学府考研
中国优秀高端教育品牌

理工社®

2017考研数学
基础通关经典1000题（数学一）

◎主编 张同斌　　◎策划 考研数学命题研究组

25载辅导经验　30年执教积淀
4种方法精确掌握
1000道基础客观题全面“秒杀”

《复习指导全书》+《基础通关经典1000题》+《强化夺冠经典600题》完美搭配

选题精巧	折射大纲考点
方法多样	精确解题技巧
深度解析	透视题目本质
返璞归真	把握命题规律

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

学府考研

中国优秀高端教育品牌

理工社®

2017考研数学

基础通关经典1000题（数学一）

◎策划　考研数学命题研究组

◎主　编　张同斌

◎副主编　林　浩　胡嘉卉　李巧利　涂淑恒

RFID

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2017考研数学基础通关经典1000题．数学一／张同斌主编．—北京：北京理工大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-5682-2183-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第078347号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京市通县华龙印刷厂
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／30
字　　数／697千字
版　　次／2016年5月第1版　2016年5月第1次印刷
定　　价／52.90元

责任编辑／王玲玲
文案编辑／王玲玲
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

Preface

前 言

数学是全国硕士研究生入学统一考试工学类考生必考的课程，考试内容包括高等数学（占 56%）、线性代数（22%）和概率论与数理统计（22%）。从试卷结构来看，共 23 道题目，其中 8 道选择题（共 4×8=32 分）、6 道填空题（共 4×6=24 分）、9 道解答题（共 94 分），满分为 150 分。客观题（选择题与填空题）占到了 37.3%，能否快速、准确地解答客观题，是考生取得优异成绩的关键。

（单项）选择题主要考查考生对基本概念、基本理论与基本方法的理解与掌握程度，填空题主要考查考生对基本方法、基本运算的掌握能力，题目难度虽然不是很大，但由于出题方式比较灵活，加上客观题目的特点（只要答案不要过程），从历年考试成绩统计看，得分率不是很高。基于此，作者编写了符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的《2017 考研数学基础通关经典 1000 题（数学一）》，以期能够通过这些“好题”的训练解决客观题得分率低的“短板”，同时，为进一步提高主观题的解题能力打下良好的基础。

本书具有如下特色：

1. 介绍了客观题常见答题方法，如推理法、图示法、特例法、赋值法等，并通过例题加以示范，使考生较为系统地掌握解答客观题的方法与技巧，提高解答客观题的效率。

2. 题目的“口味”与真题的相一致，难度达到或略高于真题，注重数学思维的培养，通过题目的训练，使考生能够熟悉客观题考题的形式与类型，同时进一步提高解答客观题的速度。

3. 题目选取完全基于最新数学考试大纲并融入近年来命题规律，有些题目是编者根据 30 年的教学积累以及 25 年考研辅导班的经验有针对性编制而成，具有较好的前瞻性与预测性，这从 2016 年全国硕士研究生入学考题中已经得到验证。题目虽然是针对客观题设计，但覆盖面广，难易兼备，拓展性好，既有“秒杀”客观题的方法，又有大题推理、演绎或计算方法，对解答题的复习训

练也具有全面引领作用。

4. 每个题目之前都给出了考点分析，让考生明了考研题目的命题特点，通过训练将零碎的知识、理论与方法连成网、织成片，提高综合分析、解决问题的能力。

本书适合数学一考生使用。书中收录了适量真题，对于真题，在题后以“年份”[卷种]的形式表示，如65.(2007[1][2][3])表示65题选自2007年数学一、数学二与数学三真题，便于读者识别。

在本书的编写过程中，作者参考了国内外许多著作与教材，谨向有关作者表示衷心感谢！

限于作者水平，书中疏漏之处在所难免，恳请读者和同行批评指正。

编　者

2016年3月

Contents

目录

客观题常用解题方法概述

考研数学中，客观题包括选择题与填空题，在试卷中共 14 道题(选择题 8 道，填空题 6 道)，分值 56 分.因此，如何快速、准确地解答好客观题，并为后面的解答题留下较宽裕的答题时间，是考生取得数学高分的关键.

如何解答好客观题呢？下面结合例题就客观题常用解题方法与技巧进行归纳总结，以期提高考生解答客观题的效率.

一、推理法

根据已知条件，利用有关概念、性质和定理等通过演绎推理得出正确结论或通过计算直接得出正确结论，这种方法通常称为推理法.

例 1　(2016[2])设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$，当 $x\to0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　(C) $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

【答案】　(B).

【考点】　考查无穷小的比较.

