刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections in Mathemetics by Y.P.Liu

第九编

时代文化出版社

刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections in Mathemetics by Y.P.Liu

第九编

时代文化出版社

半闲数学集锦（第九编）

作　　者：刘彦佩
出版单位：时代文化出版社
地　　址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司
地　　址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼
电　　话：010-68920114　13693651386
网　　址：www.grcsw.com

印　　刷：京冀印刷厂
开　　本：880×1230　1/16
版　　次：2016年9月第1版

书　　号：ISBN 978-988-18455-0-4
定　　价：全套 1890.00元（共22编）

第九编序

本编以专著数组合地图论(第二扩充版)[397] (9.14—9.33)为中心, 伴随我本人为此书的成形, 所作的一些有关早期准备(9.01[053]—9.13[073]).

例如, 文 9.01[053], 9.03[055], 9.04[059] 和 9.05[060], 为 9.19 提供了主要方程, 和一些计数结果. 文 9.02[054], 9.11[071] 和 9.13[073] 为 9.23, 文 9.10[070] 为 9.20, 以及文 9.06[061], 9.07[062] 和 9.12 为 9.24 等, 都提供了一些素材.

不过, 文 9.03[055] 和 9.08[063], 因为那里的方程都是一个, 看起来过于复杂的方程组, 至今仍还没有遇到促进我做进一步简约的窍门, 不便将它们纳入书中.

虽然款 9.17—9.30 标题与款 8.05—8.18 相同, 但几乎所有款的内容, 都作了大的改变. 后者强调平面地图, 而前者主要充实曲面上的地图, 以及一些以亏格作为参数的计数.

虽然用当时已经发现的, 曲面嵌入联树表示法于地图, 可以将之与图的曲面嵌入理论融为一体, 考虑到本书强调的, 乃是有关计数理论, 只是间接地, 简化一系列的结果, 以使前者更易于阅读.

从数学的观点看, 后者问世后的 6 年来, 通过我所指导的博士研究生的工作, 已经表明书中所重点阐述的, 带根平面地图的计数理论, 已经开辟无根的, 以及一般曲面上地图计数理论, 地图按自同构群的阶, 以及依亏格的分布, 色和乃至梵和, 地图着色问题, 尤其是四色问题等，将成为继后至少半个世纪, 的研究方向. 特别是从中揭示的, 一批带一个线性泛函的方程, 今后的一个世纪, 也许实难全部得到完满解决.

本版所充实的, 地图在曲面上的计数, 主要是延续他在另外的专著, 例如在组合地图进阶 (北方交通大学出版社,2003)[292](12.39—12.62), 以及地图的代数原理(高等教育出版社,2006)[354] (13.27—13.56) 中所发现, 甚至完善的, 对一般地图在曲面上的计数, 为诸如 Euler 地图, 不可分离地图, 无环地图, 无割棱地图等在曲面上的节点剖分泛函方程, 以及色和与梵和等方面的研究, 提供了理论基础.

在内容上, 具体地, 有以下一些主要删增:

第 1、在 9.17 中, 增加计数函数变换的三个新定理, 即定理 1.3.5、定理 1.6.3和定理 1.6.4. 它们都是从各类地图计数中, 提炼出来的, 并且广泛地, 应用于缩减推导过程. 删去了一些, 虽然启示将来的利用, 而在本书却未曾用过的, 有关特殊函数的公式.

第 2、在 9.18 中. 增添了讨论双边缘内根地图, 和将泛 Halin 地图拓广到泛花, 也 得到了以亏格为参数的无和计数显式. 用最新揭示的完全初等方法，不用 Lagrange 反演以及无穷矩阵的运算, 而是直接通过多边形的分类, 也得到了, 树依节点剖分的计数.

第 3、虽然 9.19 也可全面翻新, 不再用那里的递推与无穷矩阵运算的方法, 而是基于上面提到的结果, 直接地推导出来. 不过考虑到本专著的整体性, 仍保持原貌. 只精简了一些推导过程.

第 4、在 9.20 中, 曾添了一些, 对于小亏格曲面上, 地图直接计数的讨论, 特别提到研究生们, 研究的新结果.

第 5、在 9.21 中, 单独地, 而不是借助于, 无分离三角形的三角化, 提供了 3-正则 c-网的无和显式.

第 6、在 9.22 中, 增加了曲面上 Euler 地图. 提供了曲面上的, 节点剖分计数泛函方程. 在此基础上, 即可导出有关的计数结果, 以及建立曲面上, 各种类型地图的, 节点剖分计数泛函方程.

第 7、在 9.23 中, 增添在曲面上无割棱根地图. 提供了依节点剖分的泛函方程. 同时, 也求出了在曲面上, 可定向无割棱地图的, 节点剖分泛函方程, 和以根点次与棱数为参数的, 计数方程与计数公式.

第 8、在 9.24 中, 增添了曲面(包括可定向和不可定向)上无环根地图. 导出了以度和根点次为参数的计数函数, 所满足的一个偏微分方程. 求解出这个计数函数的, 一种有限正项和表示.

