21世纪高等学校规划教材

第三届中国大学出版社图书优秀教材

微积分 第2版

WEI JI FEN Second Edition

主　编　朱文莉　向开理

主　审　李尚志

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

策 划 人：张保林
责任编辑：张保林
封面设计：赫　健

微积分 第2版

WEI JI FEN Second Edition

ISBN 978-7-5635-4852-1

9 787563 548521 >

定价：45.00元

21世纪高等学校规划教材

第三届中国大学出版社图书优秀教材

微积分

(第2版)

主　编　朱文莉　向开理
副主编　苏　丽　代宏霞
方　敏　徐　松
主　审　李尚志

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是根据教育部颁布的高等学校财经类专业核心课程“经济数学基础——微积分”教学大纲和数学与统计学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，结合编者长期在经济类高校担任“经济数学”课程教学和科研工作的经验而编写的，同时参考了近年来经济管理类硕士研究生入学统一考试数学考试大纲.

本书在内容取舍上尤其注重数学与经济学的有机结合，强调微积分的概念及有关原理在经济学中的应用，力图在保持传统教材优点的基础上，把微积分的基本原理和经济学的相关知识恰当结合，以便有利于课程的讲授与学习，让学生掌握一些常用的数学方法以及基本的经济分析方法，为后继课程提供必要的基础知识和基本技能的训练. 同时注意培养学生的数学意识和使用数学的能力.

全书共10章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程与差分方程.

本书可作为高等财经院校各专业、普通高等院校经管类专业的教学教材，也可作为对经管数学感兴趣的读者的自学教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/朱文莉，向开理主编. —2版-- 北京：北京邮电大学出版社，2016.8

ISBN 978－7－5635－4852－1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①朱… ②向… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第178265号

书　　名	微积分(第2版)
主　　编	朱文莉　向开理
策 划 人	张保林
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真)
网　　址	www3.buptpress.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	23.5
字　　数	585千字
版　　次	2016年8月第2版　2016年8月第1次印刷

ISBN 978－7－5635－4852－1　　定价：45.00元

经管数学系列精品教材

编委会

第二版前言

本书的第二版是在第一版的基础上，主要作了如下的修改.

1. 在保持本书第一版优点、特色的前提下，适当降低难度，删除过于繁杂的例题、习题，更好地适应所面向对象院校使用学习.

2. 为了提高本书的特色，本书中的专有名词、人名、重要概念、定理等，加注上英文翻译，有利于中外合作专业使用.

3. 对本书第一版中习题做了较多的调整，将每节习题和总习题都分为(A)、(B)两部分，(A)部分为读者必做的基础部分，而(B)部分是提高训练部分，供读者选做.

4. 根据本书第一版 2012 年出版以来广大同行和读者在教学实践中的意见和建议，进行了局部修订和完善.

本版修订工作由朱文莉、向开理、代宏霞、方敏、苏丽、徐松完成. 全书由朱文莉负责统稿和选稿. 北京航空航天大学的李尚志教授认真审阅了本书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢！新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正.

编　者

2016. 8

第一版前言

微积分是财经类院校各专业的一门理论基础课，它处于基础地位，起着奠基的作用. 而微积分学方法在经济分析中的应用可以让经济管理类专业学生初步认识和掌握一些基本的数量经济分析方法，这对于学生进一步的数量经济方面后续课程的学习具有重大意义.

本书是根据教育部颁布的高等学校财经类专业核心课程“经济数学基础——微积分”教学大纲和数学与统计学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，同时参考了近年来经济管理类硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，由具有多年教学实践经验的教师编写而成.

本书在内容取舍上尤其注重数学与经济学的有机结合，强调微积分的概念及有关原理在经济学中的应用，力图在保持传统教材优点的基础上，把微积分的基本原理和经济学的相关知识恰当结合，更有利于课程的讲授与学习，让学生掌握一些常用的数学方法以及基本的经济分析方法，为后继课程提供必要的基础知识和基本技能的训练. 同时注意培养学生的数学意识和使用数学的能力.

本书配备习题的原则是由浅入深、层次分明、题型全面. 旨在培养读者的理解能力和应用能力. 为此，在每节后面，配有一定数量的习题；在每章后面还配有一定数量的综合习题，以供读者选用. 书末给出了习题参考答案，供读者参考. 另外，本教材配有《微积分学习指导》、电子课件，供教师教学与学生学习参考使用.