【解析】　当 $x\to0^+$ 时，将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别与 x^k 进行比较，确定 k 的值，然后从低阶到高阶进行排序.

当 $x\to0^+$ 时，

$$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x^2,$$

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim\sqrt{x}\sqrt[3]{x}=x^{\frac{6}{5}},$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x,$$

即 α_1 是 x 的 2 阶无穷小，α_3 是 x 的 1 阶无穷小，α_2 是 x 的低于 1 阶的无穷小. 由此可知，3 个无穷小量从低阶到高阶的排序为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_2$. 应选(B).

例 2　(2014[1][2][3])下列曲线中有渐近线的是(　　).

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$　　(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

【答案】　(C).

【考点】　考查曲线的水平、铅直与斜渐近线及其求法，极限的计算，第一个重要极限.

【解析】　对于四个选项中的函数 y，都有 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，所以它们对应的曲线都没有水平渐近线.

当 x 趋向于 x_0(x_0 是任意确定的常数)时，四个选项中的 y 都不趋向于∞，所以它们对应的曲

线都没有铅直渐近线.

对于选项(A),因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=1$,但 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在,故曲线 $y=x+\sin x$ 也无斜渐近线,排除(A).

对于选项(B),因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$,所以曲线 $y=x^2+\sin x$ 无斜渐近线,排除(B).

对于选项(D),因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$,所以曲线 $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$ 无斜渐近线.排除(D),故应选(C). 事实上,因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,所以曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$.

例 3　(2004[1][2])设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$,$x\in[0,2]$,则 $f(7)=$ ________.

【答案】 1

【考点】 考查已知函数的导数求函数(值),奇(偶)函数与周期函数的特点.

【解析】 因为 $f'(x)=2(x-1)$,$x\in[0,2]$,所以

$$f(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C,x\in[0,2],$$

由于 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(0)=0$,从而 $C=0$,于是

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ -x^2-2x, & -2\leqslant x<0.\end{cases}$$

又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,故 $f(7)=f(-1)=1$.

例 4　(2013[1])已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq 0$,则(　　).

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　　(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

【答案】 (D).

【考点】 考查已知极限求参数,利用洛必达法则或等价无穷小替换求极限.

【解析】 **方法 1**　利用洛必达法则,有

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}},$$

所以 $k-1=2$,$k=3$,从而 $c=\dfrac{1}{3}$. 应选(D).

方法 2　因为当 $x\to 0$ 时,$x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{3}$,所以

$$c=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^k},$$

于是 $k=3,c=\frac{1}{3}$. 应选(D).

评注

①如果知道：当 $x\to0$ 时，$x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}$，就可以“秒杀”本题，可见，记住常见的等价无穷小对提高解题速度有较大的帮助.

②将 $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots(-1\leqslant x\leqslant1)$ 两边从 0 到 x 积分，得

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots(-1\leqslant x\leqslant1).$$

于是，$x\to0$ 时，$\arctan x\sim x$，

$$\arctan x-x\sim-\frac{1}{3}x^3.$$

例 5 (2016[1][2])已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　).

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant1.\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)-1, & x\geqslant1.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant1.\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant1.\end{cases}$

【答案】 (D).

【考点】 考查分段函数的原函数与不定积分的计算.

【解析】 **方法 1** 当 $x<1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=(x-1)^2+C_1$；

当 $x\geqslant1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C_2$，

由已知条件知

$$\lim_{x\to1^-}[(x-1)^2+C_1]=\lim_{x\to1^+}(x\ln x-x+C_2),$$

即 $C_1=C_2-1$，取 $C_1=C$，则 $C_2=1+C$，所以

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}(x-1)^2+C, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1+C, & x\geqslant1,\end{cases}$$

取 $C=0$，得 $f(x)$ 的一个原函数为

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant1.\end{cases}$$

应选 D.

方法 2　由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)$ 是可导函数，对于(A)，(B)，(C)选项，由于 $F(x)$ 在 $x=1$ 点不连续，因此在 $x=1$ 点不可导，排除，故应选(D)，事实上，

$$\lim_{x\to1^-}F(x)=\lim_{x\to1^-}(x-1)^2=0,\ \lim_{x\to1^+}F(x)=\lim_{x\to1^+}[x(\ln x-1)+1]=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=F(1)=0$，即 $F(x)$ 在 $x=1$ 点连续.

例 6　(2012[1][2])微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}$ 的解为________.

【答案】　$x=y^2$ 或 $y=\sqrt{x}$.

【考点】　考查一阶线性微分方程的解法.

