

再生核空间应用

——微分方程数值解

周世平 著

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

再生核空间应用 ——微分方程数值解

周世平 著

 哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了再生核的计算理论,详细阐述了多点边值和非局部边值再生核的解析表示与计算方法;本书还介绍了再生核空间理论在微分方程数值解中的应用,介绍了在再生核空间框架下数值求解若干微分方程的定解问题,包括非线性微分方程的多点边值问题、非局部边值问题;本书还将再生核理论应用到微分方程反问题中,包括主系数反问题和源参数反问题。

本书可作为数学专业、计算机专业、工程计算等研究人员的参考书,也可以作为研究生的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

再生核空间应用:微分方程数值解 / 周世平著. —
哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2016.7
ISBN 978-7-5661-1350-4

I. ①再… II. ①周… III. ①核空间—微分方程—数值计算 IV. ①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 190645 号

选题策划 马佳佳
责任编辑 叶 津
封面设计 恒润设计

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 北京中石油彩色印刷有限责任公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 5.75
字 数 157 千字
版 次 2016 年 7 月第 1 版
印 次 2016 年 7 月第 1 次印刷
定 价 24.80 元

<http://www.hrbeupress.com>

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

微分方程定解问题,是研究由微分方程描述某种物理过程或现象,并根据系统的定解条件来确定整个系统的状态变量的变化规律,即研究状态的数学表达式。微分方程定解问题,就其方程而言,有线性 and 非线性微分方程之分;就其定解条件而言,有初值问题、边值问题和初边值问题;就其问题的未知项而言,有正问题和反问题。

本书探讨了用再生核方法数值求解微分方程定解问题,既有正问题,也有反问题。方程以非线性为主,边界选择非局部多点边值、积分边界为处理重点。用再生核方法数值求解微分方程定解问题,构建能够“吸收”初边值条件的再生核空间,将微分方程的定解问题转化为等价的算子方程。在再生核空间里,将微分方程的精确解用再生核空间的再生核解析表示,最后,对算子方程使用逼近算法求解。由此可见,构造满足初边值条件的再生核空间、有效地求出再生核空间的再生核成为能否使用再生核方法的关键。

近 20 年来,再生核方法广泛地应用到微分方程定解领域。1986 年,崔明根给出了两点边值的再生核的解析表达式,为再生核方法求解微分方程的定解问题奠定了基础。众多学者先后对各类初边值的线性、非线性问题进行了探索,其中边界条件涉及两点边值、线性边界、周期边界。2008 年,林迎珍给出了计算非局部积分边界条件的再生核,使得再生核方法延伸到边界为积分条件的微分方程的定解问题。但是,对于非局部多点边界范畴,再生核方法一直难以涉足。其原因是多点边值再生核的计算问题一直困扰着我们,难以解决。

本书是作者多年研究成果的总结。本书创建了点边值再生核空间,提出了求解多点边值再生核的方法,成功地给出了多点边值再生核的解析式,使得用再生核方法求解微分方程多点边值问题成为可能,拓宽了再生核理论的应用范围。在再生核空间框架下数值求解若干微分方程定解问题,包括多点边值问题、反问题 and 非局部边值条件的非线性抛物方程,在构建多点边值问题的再生核空间、计算多点边值再生核的基础上,用再生核方法求解线性、非线性多点边值问题。在再生核空间里,给出了线性 and 非线性多点边值问题的解析解。对非线性多点边值问题设计了迭代法求解,其迭代序列是最佳逼近。而对于反问题,本书将再生核方法引入到反问题领域,尝试了用再生核的方法求解依赖空间或时间变量的主系数反问题和源参数反问题。对于主系数反问题,针对边值条件构建了再生核空间,使用空间分解技术,求出解的解析表达式,并且构造了确定主系数的方程组。而对于源参数反问题,通过特殊的变换,使其反问题等价于再生核空间的非线性算子方程。在再生核空间里设计了迭代算法,其迭代序列是投影算子下的逼近,故是最佳逼近。并且,逼近序列的各阶偏导数亦收敛于解的各阶偏导数。本书还广泛地应用再生核方法于各类非局部边值