本教材的教学时数为 120 学时左右，打 * 号的内容为选学内容. 作为基本教材，授课教师可根据授课专业及不同班级在内容上作适当的调整. 比如 § 7.1 中关于空间曲面与方程的讲解，授课教师可略去证明，仅给出相关的结论即可.

本书由朱文莉、向开理主编，代宏霞、方敏为副主编，涂晓青、白淑敏、崔红卫、吴曦、李楠、张敏、苏远琳、金铭、张开敏、曾昭惠、秦冶、张杰、张紫莎、陈嘉璐、熊明辉等老师参与了部分编写工作.

北京航空航天大学的李尚志教授认真审阅了本书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢.

借本书出版之机，向关心和支持本书编写工作的西南财经大学经济数学学院领导和北京邮电大学出版社表示衷心的感谢！由于编者水平所限，书中有不妥或错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

目　录

第1章 函 数

在自然界里,有着许多变量(如价格、产量、销量等等),变量之间往往存在着相互依存的关系.函数就是这些相互依存关系的一种抽象,是微积分学研究的基本对象.

本章将介绍函数、函数特性、基本初等函数、初等函数和经济学中的常用函数等概念.

§1.1 区间与邻域

一、区间

本书中所涉及的常用数集有自然数集 **N**,整数集 **Z**,有理数集 **Q** 和实数集 **R**.区间是微积分中用得较多的一类数集,包括有限区间和无限区间,其记号和定义如下:

(1) 开区间:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

(2) 闭区间:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

(3) 半开半闭区间:$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$; $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$;

(4) 无限区间:$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$; $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$; $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$; $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

区间可以在数轴上表示出来,如图 1.1.1 所示.

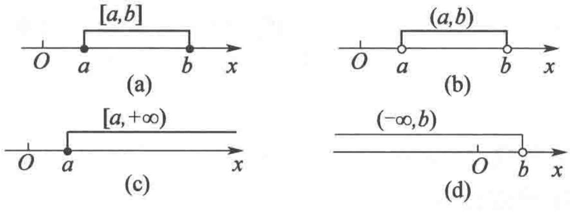

图 1.1.1

二、邻域

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$,其中 $\delta>0$,实数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 称为**点 a 的 δ 邻域**(neighbourhood),记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为**该邻域的中心**,δ 称为**该邻域的半径**(radius).它在数轴上的表示如图 1.1.2(a) 所示.

从邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 而得的数集,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

如图 1.1.2(b) 所示.

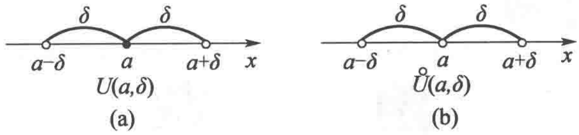

图 1.1.2

为了方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为 a 的**左 δ 邻域**,把开区间$(a,a+\delta)$称为 a 的**右 δ 邻域**.

习题 1.1

(A)

1. 用区间表示下列点集.

(1) $\{x \mid x \neq 0\}$; (2) $\{x \mid |x-4| < 5\}$; (3) $\{x \mid |x+1| > 0\}$; (4) $\{x \mid x^2+5x+6 < 0\}$.

2. 用区间表示下列不等式所表示的 x 的集合.

(1) $|x-5| < 2$; (2) $0 < (x-2)^2 < 4$; (3) $|x+3| > 7$; (4) $|2x+3| > |x-1|$.

(B)

1. 设(a,b)是一个有限的开区间,证明:对任意 $x \in (a,b)$,一定存在 x 的一个邻域 $U(x,\delta) \subset (a,b)$.

2. 用区间表示不等式$\dfrac{||x-1|-1|}{x-3} > 0$的解集.

§1.2 函 数

一、函数的概念

函数是描述变量间相互关系的一种数学模型.例如,质点在作匀速直线运动中,质点运动的路程 s 和它运动的时间 t 以及运动的速度 v 之间有如下的关系式:

$$s = vt,$$

其中 s,t 是两个变量,v 是常数.当变量 t 在一定范围内$(t>0)$任意取定一个数值 t_0 时,依据给定的关系,s 就有一个确定的值 $s_0 = vt_0$ 与之对应.

定义 1.2.1 设 x,y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,对于 D 中的每个数 x,变量 y 依某一对应法则 f 都有唯一确定的实数与之对应,则称 f 是 x 的**函数**(function)(也称 y 是 x 的函数),记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

称 x 为**自变量**(independent variable);称 y 为**因变量**(dependent variable)(或 f 在 x 处的函数值);称集合 D 为函数的**定义域**(domain),记为 $D(f)$ 或 D_f.