【解析】　原微分方程既不是可分离变量的微分方程，也不是齐次微分方程，表面上也不是一阶线性微分方程，但如果把 x 看成是未知函数，y 看成是自变量，则原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=3y,$$

这是一阶线性微分方程，可以利用一阶线性微分方程通解公式求解，这里采用观察法.

上述方程可化为
$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x=3y^2,$$

即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(xy)=3y^2$，等式两边对 y 积分，得

$$xy=y^3+C,$$

由 $y|_{x=1}=1$，得 $C=0$，故 $xy=y^3$，即 $y^2=x$ 或 $y=\sqrt{x}$.

例 7　(2010[2][3])设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

【答案】　3

【考点】　考查抽象矩阵行列式的计算，矩阵与逆矩阵的运算性质.

【解析】　根据所求抽象矩阵的行列式与已知条件的关系，利用单位矩阵与矩阵(逆矩阵)之间的运算关系，有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}=3\times2\times\frac{1}{2}=3.\end{aligned}$$

例 8　设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(1,2)$ 与 $N(2,2)$，则(　　)

(A) $P\{2X+Y\geqslant1\}=\frac{1}{2}$　　(B) $P\{2X+Y\leqslant1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{2X+Y\geqslant0\}=\frac{1}{2}$　　(D) $P\{2X-Y\leqslant0\}=\frac{1}{2}$

【答案】　(D)

【考点】　考查正态分布的线性性质.

【解析】　如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $kX+lY\sim N(k\mu_1+l\mu_2,k^2\sigma_1^2+l^2\sigma_2^2)$.

对于本题，根据已知条件，有

$$2X+Y\sim N(4,10),2X-Y\sim N(0,10),$$

根据正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率密度函数关于 $x=\mu$ 对称性，得

$$P\{2X-Y\leqslant 0\}=P\{2X-Y>0\}=\frac{1}{2}.\text{ 应选(D).}$$

评注

①如果随机变量 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$，且 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立，则 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}k_iX_i\sim N\left(\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\mu_i,\sum\limits_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2\right)$，其中 $E(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\mu_i$，$D(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2$，$k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数．

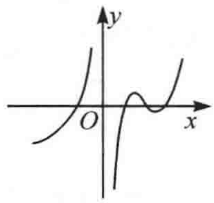
②如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{X\leqslant\mu\}=\frac{1}{2}$.

记住正态分布的这些性质对提高解这类问题的速度有较大帮助．本题求解中就运用了这两个常用结论．

二、图示法

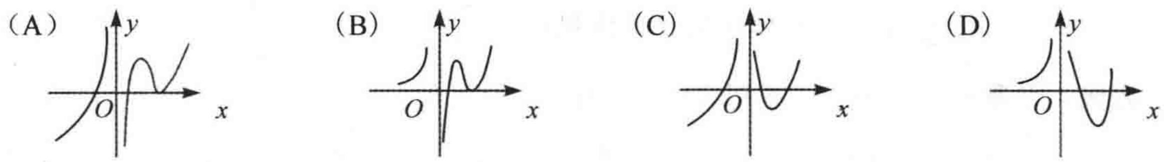
根据题目条件作出研究对象的函数 $f(x)$ 的图形，然后借助于几何图形的直观性与特点，通过分析推理得出正确结论的方法称为图示法．

当题目条件中有明显的几何特点，如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性，曲线的切线或平面图形的面积、空间立体的体积等，可考虑用图示法．



图Ⅰ

例 9　(2001[1][2])设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图Ⅰ所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(　　).



【答案】 (D)．

【考点】 考查函数与其导函数图形之间的关系．

【解析】 根据函数的单调性与函数导数的符号之间的关系，结合已知图形可知：

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y=f(x)$ 单调增加，所以 $f'(x)\geqslant 0$，排除(A)，(C).

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，从左到右 $y=f(x)$ 先单调增加，在这个范围内，$f'(x)\geqslant 0$. 根据(B)，(D)图形的特点，应选(D).

例 10　(2004[2][3])设 $f(x)=|x(1-x)|$，则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

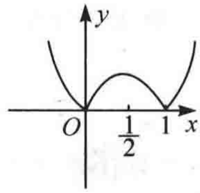
(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【答案】 (C).

【考点】 考查函数的极值点、曲线的拐点的充分条件.

【解析】 $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\leqslant 0, \\ x-x^2, & 0<x\leqslant 1, \\ x^2-x, & x>1, \end{cases}$



图Ⅱ

其图形如图Ⅱ所示.由图形的特点可知,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.应选(C).