条件的非线性抛物方程(组)中,针对各类非局部边值条件创建相应的再生核空间,融复杂的非局部边界于再生核空间中。在再生核空间中给出解的解析表达式,构造解的逼近序列。本书创建了多点再生核计算,突破了长期以来计算再生核方法的定式,丰富了再生核理论,在非线性多点边值问题、积分边值问题、非线性方程组和系数反问题领域应用了再生核方法,拓宽了再生核理论的应用范围。

本书能够出版,感谢笔者的导师崔明根教授多年来给予笔者的教诲与指导。在此也感谢家人和朋友的支持与帮助。

限于作者的学识和能力,本书难免存在缺陷和不足,恳请专家学者指正和批评。

周世平

2016年6月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 微分方程定解问题的数值解法	1
1.1.1 微分方程的定解问题	1
1.1.2 常微分方程定解问题	1
1.1.3 偏微分方程定解问题	2
1.1.4 微分方程定解问题的近似求解	2
1.2 再生核理论的应用	3
1.2.1 再生核的起源与发展	3
1.2.2 再生核方法求解线性问题	4
1.2.3 再生核方法求解非线性问题	4
1.3 再生核计算的发展	5
1.3.1 分段指数形式阶段	5
1.3.2 分段多项式形式阶段	6
1.3.3 积分边值条件阶段	7
1.4 本书的主要内容	7
1.4.1 多点边值问题的再生核的计算	7
1.4.2 多点边值问题的求解	8
1.4.3 抛物方程系数反问题的求解	8
1.4.4 非线性抛物方程的迭代解法	9
1.5 符号说明	10
1.5.1 再生核空间	10
1.5.2 再生核	11
第 2 章 多点边值再生核空间的再生核	12
2.1 再生核及再生核空间的定义	12
2.2 内积空间	12
2.3 再生核空间 $W_3^n[0,1]$	13
2.4 本章小结	17
第 3 章 多点边值问题的求解	18
3.1 引言	18

3.1.1	再生核空间 $W_1[0,1]$	19
3.1.2	再生核空间 $W_3[0,1]$	19
3.2	线性多点边值问题解的表示	19
3.3	非线性多点边值问题的迭代解法	20
3.4	数值算例	24
3.5	本章小结	26
第4章	多点边值问题的求解	27
4.1	引言	27
4.1.1	依赖于空间变量的主系数反问题	28
4.1.2	依赖于时域变量的主系数反问题	28
4.1.3	考虑在抛物方程中确定源参数 $p(t)$ 和解 $w(x,t)$	29
4.2	再生核空间 $W_{(3,2)}(D)$	29
4.3	依赖空间变量主系数反问题的求解	31
4.3.1	系数反问题的变换	31
4.3.2	空间分解	32
4.3.3	数值方法	36
4.3.4	数值算例	38
4.4	依赖时域变量主系数反问题的求解	40
4.4.1	系数反问题的变换	40
4.4.2	空间分解	41
4.4.3	数值算法的实现	44
4.4.4	数值算例	46
4.5	源参数系数反问题的求解	48
4.5.1	系数反问题的变换	48
4.5.2	迭代算法	50
4.5.3	数值算例	55
4.6	本章小结	57
第5章	非线性抛物方程的迭代解法	58
5.1	引言	58
5.2	半线性热传导方程的求解	58
5.2.1	再生核空间 $W_3^{\text{ff}}[0,1]$	59
5.2.2	迭代序列	63
5.2.3	数值算例	63
5.3	非线性伪抛物方程的求解	65

