普通高等教育“十一五”国家级规划教材
“十二五”江苏省高等学校重点教材
普通高等工科院校基础课规划教材

线性代数

（第4版）

主　编　陈建华

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”江苏省高等学校重点教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

线性代数

第4版

主编　陈建华
参编　刘金林　魏俊潮
主审　蔡传仁

江苏省高等学校重点教材编号:2015-1-035

机械工业出版社

本书是根据《高等教育本科线性代数课程教学基本要求》编写而成的，全书分6章．前3章为基础篇，介绍行列式、矩阵、向量与线性方程组；后3章为应用提高篇，介绍矩阵相似对角化、二次型及线性空间与线性变换的基础知识．

本书是为普通高等院校非数学专业本科生编写的，内容选择突出精选够用，语言表达力求通俗易懂，章节安排考虑了不同专业选用方便．本书也可作为大专院校和成人教育学院的教学参考书，还可供参加自考的广大读者参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈建华主编．—4版．—北京：机械工业出版社，2016.8

“十二五”江苏省高等学校重点教材　普通高等教育“十一五”国家级规划教材　普通高等工科院校基础课规划教材

ISBN 978-7-111-54315-2

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第165978号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　孟令磊
责任校对：陈　越　封面设计：路恩中
责任印制：李　洋
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2017年1月第4版第1次印刷
190mm×215mm·18.75印张·383千字
标准书号：ISBN 978-7-111-54315-2
定价：39.90元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.golden-book.com

普通高等工科院校基础课规划教材

编审委员会

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的21世纪. 这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德，明确的历史责任感和社会使命感，较强的创新精神、创新能力和实践能力，宽广的知识面和扎实的基础. 基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力，关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力. 由于基础学科本身的特点，以及某些短期功利思想的影响，不少人对大学基础教育的认识相当偏颇，我们有必要在历史的回眸中借前车之鉴，在未来的展望中创革新之路. 我们必须认真转变教育思想，坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导，以培养新世纪高素质人才为宗旨，以提高人才培养质量为主线，以转变教育思想观念为先导，以深化教学改革为动力，以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点，以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心，努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用型、复合型人才.

基于上述考虑，中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅（原江苏省教委）和江苏省及省外部分高等工科院校成立了普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会，组织编写了大学基础课程系列教材，作为加强教学基本建设的一种努力.

这套教材力求具有以下特点：

(1) 科学定位. 本套教材主要用于应用型本科人才的培养.

(2) 综合考虑、整体优化，体现“适、宽、精、新、用”. 所谓“适”，就是要深浅适度；所谓“宽”，就是要拓宽知识面；所谓“精”，就是要少而精；所谓“新”，就是要跟踪应用学科前沿，推陈出新，反映时代要求；所谓“用”，就是要理论联系实际，学以致用.

(3) 强调特色. 就是要体现一般工科院校的特点，符合一般工科院校基础课教学的实际要求.

(4) 以学生为本. 本套教材将尽量体现以学生为本，以学生为中心的教育思想，不为教而教. 注重培养学生的自学能力和扩展、发展知识的能力，为学生今后持续创造性的学习打好基础.

尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前，但由于是一种新的探索，难免有这样那样的缺点甚至错误，敬请广大读者不吝指教，以便再版时修正和完善.

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合，在此，一并表示衷心感谢.

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会
主任　殷翔文

第4版前言

本书第3版自2011年5月出版发行以来，由于其内容安排合理，既满足教育部《高等教育本科线性代数课程教学基本要求》和硕士研究生入学考试的基本要求，又具有文字表述流畅、可读性强等特点，受到了读者的肯定.

经过几年的教学实践和教学改革，根据专家、同行的宝贵建议，我们对教材做了进一步修订，本次修订保持了第3版的优点与特色，期望更好地适应“大众教育”和应用型本科院校教育改革的需要，更多的是关注学与教的过程.

本书在教材内容的呈现上，充分体现以学生为中心的教育思想，并努力在概念引入、理论分析、方法叙述等方面的呈现上实现创新：(1) 充分利用好页面边栏. 通过增加问题、批注或解释，简明扼要地介绍方法、历史、文化等，为读者搭建阅读平台，激发学生的学习热情和培养学习兴趣. (2) 调控读者阅读教材的节奏. 每隔一定的阅读量，就这段内容，通过提供探究型、归纳型或反思型问题，碎化部分定理或例题，为读者提供一定的思维空间. 引导读者完成一些计算或推导，让读者在阅读理解和解决问题两种模式间切换，减少注意力疲劳，同时改善教材的预习体验.

