自己的能力及一般个性，所以数学必须担负起使学生掌握知识、技能和个体得到发展的双重任务，即让学生学会“数学地思维”。对于“数学地思维”，徐利治先生曾给出过清晰的表述：“数学思维有两重性，一类是进行逻辑推理的抽象思维，另一类是进行合情推理或似真推理的形象思维。后一类思维的具体表现形式是观察、实验、类比、联想、不完全归纳等。”数学与发展相结合的原则要求我们在数学教学中把数学教学看成数学活动的教学。要把“学生看作认识的主体”及“在学生面前呈现力所能及的问题”看成是教学活动的两个必要条件，教师的工作无非是在这两者之间筑起必要的桥梁。把数学教学看成数学活动的教学，旨在展开问题的同时，展开学生的思维，进而理解数学的实质及其思想方法；把数学教学看成数学活动的教学，目的是把过去教师单纯解释教材，学生从教师的讲解中学习的封闭式教学模式，转变为学生与教材发生直接联系，教师做必要组织、指导工作的开放式教学模式。数学思想方法是人们对数学内容本质的认识，是对数学知识的抽象和概括，属于对数学规律的理性认识的范畴，在教学和学习中希望能起到学会“数学地思维”的作用，进一步上升到培养与提高数学素质与人文素质的高度，从而提高我们的综合素质。数学思想方法的作用具体表现在以下三个方面：

第一，数学思想方法具有一种抽象思维的能力。数学是研究事物的抽象性的科学。数学思想方法的对象已是一种抽象的思维创造物。数学家对抽象的研究对象进行思索，不断地发现在一种数学结构内部或在不同数学结构之间所固有的关系或规律。当人们把这些成果运用于实际问题时，之所以成功，正是因为数学内容实质上是现实世界的规律性的反映和写照。运用数学思想方法，对所要研究的问题建立数学模型，必须发挥其所独具的抽象思维能力，即善于把无关紧要的东西先撇在一边，抓住最主要的因素、关系，进行深入的分析和综合，经过合理的简化，把问题用数学语言表述出来。在这样抽象出来的数学模型上展开数学的推导和演算，以形成对问题的判断和预测，这是数学用抽象思维去把握现实的力量所在。

第二，数学思想方法是数学思维的基本方法。数学思维就是以数学问题为载体，通过发现问题、解决问题的形式，达到对现实世界的空间形式和数量关系的本质的一般性的认识的思维过程。数学思想方法对数学思维活动起决定性影响，它是数学思维的动力，并为思维指明了方向。解决问题成为思维的目的。数学思维过程就是不断地提出问题、解决问题的过程，由于

解决问题的过程最后总可以归结为应用思想方法的过程，因此，可以认为数学思维过程就是使用思想方法提出和解决问题的过程。

第三，数学思想方法是辩证的辅助工具和表现方式。数学中到处都充满着矛盾，充满着各种对立面的转化。如果说各门科学都包含着丰富的辩证思想，那么，数学则有自己特殊的表现方式，即用数学的符号语言，甚至是用简明的数学公式表达出各种对立面的转化。例如：有限与无限、特殊与一般、数与形、整体与局部、一维与多维、近似和精确等的辩证关系。要真正利用好数学思想方法这个工具，仅仅知道许多数学知识是不够的，还必须善于挖掘各种概念之间、各种运算之间以及各个分支之间的关系，并且善于建立和运用它们之间的各种转化，这样才能发挥出蕴藏在数学思想方法中的辩证思维的力量。数学思想方法之所以强有力，无论是计算方法之灵巧，还是推理论证之美妙，常常在于有意识地利用或创造了各种转化。正如恩格斯说的：从一种形式到另一种形式的转变，是数学科学的强有力的杠杆之一。

数学思想方法主要有以下三类：一是思想观点类。例如，公理化的思想，转化（或化归）思想，极限思想，结构思想（布尔巴基学派用这个观点统一地看待和概括全部数学，并指出数学有三种基本结构：代数结构、序结构和拓扑结构）等。二是思想方法类。例如，分析与综合，抽象与概括，演绎与证明，观察、类比、归纳、联想等。三是技能技巧类。例如，数形结合的思想，分类讨论的思想，不等式的思想与函数和方程的思想等。细化的具体方法有：数学归纳法、待定系数法、换元法、反证法、配方法、坐标法、分析法与综合法等。

数学思想方法的核心是转化的思想。数学中的一切问题的解决归根结底就是转化，把未知的转化为已知的，难解的转化为易解的，数转化为形，形转化为数，实际问题转化为数学问题等。因此数学思想方法中的其他思想方法也都是由转化思想得来的。实际上，从哲学角度来看，事物之间是互相联系与转化、不断发展变化的。

作为反映数学本质的数学思想方法，有以下三大特点：

一是抽象性。正如恩格斯所说：为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关紧要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长、宽、高的点，没有厚度和宽度的线。数学中的这种点、线以及其他形式和关系，不同于客观存在的点、线或现实的形式和关系，已是一种“思想事物”了。数学运用特制的抽象符号语言，在数学推理中，从前提到结论，每一推理步骤都是用符号进行的，所得到的结论也是用数学公式来表达的。数学思想方法则是从众多的数学对象和内容中提

炼抽象而成的，像公理化思想，先给出公理和定义，再用演绎的方式引入和证明定理，定理的引入是有序的，在一个定理的证明中，允许采用的论据只有公理和前面已经证明过的定理。