评注

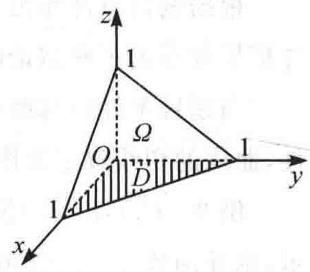
本题也可以求出 $f'(x)$,$f''(x)$,并判断 $x=0$ 的左、右两侧 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 符号,确定正确结论,但不如图示法直观、快捷.

例 11 设平面区域 D 由 x 轴,y 轴与直线 $x+y=1$ 围成,则 $\iint\limits_D(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【考点】 考查二重积分的计算或空间区域的体积.

【解析】 **方法 1(图示法)** 设平面区域 D 与空间区域 Ω 如图Ⅲ所示,则所求二重积分可以转化为三重积分



图Ⅲ

$$\iint\limits_D(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{1}{6}(\text{空间区域}\ \Omega\ \text{的体积}).$$

方法 2(计算法) 将所求二重积分化为先对 y 后对 x 的二次积分,得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[\left(y-xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 12 (2006[1][2][3])设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　).

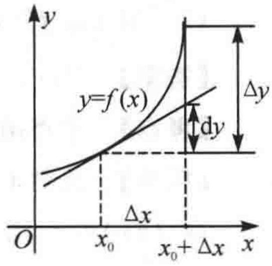
(A)$0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　　(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

【答案】 (A)

【考点】 考查微分的概念,函数的性质,利用拉格朗日中值定理证明不等式的方法.

【解析】 **方法 1(图示法)** 由 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$ 知,函数 $f(x)$ 单调增加,曲线 $y=f(x)$ 是

凹的，由此作函数 $y=f(x)$ 的图形，如图Ⅳ所示．



图Ⅳ

显然，当 $\Delta x>0$ 时，$\Delta y>\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$. 应选(A).

方法 2(推理法) 由拉格朗日中值定理，得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x \quad (x_0<\xi<x_0+\Delta x).$$

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，从而 $f'(\xi)>f'(x_0)$，于是

$$\Delta y=f'(\xi)\Delta x>f'(x_0)\Delta x=\mathrm{d}y,$$

又因为 $f'(x)>0$，所以 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$. 应选(A).

评注

本题考查导数的几何应用及微分的几何意义，利用一阶导数的符号确定函数的单调性，利用二阶导数的符号确定函数曲线的凹凸性．方法 1 借助于函数 $y=f(x)$ 的图形快速找到正确的选项，较方法 2 而言提高了解题速度．

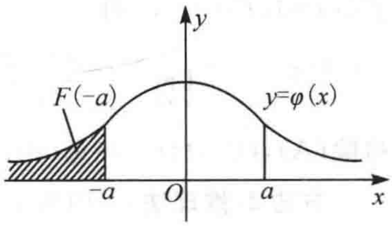
例 13 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意常数 a，有(　　).

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$　　(B) $F(-a)=F(a)$

(C) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

【答案】 (C).

【考点】 考查概率密度与分布函数之间的关系．



图Ⅴ

【分析】 因为 $\varphi(x)$ 是偶函数，所以 $y=\varphi(x)$ 的图形关于 y 轴对称(如图Ⅴ所示)，且 $F(0)=\frac{1}{2}$.

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\int_{-a}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

由图形知，$\int_{-a}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$，于是 $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$. 应选(C).

三、特例法

利用满足条件的特例，排除四个选项中的三个选项，得到正确答案的方法称为特例法．这种方法的关键是举出满足题目条件的特例，这除了需要考生积累一些常用的特例外，还要通过一定数量题目的训练达到提高解题速度的目的．

例 14 (2002[1][2])设函数 $f(x)$ 处处可导，则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

【答案】 (D).

【考点】 考查函数与其导数之间的极限关系.

【解析】 此题不便用推理法,宜用特例排除法.

取 $f(x)=x$,则 $f'(x)=1$,显然

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$,但 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1$. 排除(A);

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$,但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$. 排除(C).

取 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$,则 $f'(x)=x$,显然

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$,但 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}x^2=+\infty$. 排除(B),故应选(D).

例 15 (2011[2][3])设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=($ $)$.

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

【答案】 (B).

【考点】 考查函数在某点的导数的概念,利用导数的定义求极限.

【解析】 **方法 1(特例法)** 取 $f(x)=x$,则 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,满足题目条件. $f'(x)=1,f'(0)=1$. 而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot x-2x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-x^3}{x^3}=-1=-f'(0),$$

排除(A),(C),(D). 应选(B).

方法 2(推理法) 因为 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{x}-2\frac{f(x^3)}{x^3}\right]\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-2\lim_{x\to0}\frac{f(0+x^3)-f(0)}{x^3}\\&=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).\end{aligned}$$

应选(B).