5.3.1	再生核空间 $W_3^{f_0}[0,1]$	66
5.3.2	迭代序列	67
5.3.3	数值算例	67
5.4	非线性抛物线性方程组的求解	69
5.4.1	迭代序列	69
5.4.2	数值算例	70
5.5	本章小结	72
结束语		73
参考文献		74

第1章 绪 论

1.1 微分方程定解问题的数值解法

1.1.1 微分方程的定解问题

物理、力学、工程技术和其他自然科学经常提出大量的微分方程的定解问题。微分方程定解问题,是研究由微分方程描述某种物理过程或现象,并根据系统的状态变量的某些特定条件来确定整个系统的状态变量的变化规律,即研究状态的数学表达式。在数学上,初始条件和边界条件叫作定解条件。微分方程本身表达同一类物理现象的共性,是解决问题的依据;定解条件反映具体问题的个性,提出问题的具体情况。方程和定解条件合为一体,就叫作定解问题。

微分方程差不多是和微积分同时产生的。苏格兰数学家 Napier 很早就讨论过微分方程的近似解。Newton 在建立微积分的同时,试图用级数求解简单的微分方程。瑞士数学家 Bernoulli、Euler,法国数学家 d'Alembert、Lagrange 等人又不断地研究和丰富了微分方程的理论。

1.1.2 常微分方程定解问题

常微分方程的形成与发展是和力学、天文学、物理学,以及其他科学技术的发展密切相关的。数学的其他分支的发展,如复变函数、李群、组合拓扑学等,都对常微分方程的发展产生了深刻的影响,当前计算机的发展更是为常微分方程的应用及理论研究提供了非常有力的工具。

一般地说, n 阶常微分方程的解含有 n 个任意常数。这种解叫作微分方程的通解。通解构成一个函数族。对于常微分方程的定解问题,是指根据实际问题求出其中满足某种指定条件的解,也称为常微分方程的特解。

求通解在历史上曾作为微分方程的主要目标,一旦求出通解的表达式,就容易从中得到问题所需要的特解。但是能够求出通解的情况不多,在实际应用中所需要的多是求满足

某种指定条件的特解。人们研究重点逐渐转移到定解问题上来。大部分的常微分方程求不出十分精确的解,而只能得到近似解。

1.1.3 偏微分方程定解问题

偏微分方程这门学科产生于18世纪,Euler最早提出了弦振动的二阶方程。随后不久,法国数学家d'Alembert提出了特殊的偏微分方程。1746年,d'Alembert证明无穷多种和正弦曲线不同的曲线是振动的模式,这样就由对弦振动的研究开创了偏微分方程这门学科。瑞士数学家Bernoulli也研究了数学物理方面的问题,提出了解弹性系振动问题的一般方法,对偏微分方程的发展产生了比较大的影响。Lagrange也讨论了一阶偏微分方程,丰富了这门学科的内容。19世纪,偏微分方程得到迅速发展。

偏微分方程的解一般有无穷多个,但是解决具体的物理问题的时候,必须从中选取所需要的解,因此,还必须知道附加条件。因为偏微分方程是同一类现象的共同规律的表达式,仅仅知道这种共同规律还不足以掌握和了解具体问题的特殊性,所以就物理现象来说,各个具体问题的特殊性就在于研究对象所处的特定条件,就是初始条件和边界条件。

求偏微分方程的定解问题可以先求出它的通解,然后再用定解条件确定出函数。但是一般来说,在实际中通解是不容易求出的,用定解条件确定函数更是困难。

偏微分方程的解法可以用分离系数法,也叫作傅里叶级数;还可以用分离变数法,也叫作傅里叶变换或傅里叶积分。分离系数法可以求解有界空间中的定解问题,分离变数法可以求解无界空间中的定解问题;也可以用拉普拉斯变换法去求解一维空间的数学物理方程的定解。对方程实行拉普拉斯变换可以转化成常微分方程,而且初始条件也一并考虑到,解出常微分方程后进行反演就可以了。

