

岩土体热力特性与工程效应系列专著

寒区冻土工程 随机热力分析

王 涛 周国庆 王建州 陈 拓 著



科学出版社

寒区冻土工程随机热力分析

王 涛 周国庆 王建州 陈 拓 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是一本关于寒区冻土工程随机热力分析的专著,介绍了作者在该领域的研究成果。全书共分6章:第1章介绍了冻土工程随机热力特性研究意义和现状;第2章建立了冻土土性参数随机场描述方法,提出了实用性更广的三角形单元局部平均法;第3章介绍了冻土工程温度场随机有限元分析方法及程序开发原理;第4章推导了冻土本构模型,讨论了模型计算程序的数值实现过程;第5章考虑随机温度对冻土区土体基本力学参数的强烈决定作用,在第3、4章的基础上阐述了冻土工程变形场随机有限元分析方法;第6章基于所构建的随机温度场与变形场模型,分别对寒区的路基工程、管线工程和塔基工程的随机温度场、随机变形场及可靠性进行计算与分析。

本书可作为土木工程、工程地质相关领域的广大科学技术人员和高校师生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

寒区冻土工程随机热力分析/王涛等著. —北京:科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03- 050998 -7

I. ①寒… II. ①王… III. ①冻土区-岩土工程-温度场-随机分析
IV. ①TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 284368 号

责任编辑:胡 凯 周 丹 丁丽丽/责任校对:郑金红

责任印制:张 伟 /封面设计:许 瑞

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年12月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2016年12月第一次印刷 印张:12 3/4

字数:300 000

定价:68.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

“岩土体热力特性与工程效应”系列丛书序

“岩土体热力特性与工程效应”系列丛书汇聚了 20 余年来团队在寒区冻土工程、人工冻土工程和深部岩土工程热环境等领域的主要研究成果，共分六部刊出。《高温冻土基本热物理与力学特性》、《岩土体传热过程及地下工程环境效应》重点阐述了相变区冻土体、含裂隙（缝）岩体等特殊岩土体热参数（导热系数）的确定方法； $0\sim-1.5^{\circ}\text{C}$ 高温冻土的基本力学特性；深部地下工程热环境效应。《正冻土的冻胀与冻胀力》、《寒区冻土工程随机热力分析》详细阐述了团队创立的饱和冻土分离冰冻胀理论模型；揭示了冰分凝冻胀与约束耦合作用所致冻胀力效应；针对寒区，特别是青藏工程走廊高温冻土区土体的热、力学参数特点，首次引入随机有限元方法分析冻土工程的稳定性。《深部冻土力学特性与冻结壁稳定》、《深厚表土斜井井壁与冻结壁力学特性》则针对深厚表土层中的矿山井筒工程建设，揭示了深部人工冻土、温度梯度冻土的特殊力学性质，特别是非线性变形特性，重点阐述了立井和斜井井筒冻结壁的受力特点及其稳定性。

除作序者外，系列专著材料的主要组织者和撰写人是团队平均年龄不足 35 岁的 13 位青年学者，他们大多具有在英国、德国、法国、加拿大、澳大利亚、新加坡、香港等国家和地区留学或访问研究的经历。团队成员先后有 11 篇博士、22 篇硕士学位论文涉及该领域的研究。除专著的部分共同作者，别小勇、刘志强、夏利江、阴琪翔、纪绍斌、李生生、张琦、朱锋盼、荆留杰、李晓俊、钟贵荣、魏亚志、毋磊、吴超、熊玖林、鲍强、邵刚、路贵林、姜雄、陈鑫、梁亚武等的学位论文研究工作对系列专著的贡献不可或缺。回想起与他们在实验室共事的日子，映入脑海的都是阳光、淳朴、执着和激情。尚需提及的是，汪平生、赖泽金、季雨坤、林超、吕长霖、曹东岳、张海洋、常传源等在读博士、硕士研究生正在进行研究的部分结果也体现在了相关著作中，他们的论文研究工作也必将进一步丰富与完善系列专著的内容。