第 9、在 9.25 中, 删去多余部分, 提供单顶点地图, 可定向与不可定向的无和显式. 特别是第一次 给出, 确定曲面上, 不可定向单顶点根地图的, 计数方程 (9.5.22) 的简式.

第 10、在 9.26 中, 增添了曲面上的色和. 得到了, 在曲面上, 双不可分离地图, 色和函数所满足的方程. 为确定有关的色和, 以及相应的计数奠定了基础. 也提到了, 小亏格曲面上, 色和研究的一些新进展.

第 11、在 9.27 中, 增加了曲面上的梵和. 得到了, 在曲面上, 双不可分离地图, 梵和函数所满足的方程. 为确定 有关的梵和, 以及相应的计数, 打下了基础. 还提到了, 梵和研究的一些新进展.

第 12、在 9.28 和 9.29 中, 只作了文字上的简化, 使得更便于阅读.

另外, 增加了曲面上小阶地图, 依亏格的列表作为附录. 这样的列表, 完全是利用新完成的研究结果得到的. 无根的情形则是, 利用 地图的代数原理[354](13.27—13.56) 中提供, 确定地图自同构的算法求得. 利用它们, 读者可自行, 检验书中, 或自己所得结果, 的正确性.

刘彦佩
2015 年 6 月
於北京上园村

第九编目录

不可分离外平面地图节点剖分计数

刘　彦　佩
（中国科学院应用数学研究所，北京）

全文只研究带根的地图[1-3]．记 $\mathscr{N}$ 为所有有根不可分离外平面地图的集合．对于 $N\in\mathscr{N}$，令 $v=v(N)$ 是根节点，$r=r(N)$ 是根边，$m(N)$ 是节点 v 的次，和 $n_i(N)$，$i\geqslant 1$，次为 i 的非根节点数．进而，应该指出，仅由一个节点而无边所成的地图，即节点地图，和仅有一边连同它的两个不同的端点所成的地图，即杆地图，均不在 $\mathscr{N}$ 中．但仅有一个节点和一条边（即环）所成的地图，称为环地图，却在 $\mathscr{N}$ 中．

这时，我们将 $\mathscr{N}$ 中的地图分为两类．如

$$\mathscr{N}=\mathscr{N}_0+\mathscr{N}_1, \tag{1}$$

其中 $\mathscr{N}_0$ 仅含环地图，记之为 L．

下面，我们就研究 $\mathscr{N}_1$ 的分解．首先，在地图上引进一个新运算．设 N_1，$N_2\in\mathscr{N}$，记 $N_1\sqsubset N_2$ 为 $N_1\cup N_2$ 且具条件：其根与 N_2 同；$N_1\cap N_2=\{v\}$，即根节点；和 N_1 在 N_2 的一个有限面内．可以想像，$N^{\sqsubset k}$ 表示 $N\sqsubset N\sqsubset\cdots\sqsubset N$，其中的 N 出现 k 次．

引理 1　对于任一 $N\in\mathscr{N}$，有且仅有一个整数 $k\geqslant 0$ 使得

$$N\cdot r=L^{\sqsubset k}\sqsubset N',\ N'\in\mathscr{N}, \tag{2}$$

其中 $N\cdot r$ 是在 N 中将 r 收缩到一个节点．

引理 2　若记 $\mathscr{N}_{N'}=\{N|N\in\mathscr{N}，和\ N\cdot r=L^{\sqsubset k}\sqsubset N',\ k\geqslant 0\}$．则，有

$$\mathscr{N}_{N_1'}\cap\mathscr{N}_{N_2'}=\phi, \tag{3}$$

其中 N_1，N_2 在根的意义下是不同构的．

引理 3　$$\mathscr{N}_1=\sum_{N'\in\mathscr{N}}\mathscr{N}_{N'}. \tag{4}$$

再者，对任一 $N'\in\mathscr{N}$，令 $\sigma_v=(e_1,e_2,\cdots,e_{m(N')})$，$e_1=r$，为根节点 v 处的一个旋．则在 σ_v 中出现二相继元素间的线性序 $\langle r,e_2\rangle$，$\langle e_2,e_3\rangle$，$\cdots$ 分别称为第一，第二，$\cdots$ 角．当然，第 $m(N')$ 角与无限面关联．为方便，我们记

$$(N\cdot r)_{(i)}=\sum_{k\geqslant 0}L^{\sqsubset k}\sqsubset N'_{(i)},\ N\in\mathscr{N}_{N'},$$

对于 $1\leqslant i\leqslant m(N')-1$，其中 $M\sqsubset N'_{(i)}$，$M=L^{\sqsubset k}$，系指 $M\sqsubset N'$ 且满足 M 在 N' 的第 i 角间．