本书尝试将信息技术引入教材，初步实现教材和移动互联网融合. 给读者提供大量的文字和图片等教学信息，利用专门的APP软件，通过扫描二维码，初步实现网络支持下的教与学资源的共享.

本次修订得到了扬州大学出版基金资助，还得到了江苏省教育厅、扬州大学教务处和扬州大学数学科学学院给予的大力支持。机械工业出版社的编辑们对本次修订付出了大量劳动。许多想法取材于专家学者的文献，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者的水平，书中难免存在不足，敬请读者批评指正.

编者

第 3 版前言

本书第 2 版是我们为普通高等学校非数学专业学生编写的公共数学基础课教材．其内容选择依据教育部《高等教育本科线性代数课程教学基本要求》，涵盖了硕士研究生入学考试大纲的基本要求．其内容组织以矩阵为编写主线，辅以线性空间．其具体阐述遵循了由浅入深，难点分散的原则，力争做到删繁就简，加强基础．本书出版以来，经几轮使用，师生的反映较好，达到了为学生提供专业学习的数学知识准备和帮助学生打下良好的素质、能力基础的目的．但在纷繁复杂的世界里，数学的新应用不断被发现，需要我们及时传达给学生．伴随着我国高等教育改革的推进，教材使用者的情况也在不断变化．需要我们与时俱进，更好地将线性代数作为有用、有趣的课程讲授给学生．

本次修订的主要内容包括以下两个方面：

首先，习题编写上做了较大的调整．从习题的层次看，根据小节配置练习，每章再配置习题；从习题的类型看，增加了问答题、选择题、判断题等形式的习题；从习题的容量看，习题的量达到原教材的两倍以上．给学生提供了更大的可选择空间，让学生能按照自己的能力和目标接受到更合理、科学的训练．希望在增强习题训练的目的性的同时，提高习题的教育功能．

其次，正文增加"历史寻根""方法索引""背景聚焦"等栏目，介绍一些与线性代数课程相关的数学历史、数学应用及重要的数学方法，为开阔学生眼界，提高学生素养铺路架桥．值得注意的是，这部分内容读懂多少算多少，可能回过头再看，自然就能理解，有的也许还需要查阅其他参考书．借助于问答题进一步加强代数与几何的联系，帮助学生体会几何对代数的促进作用．

线性代数是最有用、最有趣的大学数学课程之一．从某种意义上说，线性代数是一种语言．建议同学们用学习外语的方法每天学习这种语言．教材习题是为了让读者理解教学内容，一个显著的特点是数值计算并不复杂．要透彻理解每一节内容，必须完成习题．如果能坚持思考每章的问答题，对理解课程内容也是很有益的．

本次修订工作得到扬州大学教务处和扬州大学数学科学学院的大力支持．感谢扬州大学数学科学学院的全体老师，特别是承担线性代数课程教学任务的老师，本书的形成、成长离不开他们的支持．

限于编者水平，书中定有许多不妥之处，敬请读者指正．

编者

2010 年 6 月

第 2 版前言

本书自从 2002 年出版以来，经几轮使用，师生的反映较好. 教材内容安排合理，既满足教育部《高等教育本科线性代数课程教学基本要求》，又涵盖了本科院校学生考研的基本要求，但也存在许多不足之处.

这次修订，在内容宏观组织上仍以矩阵为编写主线，辅以线性空间. 本书在内容的具体阐述上遵循了由浅入深，难点分散的原则，删繁就简，加强基础；采用“几何观点”和“矩阵方法”并重，贯穿于教材的始终，便于读者掌握线性代数主要内容的内在规律；在培养学生能力要求上，选择最重要、最基本的内容，有利于学生形成扎实的基础，在今后的学习中以不变应万变；一方面为学生学习提供数学知识准备，另一方面要为学生今后学习打下良好的素质、能力基础.

本次修订的主要内容包括以下几个方面：

1. 侧重于高等学校的理工类专业学生的需要，删去第 1 版第 7 章投入产出的数学模型.