团队在这一领域和方向的研究工作先后得到国家“973 计划”课题（2012CB026103）、“863 计划”课题（2012AA06A401）、国家科技支撑计划课题（2006BAB16B01）、“111 计划”项目（B14021）、国家自然科学基金重点项目（50534040）、国家自然科学基金面上和青年项目（41271096、51104146、51204164、51204170、51304209、51604265）等 11 个国家级项目的资助。

作为学术团队的创建者，特别要感谢“深部岩土力学与地下工程国家重点实验室”，正是实验室持续支持的自主创新研究专项，营造的学术氛围，提供的研究环境和试验条

件，团队得以发展。

期望这一系列出版物对岩土介质热力特性和相关工程问题的深入研究有点裨益。文中谬误及待商榷之处，敬请海涵和指正。



2016 年 12 月

前 言

全球冻土分布面积约占陆地面积的 50%，其中多年冻土区面积约 $35 \times 10^6 \text{ km}^2$ ，占陆地面积的 25%，我国冻土面积仅小于俄罗斯和加拿大，是世界第三冻土大国。我国的多年冻土地区与季节冻土区域面积约占国土总面积的 75%，其中多年冻土地区面积约 $215 \times 10^4 \text{ km}^2$ ，占全国陆地面积的 22.3%。青藏高原是我国乃至世界上面积最大的多年冻土区，冻土面积达 $147 \times 10^4 \text{ km}^2$ ，占我国多年冻土面积的 70% 左右。由于特殊的历史、自然、地理、社会等各方面因素的影响，我国多年冻土地区人烟稀少，经济相对落后，经济开发建设活动受交通基础设施落后的制约。随着我国经济建设战略重心逐步向中西部转移以及西部大开发战略的实施，在冻土区大量修建铁路、公路、桥梁、管线等基础设施将成必然，其中以已建成的青藏铁路为代表，建设及维护过程中均投入了大量的物力、人力及财力，青藏高原走廊基础工程的建设与青藏高原的多年冻土密切相关。

冻土是一定历史时期内，大气圈与岩石圈在热质交换过程中形成的。与融土相比，冻土的组成成分除了土矿物颗粒骨架、水和气以外，还包含冰。由于水和冰的存在，冻土的物理、力学、热学和化学性质等都发生急剧的改变。当温度升高，冻土融化时，结构中的冰胶结作用随即产生破坏并发生显著变形，土结构的稳定性降低，压缩性和透水性显著增大，强度降低许多倍，发生局部融化下沉，并常伴随有从承重面挤出的融土。而当土体冻结时，伴随土中孔隙水和外界水补给结晶形成多晶体、透镜体和冰夹层等形式的冰侵入体，导致地表产生不均匀冻胀，这种变形如果超过一定的限度就会使冻土基础上的建筑物产生失稳破坏。在多年冻土地区修筑走廊基础工程会极大地改变多年冻土与大气圈的热质交换条件。由于多年冻土形成和发育条件的改变，必然会导致冻土的物理力学性质发生变化，从而引起一系列的冻土工程地质问题，其中最主要的就是土的冻胀和冻土的融沉问题。在走廊基础工程中，一旦发生基础土体的冻胀和融沉，一般都将产生大幅度的路基不均匀变形，从而使铁路、公路、桥梁、管线等基础设施遭到不同程度的破坏，形成工程灾害。这种工程灾害主要与多年冻土的热力学性状、地基下冻土人为上限的变化特征以及多年冻土的含冰状况有关，其中地基土的热力状态决定着地基强度、变形特征及在未来的发展趋势。同时，由于冻土材料自身的复杂性，以及人们认识客观世界水平和手段的限制，冻土工程系统中往往存在不同程度的误差或不确定性。虽然在多数情况下这些误差或不确定性可能很小，但累计在一起就可能对冻土结构系统的分析和设计产生较大的、意想不到的偏差或不可预知性。因此，在现实冻土工程强度及稳定性分析设计中有必要考虑温度、应力及变形的不确定性因素对结构的影响。