引理 4　对任何 $1\leqslant i\neq j\leqslant m(N')-1$ 和 $N'\in\mathscr{N}$，有

$$(N\cdot r)_{(i)}\cap(N\cdot r)_{(j)}=\phi. \tag{5}$$

引理 5　对于任一 $N'\in\mathscr{N}$、我们有

本文 1986 年 1 月 17 日收到

$$\mathscr{N}_{N'} = \sum_{i=1}^{m(N')-1} (N \cdot r)_{(i)}. \tag{6}$$

从而，由引理 1—5，我们可得 $\mathscr{N}_I$ 的如下分解。

引理 6 $$\mathscr{N}_I = \sum_{N' \in \mathscr{N}} \sum_{i=1}^{m(N')-1} \sum_{k \geqslant 0} L^{\subset k} \subset N'_{(i)}. \tag{7}$$

至此，我们可以研究 $\mathscr{N}$ 的依节点剖分的计数函数，

$$h = h(x; y_1, y_2, \cdots) = \sum_{N \in \mathscr{N}} x^{m(N)} \prod_{i \geqslant 0} y_i^{n_i(N)}, \tag{8}$$

有时，也记 $h = h(x)$. 自然，$h_0 = h_0(x; y_1, y_2, \cdots)$ 和 $h_I = h_I(x; y_1, y_2, \cdots)$ 分别表示 h 与 $\mathscr{N}_0$ 和 $\mathscr{N}_I$ 有关的部分. 也有时，记 $h_0 = h_0(x)$ 和 $h_I = h_I(x)$.

引理 7 $$h_0 = x^2. \tag{9}$$

引理 8 若用 $z_1, z_2, \cdots$ 分别代替相应根边的非根端的次的变量 $y_1, y_2, \cdots$，则 h_I 是 $z_1, z_2, \cdots$ 的一个线性函数.

证 由引理 6，有

$$h_I = \sum_{N' \in \mathscr{N}} \sum_{k \geqslant 0} (x^{2+k} z_{m(N')+k} + x^{3+k} z_{m(N')+k-1} + \cdots + x^{m(N')+k} z_{2+k}) \prod_{i \geqslant 0} y_i^{n_i(N')}, \tag{10}$$

其中 $z_1, z_2, \cdots$ 与根边的非根端相应. 即所欲证.

进而，若引进一个线性算子 $\mathscr{S}_z$ 作用在 $z_1, z_2, \cdots$ 的任何的线性函数上使得

$$\mathscr{S}_z(z_i) = z^i, \quad i \geqslant 1. \tag{11}$$

则我们可得下面的结论.

引理 9 $$\mathscr{S}_z(h_I) = \frac{xz}{1 - xz} \partial_{x,z}(uh(u)), \tag{12}$$

其中 $$\partial_{x,z} f(u) = (zf(x) - xf(z))/(x - z).$$

证 由(10)式和(11)式，有

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_z(h_I) &= \sum_{N' \in \mathscr{N}} \sum_{k \geqslant 0} \Bigg(x^{m(N')+2k+2} \Bigg[\left(\frac{z}{x}\right)^{m(N')+k} + \left(\frac{z}{x}\right)^{m(N')+k-1} + \cdots + \left(\frac{z}{x}\right)^{2+k} \Bigg] \Bigg) \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(N')} \\ &= \sum_{N' \in \mathscr{N}} \sum_{k \geqslant 0} x^{k+1} z^{k+1} \left(\frac{zx^{m(N')} - xz^{m(N')}}{x - z} \right) \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(N')} \\ &= \frac{xz}{1 - xz} \partial_{x,z}(uh(u)).\end{aligned}$$

即得引理.

定理 1 $$h = x^2 + \mathscr{S}_y \left(\frac{xy}{1 - xy} \partial_{x,y}(uh(u)) \right). \tag{13}$$

证 由于 $h = h_0 + h_I$，和引理 7 与 9，即可得定理.

引理 10 若用 $h = (h_2, h_3, \cdots)$ 也表示一个无限维的向量，其中的分量 h_i，$i \geqslant 2$，是函数 $h = h(x)$ 作为 x 的级数 x^i 项的系数，则向量 h 满足如下的线性方程组：

$$h(I - Y) = u_1, \tag{14}$$

其中 u_i, $i=1$, 是除第 i 个分量为 1 其他均为零的无限维的单位向量；和 $Y=(y_{ij})$, i, $j\geqslant 1$, 是一个对称阵，即 $y_{ij}=y_{ji}$, 且

$$y_{ij}=\sum_{k=0}^{i-1} y_{j-i+2k+2}, \quad j\geqslant i\geqslant 1. \tag{15}$$

定理 2 向量 h 具有如下的显式：

$$h=u_1\sum_{i\geqslant 0} Y^i. \tag{16}$$

往下，我们要讨论 d- 地图，也就是说，这样的有根不可分离外平面地图，其中所有节点的次均不大于 d、同时，经过依次地收缩根边后所得的地图中也无不可分离片有次大于 d 的节点。令 $h^{(d)}=h_2^{(d)}x^2+h_3^{(d)}x^3+\cdots+h_d^{(d)}x^d$ 为 d 地图的节点剖分计数函数。