2. 重新选配正文中的部分例题，加以分析，帮助学生理解相关理论.

3. 在习题的编写上，调整部分习题，增强习题的目的性，同时分清层次，让学生能按照自己的能力和目标接受到科学的训练. 增加习题答案，方便学生使用.

4. 增加附录 C，介绍数域和多项式的相关知识.

5. 查、纠教材中遗漏和错误.

此次修订工作得到了机械工业出版社、扬州大学教务处和扬州大学数学科学学院的大力支持. 机械工业出版社郑丹和张继宏两位老师对本书的修订出版做了大量工作，在此我们表示衷心感谢.

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正.

编者

2005 年 5 月

第 1 版前言

线性代数是一门重要的基础课．在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用．根据《高等教育本科线性代数课程教学基本要求》，编者结合多年从事线性代数课程教学的体会编写了这本书，其目的是为普通高等学校非数学专业学生提供一本适用面较宽的线性代数教材．

在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂．根据非数学专业学生使用的需要，以矩阵作为贯穿全书的主线，一方面让线性方法得以充分体现，同时有利于学生理解线性代数课程的基本概念和基本原理．在概念的引入、理论分析和例题演算等环节上尽可能多地反映代数与几何结合的思想，这样可以使学生从几何背景中理解代数概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示．重视例题和习题的设计和选配，除了选配巩固课程内容的基本题目外还选配了部分提高题．

本书共七章，前 3 章为基础篇，后 4 章为应用提高篇．根据本科线性代数课程教学基本要求，工科类学生应掌握本书的前 6 章的内容；管理专业、财经专业学生应掌握本书的前 5 章和第 7 章的内容；化学、化工专业和农学专业学生应掌握本书的前 4 章的内容．开设工程数学（线性代数）课程的专业，学时数为 27 学时的，选讲本教材的前 3 章以及第 4 章的第 2、3 节；学时数为 36 学时的，选讲本教材的前 4 章以及第 5 章的大部分内容．开设线性代数课程的专业，学时数为 54 学时可讲完前 6 章，或前 5 章和第 7 章．教师可以根据不同专业和不同教学时数选择有关章节进行教学．根据现行研究生入学考试的考试大纲，从内容上看，本书的前 6 章覆盖了数学（一）的考试要求，本书的前 5 章覆盖了数学（三）的考试要求，本书的前 4 章覆盖了数学（二）和数学（四）的考试要求．

在编写过程中，中国科学技术大学章璞教授对本书编写大纲提出过许多宝贵的意见，扬州大学蔡传仁教授审阅了全书，蒋宏圣副教授校阅了书稿．机械工业出版社，扬州大学教务处、理学院和数学系对本书的编写出版给予了很大的帮助，在此表示衷心的感谢．此外，编者从学习代数学到讲授代数课程，始终得到方洪锦教授、蔡传仁教授的指导和扬州大学数学系老师的关心，在此一并表示感谢．

由于编者水平有限，书中内容、体系、结构不当甚至错误在所难免，敬请各位专家、学者不吝赐教，欢迎读者批评指正．

编者

2002 年 2 月

目 录

第 1 章 行列式

线性代数是一种语言，必须用类似学习外语的方法每天学习这种语言. 在线性代数中，概念和计算同样重要，为了掌握线性代数里的概念，必须反复阅读教材.

线性代数是高等学校的一门重要基础课，也是中学代数的继续和发展. 行列式是线性代数中主要研究对象方阵的重要数值特征，它在线性代数中起着重要作用. 本章介绍行列式的概念、基本性质、计算方法及简单应用.

1.1 行列式的定义

行列式的概念来源于解线性方程组的问题. 在初等数学中，为了简化线性方程组解的表达式，引进了二、三阶行列式的概念. 作为线性代数的重要工具，在讨论 n 元线性方程组和向量的运算时，需要把行列式推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式的问题.

1.1.1 二阶、三阶行列式

在初等数学中，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

的解，实际上为平面上两条直线的交点. 当这两条直线不平行时，即 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，利用消元法可解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

为了便于记忆上述解的公式，引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

二阶行列式 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是 xOy 平面上以向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ 为邻边的平行四边形的有向面积，从 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 逆（顺）时针方向排列为正（负）.