1.1.4 微分方程定解问题的近似求解

微分方程的定解虽然有以上各种解法,但是我们不能忽视由于某些原因有许多定解问题是不能严格解出的,只可以用近似方法求出满足实际需要的近似程度的近似解。

常用的方法有变分法和有限差分法。变分法是把定解问题转化成变分问题,再求变分问题的近似解;有限差分法是把定解问题转化成代数方程,然后用计算机进行计算;还有一种更有意义的模拟法,它用另一个物理问题的实验研究来代替所研究某个物理问题的定解。虽然物理现象本质不同,但是抽象地表示在数学上是同一个定解问题,如研究某个不规则形状的物体里的稳定温度分布问题,在数学上是拉普拉斯方程的边值问题,由于求解比较困难,可做相应的静电场或稳恒电流场实验研究,测定场中各处的电势,从而也解决了所研究的稳定温度场中的温度分布问题。

现在,常微分方程在很多学科领域内有重要应用,如自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究等,这些问题都可以化为求常微分方程的解。随着物理科学所研究的现象在广度和深度两方面的扩展,偏微分方程的应用范围更加广泛。从数学自身的角度看,偏微分方程的求解促使数学在函数论、变分法、级数展开、常微分方程、代数、微分几何等方面进行发展。

1.2 再生核理论的应用

1.2.1 再生核的起源与发展

再生核的概念始于1908年^[1]Zaremba在讨论调和方程的边值问题时,引进的函数族再生核。一个世纪以来,应用再生核解决微分方程边值问题的思想不断深入,但最为国内外学者所关注的是再生核空间在数值计算方面的优点。1970年,F. M. Larkin^[2]给出了具有再生核的Hilbert函数空间的逼近规则。1974年,M. M. Chawla^[3]又给出了具有再生核的Hilbert函数空间中具有多项式精度的最佳逼近规则。此后,国外的许多学者做了大量再生核方面的研究工作,总结出许多再生核的构造方法^[4-6],以及在再生核空间中利用核函数的再生性求解方程的近似解。文献[7]使用再生核空间方法求解了一类具有混合型导数的Carathéodory-Fejér型的插值问题。文献[8]在 C^n 上一类广义的Bargmann空间中给出了再生核的精确表达形式。文献[9]在量子化的Hilbert空间中构造再生核,转化为哈密尔顿量子化的能量算子,并且使李代数成为具有半范数的显式拟微分算子。文献[10]运用次高斯过程的定义,把次稳定过程定义为均衡稳定的尺度混合过程,并研究它的无穷可分性。这严格依赖于相应稳定过程产生的 L_α 空间的子空间 $H(\mathbf{R})$ 的几何性质。这个空间在次高斯过程的意义下,可看作是一个再生核空间,并给出了核的唯一表达方式及一些几何性质。文献[11]对两个变量的再生核给出了一般化的定义,并概括了相应的理论。文献[12]运用再生核Hilbert空间方法,为球上解析的、压缩的函数子类构造了一种Schur型运算法则,又讨论了其上的Nevanlinna-Pick插值问题。文献[13]运用定义在 C_N 中有界均衡区域上的解析函数构成的Hilbert空间的理论,构造了Bergman核,该核在算子理论中起着越来越重要的作用。值得一提的是日本的学者Saitoh,近年来利用再生核也提出了求解某些方程的数值算法^[14-18]。Brylinski和Ranee^[19]在量化Hilbert空间时构造了再生核研究能量算子的Hamilton量化。Wilson和Raja在SUPA空间研究了全纯离散级数^[20]。Alpay使用族性结构理论证明了再生核空间与正分支多项式^[21]之间的关系。20世纪70年代,有许多用再生核求解应用问题的例子,如信号处理^[22]、随即过程^[23]、估计理论^[24-25]以及小波变换等^[26]。