当自变量 x 取遍定义域 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**(range),记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

在平面直角坐标系下,点集$\{P(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$称为函数 $y = f(x)$ 的图像.它是

用图像法表示函数的基础.

函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相等的;否则就是两个不同的函数.

函数的表示法主要有三种:表格法、图像法、解析法(公式法),这在中学已经熟悉,不再赘述.

由中学数学我们知道,函数定义域一般分为两种情况:对有实际背景的函数,其定义域根据变量的实际意义确定;对算式表示的函数,其定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合,称为函数的自然定义域.

下面给出求函数定义域的一些原则:

(1) 偶次根式的函数,其根号下的值非负.

(2) 分式函数,分母的值不能为零.

(3) 有限个函数的四则运算得到的新的函数,其定义域为这有限个函数定义域的交集.

(4) 对数函数的真数值必须是正数.

(5) 对有实际背景的函数,应根据实际背景中的变量的实际意义确定.

例 1.2.1　求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义,必须有

$$\begin{cases}3-x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ 5+4x-x^2\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x<3,\\ x\neq n\pi\quad(n\in\mathbf{Z}),\\ -1\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_f=\{x\mid -1\leqslant x<3,x\neq 0\}=[-1,0)\cup(0,3)$.

例 1.2.2　判断下列每对函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=|x|$,　　$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$,　$\varphi(x)=1-x$.

解　(1) 虽然这两个函数的表现形式不同,但它们的定义域均为$(+\infty,-\infty)$,它们在同一 x 处所对应的函数值相同,即它们的对应法则也相同,故是相同的函数.

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$,所以当 $x>1$ 时,$f(x)\neq\varphi(x)$,即这两个函数的对应法则不同,故 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是不同的函数.

二、分段函数

在用函数的解析法表示一个函数时,表示方式是不唯一的,例如函数 $y=\sqrt{x^2}$,它又可以表示为

$$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & x>0.\end{cases}$$

上述函数变成了用几个式子表示的形式，这类函数称为**分段表示的函数**，简称**分段函数**(piecewise-defined function). 因此，当我们说一个函数是分段函数时，是指这个函数的表达方式，而不是指函数的性质. 另外，分段函数表示的是一个函数，而不是几个函数. 下面给出几个常用的分段函数.

例 1.2.3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，图形如图 1.2.1 所示.

例 1.2.4　符号函数(sign function)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，图形如图 1.2.2 所示.

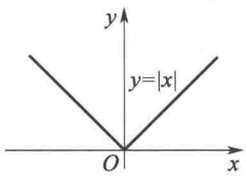

图 1.2.1

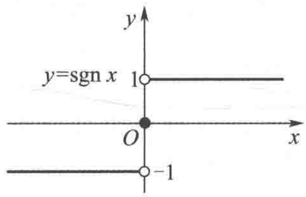

图 1.2.2

例 1.2.5　取整函数

对于任意的实数 x，记 $[x]$ 表示取不超过 x 的最大整数，从而得到定义在$(-\infty,+\infty)$的分段函数 $y=[x]$，称此函数为取整函数. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为整数集.

例如，$[5]=5$，$\left[\dfrac{2}{5}\right]=0$，$[-1.4]=-2$.

取整函数可用分段函数表示为

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

其图形如图 1.2.3 所示.

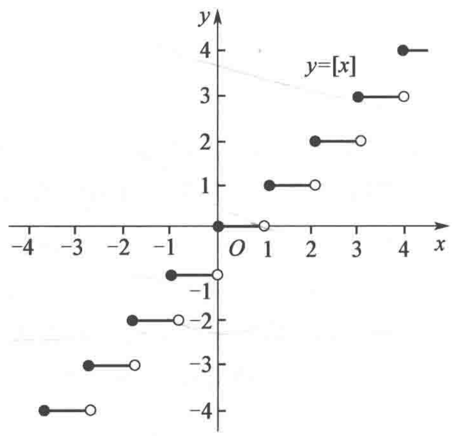

图 1.2.3

例 1.2.6　狄里克莱(Dirichlet) 函数

$$y=\begin{cases}1, & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$.

三、函数的性质

1. 函数的单调性

定义 1.2.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $X\subset D_f$，如果对于区间 X 中的任意两个实数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)(\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 是区间 X 上的**单调增加函数**(**或单调减少函数**);也称函数 $f(x)$ 在区间 X 上**单调增加**(monotonically increasing)(**或单调减少** monotonically decreasing).