二是指导性。在解决问题时，我们总是在寻求某种思想与方法，得到解决问题的途径。比如实际应用问题，我们设法将其变成数学模型，用数学方法得到数学的形式解答，再返回到实际中，就变成解决应用问题的数学模型方法。数学思想方法的指导性，正如希尔伯特在《公理化思想》中所说："我们能够获得科学思维的更深入的洞察力，并弄清楚我们的知识的统一性，特别是，得力于公理化思想，数学似乎就被请来在一切学问中起领导的作用。"

三是应用的广泛性。这是不言而喻、毋庸置疑的。数学思想方法是数学科学本质的理性认识，数学科学是对自然科学与社会科学的抽象与概括，处在哲学统领的高度，不但能应用于各门自然科学，而且可以应用于社会科学；不但能应用于工程技术、农业生产，而且可以应于用经济和社会的各个领域，尤其是计算机信息技术。正如华罗庚所说："宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁，无处不用数学。"

数学思想方法是数学的灵魂，是数学学习的指导思想和基本策略，是数学学习的目的和手段，因此，引导学生领悟和掌握以数学知识为载体的数学思想方法是数学学习的目标和任务。同时通过数学学习去认识数学知识和数学思想方法的价值和数学美，从而去运用数学、发展数学。

1.4 数学方法论的现代发展

显然，科学的发展不会停滞在任一特定的水平。就数学方法论的研究而言，我们既应高度重视对于波利亚数学启发法的学习和继承，同时又应积极地去开展新的研究，从而真正做到对波利亚的"超越"。通过多年的实践，中国的数学方法论研究已形成了自己的一些特点，如果说波利亚的研究主要是围绕"问题解决"展开的，那么中国的数学方法论研究则更为突出了"思维模式"的概念，从而就包括了更为广泛的内容。另外，即使就"问题解决"的专门研究而言，国外近年来也已超越波利亚而在理论研究上达到了一个新的更高的水平。具体地说，近年人们已清楚地认识到"启发法"不应被看成影响解决问题能力的唯一要素。或者说，为了提高解决问题的能力，我们还应注意到更多的环节，特别是像所谓的"调节"和"观念"这样一些因素。从而，我们在此事实上就已获得了关于"问题解决"的一个新的理论框架。

自 20 世纪 50 年代以来，数学发展非常迅速，出现了许多新问题和新现象，引起了数学界的关注。今后数学怎么发展，它将发展成什么样子？这些

有关数学发展的前沿问题,已成为部分数学工作者感兴趣的研究课题。当今数学处在发展很快的阶段,但数学研究面临着巨大的困难。分析这些困难就可以预测数学今后发展的趋势。研究解决这些困难的方法并付诸实施,就推动了数学进一步地向前发展,从而给数学带来新的希望。当今数学的发展主要面临着三方面的困难。

第一,文献爆炸局面所带来的困难。据粗略估计,现在全世界至少有1500种数学杂志,它们几乎遍布于世界的各个角落。这些数学杂志每年所刊登的数学文章数量很可观。例如,美国的《数学评论》(Mathematical Review),每年约登载数学论文文摘5万篇。就算现在数学有50个分支,那么平均每个分支每年发表论文就有1000篇。每一位数学工作者欲使自己的研究工作不脱离现实,跟上时代前进的步伐,每年就得看完约1000篇论文(平均每天三四篇),以及时掌握最新学术动态,这是很难做到的,所以常常发生有些研究成果重复或部分重复的现象,甚至有的数学问题早在二三十年前就已被别人解决,而后来的研究者竟然毫无所知。

第二,分工过细造成的困难。科学分工原是科学向前发展和历史进步的表现。各门科学的发展都遵循从创始、成长到成熟这一客观规律。发展到后来,科学知识日益丰富,有很多内容需要分门别类地进行研究,所以分工细也是科学发展的必然结果。但是到了20世纪80年代,数学发展成数十个分支,而且每个分支中还有小的分支,分工越来越细,以致过细。打个比方,数学犹如一棵大树,有树干,其上有许多树枝、树干,树枝越分越多。今天的数学工作者往往只在一棵"树"的某个"树枝"上做些研究。回顾18~19世纪,很多数学家都是身兼数职。他们不仅在数学的广阔领域里造诣极深,而且精通多门学科。像欧拉、拉格朗日、拉普拉斯、傅里叶、柯西和高斯等既是纯粹数学家,又是物理学家、哲学家或天文学家。根据高斯对纯数学的贡献,人们误以为他把主要精力放在纯数学上,其实不然,他对天文学兴趣极浓,致力于行星研究约20年,写成了不朽的著作《天体运动理论》。又如,傅里叶创立了傅里叶分析这一数学分支。但他也只是用小部分时间研究数学,大部分时间却是在研究物理。近30年来,人们所说的数学家多半是数学专家。他们主要是在数学的一两个分支上做出了重大贡献。这种现象导致了布尔巴基学派的呼吁,该学派的口号是:今后的数学教育应面对一个伟大的目标,即着重培养综合性的数学家,而不光是数学专家。当然,这涉及改革数学教育的培养目标。

第三,近几十年来,数学主要受到计算机、新应用、学习过程研究、数学研究和社会经济因素等的冲击。数学方法不仅在工程和物理上有应用,而且现在越来越多地被应用到生物科学、环境科学、自然资源模拟、经济学和