定理 3 对于 2 地图，有

$$h^{(2)}=h_2^{(2)}x^2=x^2/(1-y_2). \tag{17}$$

引理 11 对于任何 $i\geqslant 0$, 总有

$$\begin{pmatrix} y_2 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}^i=\begin{bmatrix} \sum\limits_{0\leqslant l\leqslant\lfloor i/2\rfloor}\binom{i}{2l} y_2^{i-2l}y_3^{2l} & * \\ \sum\limits_{0\leqslant l\leqslant\lfloor (i-1)/2\rfloor}\binom{i}{2l+1} y_2^{i-2l-1}y_3^{2l+1} & * \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中 * 处之值由对称性决定。

定理 4 对于 3 -地图，我们可得到

$$\left.\begin{aligned} h_2^{(3)}&=\sum_{l\geqslant 0}\sum_{t\geqslant 0}\binom{t+2l}{2l} y_2^t y_3^{2l}; \\ h_3^{(3)}&=\sum_{l\geqslant 0}\sum_{t\geqslant 0}\binom{t+2l+1}{2l+1} y_2^t y_3^{2l+1}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

推论 1 对于非根节点的次仅为 3 的 3 -地图，有

$$h_2^{(3)}=\frac{1}{(1-y_3^2)}; \quad h_3^{(3)}=\frac{y^3}{(1-y_3^2)}. \tag{20}$$

只要愿意，人们可以继续作下去．不过，当 $d\geqslant 4$, 在计算上会愈加复杂．

然而，我们还要转到一般情形．即一般的有根外平面地图而不是 d 地图．为简便，也只以非根节点的次仅为 3 的情况作为例子，这时，

$$\begin{aligned} &Y=Z=(z_{ij}),\ i,\ j\geqslant 1, \\ &z_{ij}=\begin{cases} y_3, & \text{当 } |i-j|=1; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \end{aligned} \tag{21}$$

引理 12 令 $Z^k=(z_{ij}^{(k)})$, i, $j\geqslant 1$. 则，有

$$z_{ij}^{(k)}=\begin{cases} \binom{k}{j-1} y_3^k, & i+j=k+2; \\ \binom{k}{\frac{k-|j-i|}{2}} y_3^k, & \begin{aligned}&i+j\equiv i-j\equiv k(\mathrm{mod}\,2),\\ &|i-j|\leqslant k,\ i+j>k+2;\end{aligned} \\ \left[\binom{k}{j+s-1}-\binom{k}{s-1}\right] y_3^k, & \begin{aligned}&i+j=k-2s,\\ &s\geqslant 1,\ i+j<k+2;\end{aligned} \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \tag{22}$$

对于任何 $k \geqslant 0$.

定理 5 3-正则和近 3-正则不可分离外平面地图的计数函数依根节点次有如下显式:

$$h_{2l} = \sum_{\substack{k \geqslant l-1 \\ k \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)}} \frac{2l}{k+l+1} \binom{2k+1}{k+l} y_3^k, \quad l \geqslant 1;$$

$$h_{2l+1} = \sum_{\substack{k \geqslant l \\ k \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)}} \frac{2l+1}{k+l+1} \binom{2k}{k+l} y_3^k, \quad l \geqslant 1.$$

由此,我们可求出近 3-正则有根不可分离外平面地图计数函数的显式:

$$h = \sum_{i \geqslant 1} x^i \left(\sum_{\substack{k \geqslant \lfloor i/2 \rfloor - 1 \\ k \equiv i (\mathrm{mod} 2)}} \frac{i}{k + \lfloor i/2 \rfloor + 1} \binom{2k+\delta}{k + \lfloor i/2 \rfloor} y_3^k \right), \tag{23}$$

其中 $\delta = 1$, 当 $k = 0(\mathrm{mod} 2)$; 0, 否则.

参　考　文　献

[1] 刘彦佩,科学通报, **30** (1985), 9: 646—649.
[2] 刘彦佩,科学通报, **30** (1985), 20: 1521—1524.
[3] Tutte, W. T., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74**(1968), 64—74.

Vol. 31 No. 14 KEXUE TONGBAO July 1986

A FUNCTIONAL EQUATION FOR ENUMERATING NONSEPARABLE EULERIAN PLANAR MAPS WITH VERTEX PARTITION

LIU YANPEI (刘彦佩)
(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing*)
Received July 12, 1985.

In regard of the enumeration of rooted Eulerian planar maps with vertex partition, the first result for enumerating rooted general Eulerian planar maps with vertex partition was achieved in the sixties[1]. Since then, people would think of the nonseparable case. Up to now, no result has been obtained in this aspect. This paper provides a functional equation satisfied by the generating function of enumerating rooted nonseparable Eulerian planar maps with vertex partition.

A map is said to be Eulerian if no valency of its vertices is odd. And, rooted means choosing an edge in a map with a direction given. The rooted edge, or root-edge in a map is denoted by $A=\langle p,q\rangle$, where p is said to be the root-vertex and the face on the left-hand side of A is the root-face. Two maps are said to be distinct if there is no isomorphism preserving the rooting rules between them.