并称之为二阶行列式. 利用二阶行列式的概念，方程组(1-1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D},$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

【例 1-1】 解线性方程组

$$\begin{cases} \cos\theta x_1-\sin\theta x_2=a, \\ \sin\theta x_1+\cos\theta x_2=b. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & \cos\theta \end{vmatrix}=a\cos\theta+b\sin\theta,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \cos\theta & a \\ \sin\theta & b \end{vmatrix}=b\cos\theta-a\sin\theta,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=a\cos\theta+b\sin\theta,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=b\cos\theta-a\sin\theta.$$

对于含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1-2}$$

可以进行类似的讨论. 由此引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

你能够说明三阶行列式的几何意义吗？

并称之为 3 阶行列式. 行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列. 行列式中的数，称为行列式的元素. 每个元素有两个下标，第一个下标表

示它所在的行，称为行指标；第二个下标表示它所在的列，称为列指标，如 a_{12} 就是位于第 1 行，第 2 列的元素. 2、3 阶行列式所表示的数利用对角线法则来记忆(见图 1-1).

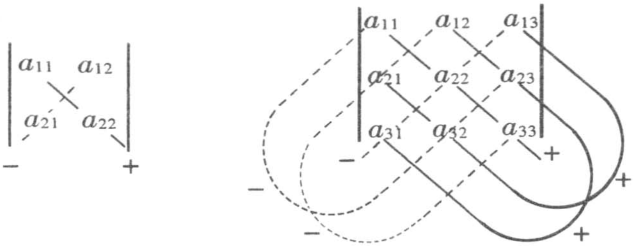

图 1-1

对角线法则只适用于二、三阶行列式. 理解什么是行、列及 (i,j) 对应位置的元素 a_{ij}.

【例 1-2】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{aligned} D &= 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0- \\ &\quad 1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1) \\ &= -10-48=-58. \end{aligned}$$

从 2、3 阶行列式的定义可以看出，行列式的值是一些“项”的代数和. 例如在 3 阶行列式中，每一项都是 3 个数的连乘积，而且这三个数取自 3 阶行列式的不同的行与不同的列，总项数以及每一项相应的符号，则与其下标的排列有关. 为了揭示 2、3 阶行列式的结构规律，将行列式的概念推广到 n 阶，先简单介绍一些有关排列的基本知识.

1.1.2 数码的排列

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 元排列. n 元排列的一般形式可表示为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，其中 $i_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中的某一个数，且互不相同，而 $i_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的下标 k 表示 i_k 在 n 元排列中的第 k 个位置上. 如 312 和 634521 分别为三元和六元排列，在排列 312 中，$i_1=3,i_2=1,i_3=2$. 众所周知，n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的全部排列总数为 $n!$. 例如自然数 1,2,3 可组成 $3!=6$ 个排列.

本课程的排列特指由 1 到 n 个不重复、不遗漏数码排成的一个有序数组.

定义 1-1 在排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果 $i_s>i_t$，称这两个数构成一个逆序. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总个数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

【例 1-3】 求下列排列的逆序数：

(1) 2143；(2) 13524；(3) $n(n-1)\cdots 21$；

(4) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1) 在排列 2143 中，数 2 与后面的 1 构成逆序；数 1 后面没有数与 1 构成逆序；数 4 与后面的 3 构成逆序；数 3 排在最后面. 排列 2143 构成逆序的数对有 21，43. 故 $\tau(2143)=1+0+1+0=2$；

(2) $\tau(13524)=0+1+2+0+0=3$；

(3)
$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots 21)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2};\end{aligned}$$

(4) 所给排列中 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 的逆序个数为 $0,2,4,6,\cdots,(2n)$ 的逆序个数也为 0，故只要计算其余数的逆序个数.

$$\begin{aligned}\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))&=1+2+\cdots+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

排列 $12\cdots(n-1)n$ 具有自然顺序，称为自然排列.

定义 1-2 一个排列的逆序数为偶数时，称它为**偶排列**；一个排列的逆序数为奇数时，称它为**奇排列**.

排列 23154 的逆序数 $\tau(23154)=3$，为奇排列，而排列 23451 的逆序数 $\tau(23451)=4$，为偶排列. 排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，为奇排列.

【例 1-4】 由 1，2，3 这三个数码组成的三元排列共有 $3!=6$ 个，这 6 个排列及其奇偶性如下表所示：

排列	逆序数	排列的奇偶性
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列