可以这么说,在各类数值分析的函数空间中,最引人注目的当属再生核空间。

1.2.2 再生核方法求解线性问题

用再生核方法求解线性问题已非常成熟。对于有界线性算子方程 $Lu = f$, 引进再生核空间很容易求出该空间的标准正交基, 然后利用再生性, 我们可以用右端和再生核空间的一组标准正交基精确地表示出线性算子方程的解。线性问题的成功解决是求解非线性问题的基础。过去, 精确地表示非线性方程问题是不可能的, 然而我们现在可以用初等函数精确地表示非线性微分方程的解为级数形式。而这方面的工作始于 20 世纪 80 年代崔明根的再生核空间的逼近论及其数值方法的研究。1986 年, 崔明根首先给出了一个再生核空间 $W_2^2[a, b]$, 证明了这个空间是具有再生核的 Hilbert 空间, 同时给出了再生核的有限表达式^[27], 这开创了国内再生核领域的研究。在文献[28]中, 崔明根、邓中兴在 W_2^1 空间中给出了最佳插值逼近表达式; 在文献[29]中, 崔明根在 W 空间中研究了表面插值。张艳英^[30-31]在二维矩形区域 $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ 上, 定义了再生核空间 $W_2^1(D)$, 在 $W_2^1(D)$ 中讨论了多元插值, 给出了多元插值公式, 进一步给出了一种计算多元插值的迭代公式。文松龙^[32-33]在再生核空间 W 中讨论了最佳插值和有界线性算子的最佳逼近。邓彩霞^[34]在 W_2^1 中讨论了微分算子的样条插值。同时, 崔明根等定义了一些再生核空间, 并在其中讨论线性算子方程的近似求解。在文献[35]中, 崔明根、邓中兴在再生核空间 $W_2^1[a, b]$ 中给出了微分方程定解问题的解的表达式。在文献[36]中, 崔明根、邓中兴又进一步给出了第一类不适定线性算子方程解的解析表达式及近似解。吴勃英^[37-38]定义了一个再生核空间 $W_2^2(D)$, $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$, 并在 $W_2^2(D)$ 中给出了第一类算子方程的近似解。在文献[39]至文献[40]中, 吴勃英给出了再生核空间并用卷积方法给出了再生核的表达式, 解决了高阶再生核构造复杂的问题, 从而给出了高阶偏微分方程的解析解和数值解的表达式。谢树森^[41]给出了再生核空间 $W_2^1[0, +\infty)$, 并在其中给出了积分方程的数值解。李云晖^[42]在再生核空间 $W_2^2[0, \infty)$ 中给出了一类积分-微分方程的精确解。

1.2.3 再生核方法求解非线性问题

近年来, 人们开始在再生核空间中讨论非线性算子方程的数值求解。李春利^[43]在再生核空间 $W_2^1[a, b]$ 中讨论了非线性算子方程

$$AuBu + Cu = f$$

的近似求解问题, 这里 $A, B, C: W_2^1 \rightarrow W_2^1$ 均为有界线性算子。

Hilbert 空间的再生核框架理论在近 10 年来得到了迅速的发展, 并已经被应用于小波

变换^[44]、随机过程处理^[23]、信号处理^[45-46]、机器学习^[47-48]、再生核粒子方法^[49-50]等研究领域。已发表的研究报告显示该方法具有许多突出的特点,适合处理和分析一些非线性问题,并且我们注意到以再生核空间作为框架,对一些以前处理不好的实际问题,甚至没有数值解法的问题,也可以给出有效的数值算法^[51-54]。由此可见,再生核空间还是具有广阔的发展前景的,应在这个方向上继续努力,以期得到更多更好的发展结果。近几年来,林迎珍、李春利、耿发展、杨丽宏等^[55-63]分别就无穷线性方程组的解、奇异边值问题、周期问题、积分边界问题、非线性问题以及波动方程反问题在再生核空间下进行研究并使问题得到解决。由此可见,再生核空间具有广阔的发展前景。