Let $\mathscr{M}$ be the set of all the rooted nonseparable planar maps. And, let $2m(M)$ be the valency of the root-vertex and $n_{2i}(M)$ be the number of non-rooted vertices with valency $2i$ for any $M\in\mathscr{M}$.

Lemma 1.

$$\mathscr{M}=\mathscr{M}_0+\mathscr{M}_I, \tag{1}$$

where $\mathscr{M}_0$ consists of only one map, the loop map; $\mathscr{M}_I$, all the others in $\mathscr{M}$.

Let us write

$$g=g(x;y_2,y_4,\cdots)=\sum_{M\in\mathscr{M}}x^{2m(M)}\prod_{i\geq 1}y_{2i}^{n_{2i}(M)}, \tag{2}$$

which is the enumerating function of $\mathscr{M}$ with vertex partition. Similarly, let $g_0=g_0(x;y_2,y_4,\cdots)$ and $g_I=g_I(x;y_2,y_4,\cdots)$ be the contributions of $\mathscr{M}_0$ and $\mathscr{M}_I$ to g respectively.

Lemma 2.

$$g_0(x;y_2,y_4,\cdots)=x^2. \tag{3}$$

In order to determine g_I, several lemmas are needed to introduce as follows.

Lemma 3. *For any $M\in\mathscr{M}_I$, we have*

$$M=\biguplus_{1\leq i\leq k}M_i,\ k\geq 1, \tag{4}$$

where $M_i \in \mathscr{M}$, *and* $M_i \cap M_j = \{A\}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$; $M_1 \uplus_A M_2$ *means that* M_1 *is in the finite face of* M_2, *which is incident to the root-edge* A; *and recursively,*

$$\mathop{\uplus_A}_{1 \leqslant i \leqslant s} M_i = \Big(\mathop{\uplus_A}_{1 \leqslant i \leqslant s-1} M_i \Big) \uplus_A M_s,$$

for $3 \leqslant s \leqslant k$.

Let $M' = M \cdot A$ be the resultant map of contracting A in M for $M \in \mathscr{M}$. Then, we have

Lemma 4.

$$M' = \mathop{\uplus_A}_{1 \leqslant i \leqslant k} M'_i, \tag{5}$$

for any $M \in \mathscr{M}_I$ *with the form* (4), *where* $M'_i = M_i \cdot A \in \mathscr{M}$ *and* $M'_i \cap M'_j = \{p\}$, p *is the root-vertex,* $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$; $M'_1 \dot\cup M'_2$ *is the union with only one vertex, the root-vertex* p *in commom,* M'_1 *being in the face of* M'_2, *which corresponds to the finite one incident to* A *in* M_2; *and recursively,* $\mathop{\dot\bigcup}_{1 \leqslant i \leqslant s} M'_i = \Big(\mathop{\dot\bigcup}_{1 \leqslant i \leqslant s-1} M'_i \Big) \dot\cup M'_s$, *for* $3 \leqslant s \leqslant k$.

For each $M \in \mathscr{M}$, the edges incident to p are denoted by $e_1, e_2, \cdots, e_{2m(M)}$ in the clockwise direction around p from e_1 being the root-edge. And, the angle between e_s and e_{s+1} is said to be the sth. Further, for each $M \in \mathscr{M}$, $M^{(s)}$ denotes its first s edges at the root-vertex being marked, and for any two maps $M_1, M_2 \in \mathscr{M}$, $M_1^{(s_1)} \dot\cup M_2^{(s_2)}$ denotes $M_1 \dot\cup M_2$ with M_1 being in the s_2th angle of M_2. Similarly, we can get the meaning of $\mathop{\dot\bigcup}_{1 \leqslant i \leqslant k} M_i^{(s_i)}$, for $k \geqslant 3$.

Lemma 5. *Let* $\psi^{(s_1, \cdots, s_k)}_{(M_1, \cdots, M_k)} = \Big\{ \mathop{\dot\bigcup}_{1 \leqslant i \leqslant k} M_i^{(s_i)} \,\Big|\, M_i \in \mathscr{M},\ 1 \leqslant i \leqslant k \Big\}$, *and let*

$$\mathscr{M}_I\langle A \rangle = \{M' \mid M' = M \cdot A, M \in \mathscr{M}_I\}.$$

Then, we have

$$\mathscr{M}_I\langle A \rangle = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{M_i \in \mathscr{M}} \sum_{\substack{1 \leqslant s_i \leqslant 2m(M_i)-1 \\ 1 \leqslant i \leqslant k}} \psi^{(s_1, \cdots, s_k)}_{(M_1, \cdots, M_k)}. \tag{6}$$

Lemma 6.