如果对于任意 $x_1, x_2 \in X$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)(\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上**单调不减**(**或单调不增**);

单调增加和单调减少函数统称为**单调函数**(monotonic function),或称函数是单调的. 对有些非单调函数 $y = f(x)(x \in D)$,可以将集合 D 划分为若干个不重叠的子集,若这些子集是区间,且函数 $f(x)$ 在这些区间上是单调的,则称这些区间为函数的**单调区间**(monotone interval).

例如,$y = x^2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的,但在区间$[0, +\infty)$ 上是单调增加的,在区间$(-\infty, 0)$ 上是单调减少的,则$(-\infty, 0)$,$[0, +\infty)$ 为函数 $y = x^2$ 的单调区间.

2. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f,区间 $X \subset D_f$,如果存在数 K_1,对任意 $x \in X$,恒有 $f(x) \leqslant K_1$,则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上有**上界**(bounded above);如果存在数 K_2,对任意 $x \in X$,恒有 $f(x) \geqslant K_2$,则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上有**下界**(bounded below).

如果 $f(x)$ 在区间 X 上既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在区间 X 上**有界**(bounded). 即存在 K_1, K_2,对任意 $x \in X$,恒有

$$K_2 \leqslant f(x) \leqslant K_1.$$

易证,$f(x)$ 在区间 X 上有界的充要条件是存在正数 M,对任意 $x \in X$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在区间 X 上**无界**(unbounded). 换句话说,若对任意的正数 M,总存在 $x_0 \in X$,使 $|f(x_0)| > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例 1.2.7　判断 $f(x) = \sin x$ 的有界性.

解　因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,恒有

$$|\sin x| \leqslant 1,$$

所以 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内是有界的.

例 1.2.8　判断 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$ 内的有界性.

解　设 M 为任意的正数,令 $x_0 = \dfrac{1}{1+M}$,则有

$$0 < x_0 < 1 \quad \text{且} \quad f(x_0) = 1 + M > M.$$

即对任何的正数 M,总存在 $x_0 \in X$,使得

$$|f(x_0)| = f(x_0) > M,$$

故 $f(x)$ 在$(0,1)$ 内无界.

3. 函数的奇偶性

定义 1.2.3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于坐标原点对称,如果对于任意 $x \in D_f$,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**(even function);如果对任意 $x \in D_f$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function).

根据定义 1.2.3 易知,偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1.2.4 所示;奇函数的图形关于坐

标原点对称，如图 1.2.5 所示. 并且，奇函数如果在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

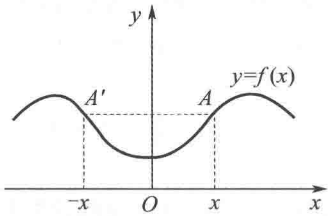

图 1.2.4

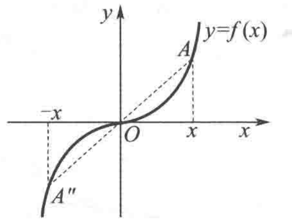

图 1.2.5

4. 函数的周期性

定义 1.2.4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在一个常数 $T>0$，使得对任意 $x\in D_f$，恒有 $(x+T)\in D_f$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)，T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**(period).

一般地，如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 nT(n 为正整数) 也是 $f(x)$ 的周期.

通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**. 例如，$\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数. 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数不一定有最小正周期. 例如，常数函数和狄里克莱函数都是周期函数，但没有最小正周期.

习题 1.2

(A)

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{\ln(x-2)}+\sqrt{5-x}$；

(3) $y=\begin{cases}x, & x>1,\\ 1-x, & |x|\leqslant 1;\end{cases}$　(4) $y=\sin\sqrt{x}$.

2. 下列各题中每对函数是否相同？为什么？

(1) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$；　(2) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$；

(3) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $y=x\sqrt[3]{x-1}$；　(4) $y=1$ 与 $y=\cos^2 x+\sin^2 x$.

3. 试求下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}, x\in(-\infty,1)$；　(2) $y=x+\ln x, x\in(0,+\infty)$.

4. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=3x^2-x^3$；　(2) $y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\ 1+x, & x>0;\end{cases}$

(3) $y=\dfrac{|x|}{x}$；　(4) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

5. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=1+\sin \pi x$；

(3) $y=x\sin^2 x$；　(4) $y=|\cos 3x|$.

6. 证明：$f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数.