例 16 设 $f(x)$在 $x=-1$ 点具有连续导数,且 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f'(x)}{x+1}=2$,则( ).

(A) $x=-1$ 是 $f(x)$的极小值点

(B) $x=-1$ 是 $f(x)$的极大值点

(C) $(-1,f(-1))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

(D) $x=-1$ 不是 $f(x)$的极值点,$(-1,f(-1))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点

【答案】 (A).

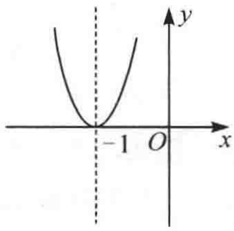
【考点】 考查函数极值(点)的充分条件,拐点的充分条件,函数极限的局部保号性.

【解析】 **方法 1(特例法)**　取 $f(x)=(x+1)^2$,则 $f'(x)=2(x+1)$,显然 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f'(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2(x+1)}{x+1}=2$,满足题目条件.由 $f(x)=(x+1)^2$ 的图形(如图Ⅵ)可知,$x=-1$ 是 $f(x)$的极小值点,$(-1,f(-1))$不是曲线 $y=f(x)$的拐点,应选(A).

方法 2(推理法)　由于 $f(x)$在 $x=-1$ 具有连续导数,且 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f'(x)}{x+1}=2$,所以 $\lim\limits_{x\to-1}f'(x)=f'(-1)=0$,即 $x=-1$ 是函数 $f(x)$的驻点. 又

$$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)-f'(-1)}{x-(-1)}=f''(-1)=2>0,$$

由极值的第二充分条件得,$x=-1$ 是 $f(x)$的极小值点. 应选(A).



图Ⅵ

方法 3(推理法)　因为 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f'(x)}{x+1}=2>0$,由函数极限的局部保号性,在 $\mathring{U}(-1,\delta)$内,$\dfrac{f'(x)}{x+1}>0$,则

x	$(-1-\delta,-1)$	-1	$(-1,-1+\delta)$
$f'(x)$的符号	$-$	0	$+$
$f(x)$的单调性	↘	$x=-1$ 是极小值点	↗

由此可知 $x=-1$ 是 $f(x)$的极小值点. 应选(A).

例 17　(2005[2])设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)$为 D 上的正值连续函数,a,b 为常数,则 $\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad)$.

(A) πab　　(B) $\dfrac{1}{2}\pi ab$　　(C) $\pi(a+b)$　　(D) $\dfrac{1}{2}\pi(a+b)$

【答案】　(D).

【考点】　考查利用轮换对称性简化二重积分的计算.

【解析】 **方法 1(特例法)**　取 $f(x)=1$,则 $f(y)=1$,从而

$$\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{a+b}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a+b}{2}\frac{1}{4}\pi 4=\frac{1}{2}\pi(a+b).$$

应选(D).

方法 2(利用轮换对称性)　利用轮换对称性,有

$$\iint_D\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi 4=\frac{1}{2}\pi,$$

从而 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\iint_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+b\iint_D \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=(a+b)\iint_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi(a+b).$$

应选(D).

评注

本题方法1利用特例法快速简捷;方法2利用轮换对称性求解,既训练了应对客观题的快速解题方法,又训练了解答题的方法,对考生起到较大的促进作用,如2014年数学一、数学二、数学三的考题:

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,计算 $\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 此题就可以利用方法2求解$\left(答案:-\frac{3}{4}\right)$.

例 18 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则(　　).

(A)当 $m>n$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$　　(B)当 $m>n$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

(C)当 $m<n$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$　　(D)当 $m<n$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

【答案】 (A).

【考点】 考查抽象矩阵的行列式的计算,矩阵的秩与该矩阵的行列式之间的关系,齐次线性方程组有非零解(仅有零解)的条件.

【解析】 **方法1(特例法)** 当 $m>n$ 时,取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=(2,2)$,则 $|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}=0$,排除(B).

当 $m<n$ 时,取 $\boldsymbol{A}=(1,1)$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{AB}|=0$,排除(D). 取 $\boldsymbol{A}=(1,1)$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{AB}|=2\neq 0$,排除(C). 故选(A).

方法2(推理法) 因为当 $m>n$ 时,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,从而齐次线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,于是 $|\boldsymbol{AB}|=0$. 应选(A).

四、赋值法

当题目中含有任意常数时,可以取一些"特殊值",包括数值、函数、矩阵等,通过推理演算,要么直接得出正确结论,要么排除错误选项,这种方法称为赋值法.

例 19 (2002[2])设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则对任意常数 k,必有(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关