1.3 再生核计算的发展

纵观再生核理论数值求解微分方程定解问题的发展历程,我们得出结论:用再生核方法求解微分方程定解问题的关键是构造满足定解条件的再生核空间,使得在所构建的再生核空间里微分方程定解得以用再生核的性质描述,进一步可以构造其逼近解。由此可见,构造能吸收初边值条件的再生核空间,有效地求解所构空间的再生核解析表达式成为再生核理论在数值求解微分方程定解问题中的一个枢纽。

求解再生核解析表达式历经了分段指数形式、分段多项式形式、积分边值条件三个阶段。

1.3.1 分段指数形式阶段

1986年崔明根给出的 $W_2^1[a, b]$ 空间的再生核的解析表达式为再生核数值分析奠定了基础,开创了数值分析的一个新方向,为数值分析提供了一种新方法。

基本的再生核空间 $W_2^1[a, b]$ 定义如下:

$$W_2^1[a, b] = \{u(x) \mid u(x) \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的一元绝对连续函数, } \in L^2[a, b]\}$$

其内积为

$$\langle u(x), v(x) \rangle_{W_2^1} = \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

其范数为

$$\|u\|_{W_2^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1}}$$

1986年崔明根首次给出了 $W_2^1[a, b]$ 空间的再生核^[27]:

$$R(x, y) = \frac{\cosh(y + x - b - a) + \cosh(|y - x| - b + a)}{2\sinh(b - a)}$$

自此, $W_2^2[a, b]$, $W_2^3[a, b]$ 甚至更高阶的满足各种边值条件的再生核空间的再生核一一求得, 如边值条件为函数值、导数值, 甚至线性边界、周期边界的再生核, 其中区间 $[a, b]$ 可以是有限的, 亦可以是无限的。

崔明根阶段的再生核都是分段指数形式:

$$R(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m c_i(y) e^{ix} & x \leq y \\ \sum_{i=0}^m \bar{c}_i(y) e^{-ix} & x > y \end{cases}$$

正是因为再生核的解析表达式可以求出, 在数值求解微分方程定解问题时, 它可以参与到解的表示和计算中, 但是它还存在着一些弊端: 首先, 它的计算量大。对于 $W_2^m[a, b]$ 的再生核, 当 m 较大时, 计算量大, 甚至达到无法计算的程度。其次, 即使有了再生核的表达式, 但当参与到微分方程数值求解时, 耗时长, 速度慢。再者, 崔明根的再生核空间的内积定义是为方便计算再生核设定的, 因此, 对于空间 $W_2^m[a, b]$ 没有一个统一的内积表达式。

1.3.2 分段多项式形式阶段

分段多项式形式阶段源于林迎珍对内积定义的改进。

定义函数空间 $W_2^m[a, b]$

$$W_2^m[a, b] = \{u(x) \mid u^{(m-1)}(x) \text{ 是绝对连续的}, u^{(m)}(x) \in L^2[a, b], x \in [a, b]\} \quad (1-1)$$

2008 年林迎珍对函数空间 $W_2^m[a, b]$ 给出了统一的内积形式, 对于任意的函数 $u(x)$, $v(x) \in W_2^m[a, b]$

$$\langle u, v \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a) v^{(i)}(a) + \int_a^b u^{(m)}(x) v^{(m)}(x) dx \quad (1-2)$$

$$\|u\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^m}} \quad (1-3)$$

用这样形式的内积计算再生核, 其解析表达式是分段多项式:

$$R(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{2m-1} c_i(y) x^i, & x \leq y \\ \sum_{i=0}^{2m-1} \bar{c}_i(y) x^i, & x > y \end{cases}$$

所以说这是一种最简单形式的再生核,其计算量大大地减少,同时为处理复杂边界条件的再生核奠定了基础。

1.3.3 积分边值条件阶段

2008年,林迎珍探讨了非局部边值条件的再生核空间:

$$W_2^m[a, b] = \{u(x) \mid u(x) \in W_2^m[a, b], \int_a^b \rho(x) u(x) dx = 0, x \in [a, b]\}$$