$$|\mathscr{M}_I| = |\mathscr{M}_I\langle A \rangle|. \tag{7}$$

Now, let us introduce a function

$$f(z) = \sum_{M \in \mathscr{M}} x^{2m(M)} z^{2j(M)} \prod_{i \geqslant 1} y^{n'_{2i}{}^{2i'}(M)}, \tag{8}$$

where $2\,j\,(M)$ is the valency of q and $n'_{2i}(M) = n_{2i}(M) - 1$, if $i = j$; $n_{2i}(M)^{-1}$, otherwise, and a linear operator $\mathscr{S}_z$ as follows:

$$\mathscr{S}_z(z^t) = z_t, \ t \geqslant 1. \tag{9}$$

Lemma 7.

$$g_I(x; y_2, y_4, \cdots) = \mathscr{S}_y(f(y)). \tag{10}$$

For any function $h(x)$, we may define two types of (x, z)-differences of $h(x)$, denoted by $\delta_{x,z}h$ and $\partial_{x,z}h$ as follows:

$$\delta_{x,z}h = (h(x) - h(z))/(x^2 - z^2), \tag{11}$$

$$\partial_{x,z}h = (z^2h(x) - x^2h(z))/(x^2 - z^2). \tag{12}$$

Lemma 8.

$$f(z) = x^2z^2\delta_{x,z}g/((1 - \partial_{x,z}g)^2 - x^2y^2\delta_{x,z}g). \tag{13}$$

Proof. For convenience, let us write

$$\mathscr{M}_l^{(k)}\langle A\rangle = \left\{ \dot{\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k}} M_i \,|\, M_i \in \mathscr{M}, 1 \leqslant i \leqslant k \right\},\ k \geqslant 1,$$

then $\mathscr{M}_l\langle A\rangle = \sum_{k\geqslant 1}\mathscr{M}_l^{(k)}\langle A\rangle$. From (8) and Lemma 6, we have

$$f(z) = \sum_{k\geqslant 1}\sum_{M\in\mathscr{M}_l^{(k)}} x^{2m(M)-2j(M)}z^{2j(M)}\prod_{i\geqslant 1} y_{2i}^{n_{2i}(M)},$$

where $\mathscr{M}_l^{(k)}$ is the subset of $\mathscr{M}_l$ in which each map has the form (4) for the given k. By using Lemma 6,

$$= xz\sum_{k\geqslant 1}\sum_{M'\in\mathscr{M}_l^{(k)}\langle A\rangle} x^{2m(M')-s(M')}z^{s(M')}\prod_{i\geqslant 1} y_{2i}^{n_{2i}(M')},$$

where $s(M')$ is the number of marked edges, which correspond to those contributing to $2j(M)$, $M' = M\cdot A$, of course, $s(M') = 2j(M) - 1$. By using Lemmas 4 and 5,

$$= xz\sum_{k\geqslant 1}\sum_{\substack{M_i\in\mathscr{M},\,1\leqslant s_i\leqslant 2j(M_i)-1\\ 1\leqslant i\leqslant k}} x^{(2m(M_1)-s_1)+\cdots+(2m(M_k)-s_k)}$$

$$\times z^{s_1+s_2+\cdots+s_k}\prod_{i\geqslant 1} y_{2i}^{n_{2i}(M_1)+\cdots+n_{2i}(M_k)}.$$

By using the fact that the number of M_i with $s_i = s_i(M_i) = 1 \pmod 2$ must be odd as $s(M') = 1 \pmod 2$,

$$= xz\sum_{k\geqslant 1}\sum_{0\leqslant l\leqslant [k/2]}\binom{k}{2l+1}\left(\sum_{M\in\mathscr{M}} x^{2m(M)}\left(\left(\frac{z}{x}\right) + \left(\frac{z}{x}\right)^3 + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{z}{x}\right)^{2m(M)-1}\right)\prod_{i\geqslant 1} y_{2i}^{n_{2i}(M)}\right)^{2l+1}\left(\sum_{M\in\mathscr{M}} x^{2m(M)}\left(\left(\frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^4 + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{z}{x}\right)^{2m(M)-2}\right)\prod_{i\geqslant 1} y_{2i}^{n_{2i}(M)}\right)^{k-2l-1}$$

$$= xz\sum_{k\geqslant 1}\sum_{0\leqslant l\leqslant [k/2]}\binom{k}{2l+1}\left(\sum_{M\in\mathscr{M}}(xz(x^{2m(M)} - z^{2m(M)})/(x^2 - z^2))\right.$$

$$\left.\times\prod_{i\geqslant 1} y_{2i}^{n_{2i}(M)}\right)^{2l+1}\left(\sum_{M\in\mathscr{M}}((z^2x^{2m(M)} - x^2z^{2m(M)})/(x^2 - z^2))\right.$$

$$\left.\times\prod_{i\geqslant 1} y_{2i}^{n_{2i}(M)}\right)^{k-2l-1}.$$

By using (11) and (12),

$$= xz\sum_{k\geq 1}\sum_{0\leq l\leq [k/2]}\binom{k}{2l+1}(xz\delta_{x,z}g)^{2l+1}(\partial_{x,z}g)^{k-2l-1}$$