成功地给出了积分边值条件的计算方法^[64]。这样使再生核的方法可以应用到积分边值条件的微分方程定解问题中,使再生核方法由局部边值延伸到非局部边值。

微分方程定解问题中还广泛存在着—类非局部边值条件,即多点边值条件,但是直到目前为止再生核方法从未涉足这类问题,我们也从未对多点边值问题构造求解这类问题的再生核空间,其原因是,我们没有办法求解计算其再生核、有效地给出多点边值的再生核解析表达式,这就使得再生核方法在这个领域仍是一片空白。

1.4 本书的主要内容

本书主要的目的是研究非局部多点边值再生核解析表达式的计算方法,探讨求解线性和非线性多点边值问题、微分方程反问题、非局部边值条件的非线性微分方程定解问题的再生核求解方法。

1.4.1 多点边值问题的再生核的计算

以三点边值问题为例,构造了多点边值再生核空间,详细叙述了求解多点边值再生核的有效方法,给出了其解析表达式,突破了长期以来两点边值再生核计算的框架,为利用再生核方法求解微分方程多点边值问题创造了可能。

1.4.2 多点边值问题的求解

以二阶线性常微分方程

$$\begin{cases} u^{(2)}(t) + f(t) = 0 & 0 < t < 1 \\ u(0) = ku(\eta) & u(1) = 0 \end{cases}$$

和二阶非线性常微分方程

$$\begin{cases} u^{(2)}(t) + g(t, u) = 0 & 0 < t < 1 \\ u(0) = ku(\eta) & u(1) = 0 \end{cases}$$

三点边值问题为例,构建了多点边值再生核空间。在再生核空间探讨了线性和非线性三点问题的解析表达式,并针对非线性三点边值问题构造了迭代算法。

1.4.3 抛物方程系数反问题的求解

首次将再生核方法引用到反问题领域,考虑了三个抛物方程系数反问题。

1. 依赖于空间变量的主系数反问题

$$\begin{cases} (k(x)u_x)_x - u_t = f(x, t) & (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, 0) = h(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0 & t \in [0, 1] \end{cases}$$

满足附加条件

$$u(x^*, t) = g(t) \quad t \in [0, 1]$$

其中, $x^* \in (0, 1)$ 。

2. 依赖于时域变量的主系数反问题

抛物方程

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x, t) \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

满足初值条件

$$u(x, 0) = h(x) \quad x \in [0, 1]$$

边值条件

$$u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0 \quad t \in [0,1]$$

和附加条件

$$u_x(0,t) = g(t) \quad t \in [0,1]$$

3. 源参数系数反问题

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + qw_x + p(t)w + f(x,t) & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ w(x,0) = h(x) & 0 < x < 1 \\ w(0,t) = 0, w(1,t) = 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

满足附加条件

$$w(x^*,t) = E(t)$$

其中, $f(x,t)$, $h(x)$ 和 $E(t) \neq 0$ 是已知函数, q 是已知常数, 且 $x^* \in (0,1)$ 。

对主系数反问题, 针对边值条件构建再生核空间, 然后在再生核空间中利用空间分解技术分别进行求解依赖于空间和时域变量的主系数反问题。

对源参数反问题, 设计了迭代算法进行求解。

1.4.4 非线性抛物方程的迭代解法

考虑了非局部边值条件的半线性变系数热传导方程

$$\begin{cases} u_t + (au_x)_x + (bu)_x = f(x,t,u) & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 u(x,t) dx = 0, \int_0^1 xu(x,t) dx = 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

非局部边值条件的非线性伪抛物方程

$$\begin{cases} u_t + (a(x,t)u_x)_x = F(x,t,u,u_x,u_{xx}) & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0, \int_0^1 u(x,t) dx = 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

和非线性抛物方程组