$$= xz\Big(\sum_{k\geq 1}((\partial_{x,z}g + xz\delta_{x,z}g)^k - (\partial_{x,z}g - xz\delta_{x,z}g)^k)\Big)\Big/2$$

$$= \frac{xz}{2}\left(\frac{\partial_{x,z}g + xz\delta_{x,z}g}{1-\partial_{x,z}g - xz\delta_{x,z}g} - \frac{\partial_{x,z}g - xz\delta_{x,z}g}{1-\partial_{x,z}g + xz\delta_{x,z}g}\right)$$

$$= xz(xz\delta_{x,y}g/((1-\partial_{x,y}g)^2 - (xz\delta_{x,y}g)^2)).$$

And the lemma follows.

Theorem 1.

$$g = x^2 + \mathscr{S}_y(x^2y^2\delta_{x,y}g/((1-\dot{\partial}_{x,y}g)^2 - (x^2y^2\delta^2_{x,y}g))). \tag{14}$$

Proof. From Lemma 1, it is seen that $g = g_0 + g_1$. And, in view of Lemmas 2,7 and 8, the theorem is obtained.

Now, we may see that Eq. (14) here is much different from (13) in [2], but related to (3.9) in [3]. However, it seems that the appearance of $\mathscr{S}_y$ would probably involve much difficulty in solving it.

In what follows, we only investigate certain interesting cases on Eulerian d-maps as defined in [2], for each map M of which, there is no vertex with its valency greater than d in M and all the blocks of $M' = M\cdot A$.

Let $g^{(2)}(x)$ be the generating function of Eulerian 2-maps, then we have

Theorem 2.

$$g^{(2)}(x) = (1-y_2)^{-1}x^2. \tag{15}$$

Proof. If $g^{(2)}(x) = G_2(y_2)x^2$ is assumed, then from (14), we may find that $G_2(y_2)$ satisfies the equation $G_2(y_2) = 1 + y_2G_2(y_2)$. The theorem follows.

As for Eulerian 4-maps, if their generating function with vertex partition is denoted by $g^{(4)} = Ax^2 + Bx^4$, where $A = A(y_2, y_4)$, $B = B(y_2, y_4)$ are the corresponding generating function of those with the valency of the root-vertex being two and four respectively, then from (14), we may find

Lemma 9. *A and B satisfy the following equations simultaneously*:

$$A = 1 + y_2A + y_4B\,;B = 2y_4AB + y_4A^3 + y_2B. \tag{16}$$

Lemma 10. *B satisfies the following third equation*:

$$B = \frac{y_4}{(1-y_2)^3} + \left(\frac{2y_4}{1-y_2} + \frac{3y_4^2}{(1-y_2)^3} + y_2\right)B + \left(\frac{2y_4^2}{1-y_2} + \frac{3y_4^3}{(1-y_2)^3}\right)B^2 + \frac{y_4^4}{(1-y_2)^3}B^3. \tag{17}$$

Lemma 11. *Eq*. (17) *has a solution as follows*:

$$B = \sum_{n\geq 1}\sum_{l\geq \lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\sum_{i=\max(0,n-l-1)}^{[(n-1)/2]}\frac{(n+l-1)!}{n!(l+i-n+1)!(n-2i-1)!i!}$$

$$\times \frac{y_4^n}{(1-y_2)^{3n}}\left(y_3+\frac{2y_4}{1-y_2}+\frac{3y_4^2}{(1-y_2)^3}\right)^{l+i-n+1}\left(\frac{2y_4^2}{1-y_2}+\frac{3y_4^3}{(1-y_2)^3}\right)^{n-2i-1}$$
$$\times \frac{y_4^{4i}}{(1-y_2)^{3i}}. \tag{18}$$

Proof. In view of Lemma 10, by using the Lagrange theorem, we may obtain

$$B=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{y_4}{(1-y_2)^3}\right)^n\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left(1-y_2-\frac{2y_4}{1-y_2}-\frac{3y_4^2}{(1-y_2)^3}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2y_4^2}{1-y_2}+\frac{3y_4^3}{(1-y_2)^3}\right)\xi-\frac{y_4^4}{(1-y_2)^3}\xi^2\right)^{-n}_{\xi=0}.$$

Then, by using the binomial and polynomial expansion theorems, the lemma may be derived.

Theorem 3.

$$A=(1+y_4B)/(1-y_2) \tag{19}$$

$$B=\sum_{k\geqslant 0}\sum_{t\geqslant 1}\phi(k,t)y_2^k y_4^t. \tag{20}$$

where $\phi(k,t)$ is the summation of

$$\frac{2^{4n+2j+2s-t-2i-3^{3}_{s}-3n-j-s+2}(n+1-1)!}{n!i!(l+i-n-j-s+1)!j!s!(t-3n-j-2s+2)!(4n+j+2s-t-2i-3)!}$$
$$\times\frac{(2t+k-n-l+1)!}{(2t-2n-j-s+i+2)!(k-l-i+n+j+s-1)!}$$

over all $(n,i,l,j,s)\in R=\{(n,i,l,j,s)\mid 1\leqslant n\leqslant\lfloor(t+2)/3\rfloor,\ 0\leqslant i\leqslant\lfloor(n-1)/2\rfloor,$ $\max(n-i-1,4n-t-i-3,\lceil(t+1)/2\rceil-n)\leqslant l\leqslant t-2n-i+k+1,\max(0,$ $n+2l+2i-t-2k)\leqslant j\leqslant\min(l+i-n+1,\ 2n+2l-t-1,\ t-3n+2),$ $\max(0,\ l+i-n-j-k+1,\ \lceil(t+1-j)/2\rceil-2n+i+1)\leqslant s\leqslant\min(l+i-$ $n+1-j,\lfloor(t-n-j)/2\rfloor-n+1)\}$.

Even though it is somewhat complicated in the expression of (20), the result is favorable to the calculation since all the terms involved are positive. However, the proof of the theorem has no much difficulty in spite of the complication with the derivation.

The author would like to thank Prof. W. T. Tutte for provoking his interest in the problem through the conversations when he worked in the University of Waterloo.

References

[1] Tutte, W. T., *Canad. J. Math.*, 14(1962), 708—722.
[2] Liu Yanpei, *Kexue Tongbao*, 31(1986), 73—77.
[3] ————, Enumeration of rooted nonseparable bipartite planar maps (to appear).

关于有根 3-正则平面地图的色和方程

刘 彦 佩
（中国科学院应用数学研究所，北京）

关于色和，Tutte 于 1973 年发表第一篇文章，是对于有根平面三角地图，即极大平面地图[1]. 于 1984 年,本文作者讨论了更一般的情况[2],即有根不可分离的平面地图. 这篇文章在于提供有根 3-正则平面地图色和函数所满足的方程. 为此，我们先研究有根近 3-正则的情况. 所谓近 3-正则是指至多除一个节点例外,其他节点的次皆 3. 这个例外的节点就是根节点. 它的次为 $s \geqslant 2$.

令 $\mathscr{M}$ 为所有有根近 3-正则平面地图的集合. 对于 $M \in \mathscr{M}$，记 $A = \langle \vartheta, \alpha \rangle$ 为根边，ϑ 为根节点，而 β，γ 为与 α 相邻的另外二节点且使得 $\langle \alpha, \gamma \rangle$ 在根面的边界上并与 A 同向.

进而,对于 $M \in \mathscr{M}$，令 $\dot{M} = M - \alpha$. 我们定义一组运算，记为 $Op_{(\chi,\eta)}$，使随 χ, η 将 $\dot{M}$ 形变. 其中 $\chi = +$，或 · 分别指将 ϑ, β 连一条边，或将它们合为一个节点. 相仿地，$\eta = +$，或 · 分别指连边 (ϑ, γ) 或将它们合而为一. 又，$O_{p(\frown)}\dot{M}$ 表示在 $\dot{M}$ 上连边 (β, γ) 所得的地图.

引理 1 对于 $M \in \mathscr{M}$，总有

$$\begin{aligned} P(M;\lambda) = (\lambda-1)[P(Op_{(\cdot,+)}\dot{M};\lambda) + P(Op_{(+,\cdot)}\dot{M};\lambda) + P(Op_{(\cdot,\cdot)}\dot{M};\lambda)] \\ + (\lambda-2)P(Op_{(+,+)}\dot{M};\lambda) - P(Op_{(\frown)}\dot{M};\lambda), \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $P(M;\lambda)$ 为M的色多项式.

证 对于 M，记 $M-E$，$M \cdot E$ 分别为去掉,收缩边E所得的地图. 只要适当地选 E，反复用公式

$$P(M;\lambda) = P(M-E;\lambda) - P(M\cdot E;\lambda)$$

即可导出此引理.

对于 $\mathscr{M}$，我们引进其色和函数为

$$g = g(x, y, z; \lambda) = \sum_{M \in \mathscr{M}} P(M;\lambda) x^{p(M)} y^{r(M)} z^{s(M)}, \tag{2}$$

其中 $p(M)$，$r(M)$，$s(M)$ 分别为非根节点数,根面的次和根节点的次. 由引理 1，可得

$$g = (\lambda-2)g_{(+,+)} + (\lambda-1)(g_{(\cdot,+)} + g_{(+,\cdot)} + g_{(\cdot,\cdot)}) - g_{(\frown)}, \tag{3}$$

其中

$$g_{(\chi,\eta)} = \sum_{M \in \mathscr{M}} P(Op_{(\chi,\eta)}\dot{M};\lambda) x^{p(M)} y^{r(M)} z^{s(M)}, \tag{4}$$

$$(\chi, \eta) \in \mathscr{S} = \{(+,+), (\cdot,+), (+,\cdot), (\cdot,\cdot), (\frown)\}.$$

本文 1985 年 12 月 25 日收到.