本书是作者基于多年研究积累和成果撰写而成。全书共分 6 章：第 1 章介绍了冻土工程随机热力特性研究意义和现状；第 2 章建立了冻土土性参数随机场描述方法，提出了实用性更广的三角形单元局部平均法；第 3 章介绍了冻土工程温度场随机有限元分析方法及程序开发原理；第 4 章推导了冻土本构模型，讨论了模型计算程序的数值实现过

程；第5章考虑随机温度对冻土区土体基本力学参数的强烈决定作用，在第3、4章的基础上阐述了冻土工程变形场随机有限元分析方法；第6章对寒区的路基工程、管线工程和塔基工程的随机温度场、随机变形场及可靠性进行计算与分析。

本书研究成果得到国家重点基础研究发展计划“973计划”(2012CB026103)、高等学校学科创新引智计划“111计划”(B14021)、国家自然科学基金面上项目(41271096)、国家自然科学基金青年项目(51604265)的资助，在此著者们表示感谢。

应该指出，寒区冻土工程的随机热力分析问题涉及多学科、多领域，是一个非常复杂的随机水、热、力相互作用过程，有许多理论与实际问题尚需进一步研究和完善。由于作者水平及经验有限，书中定会存在欠妥乃至错误之处，敬请读者批评指正。

著 者

2016年9月

目 录

“岩土体热力特性与工程效应”系列丛书序

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 冻土工程随机热力特性研究意义	1
1.1.1 寒区冻土工程简况	1
1.1.2 寒区冻土工程随机热力特性研究意义	2
1.2 冻土工程随机热力特性研究概况	2
1.2.1 岩土参数随机性描述方法	2
1.2.2 随机有限元法	8
1.2.3 冻土工程随机温度场	14
1.2.4 冻土工程随机变形场	18
主要参考文献	21
第 2 章 土性参数随机场描述与离散	31
2.1 基本概念	31
2.1.1 随机变量	31
2.1.2 随机过程	31
2.1.3 随机场	32
2.2 随机场的数字特征	32
2.3 随机场的局部平均理论	33
2.3.1 一维局部平均随机场的数字特征	34
2.3.2 二维局部平均随机场的数字特征	35
2.3.3 相关距离及其计算	38
2.3.4 方差折减函数及其计算	39
2.3.5 局部平均随机场的独立变换	39
2.4 三角形单元局部平均法	40
2.4.1 随机场单元的描述及数字特征	41
2.4.2 协方差矩阵的解析算法	43
2.4.3 协方差矩阵的数值算法	45
2.4.4 计算实例	47
主要参考文献	50
第 3 章 冻土工程温度场随机有限元分析方法	52
3.1 概述	52
3.2 控制微分方程与有限元公式	52

3.2.1	确定性控制微分方程	52
3.2.2	边界条件与初始条件	55
3.2.3	确定性有限元分析	56
3.3	冻土工程温度场随机分析模型	62
3.3.1	热学边界条件随机性描述	62
3.3.2	冻土热学参数随机性描述	63
3.3.3	随机温度场 NSFEM 分析	63
3.4	冻土工程温度场随机有限元程序开发	66
3.4.1	程序原理	66
3.4.2	程序研发	69
	主要参考文献	69
第 4 章	冻土本构模型及数值算法	70
4.1	概述	70
4.2	弹性部分与强度准则	71
4.2.1	弹性分析	71
4.2.2	强度准则	71
4.3	屈服面与硬化参数	72
4.3.1	屈服函数	72
4.3.2	当前屈服面硬化参量及其修正	74
4.3.3	参考屈服面硬化参量	76
4.3.4	固结参数与潜在强度	77
4.3.5	屈服面及潜在强度的演化规律	79
4.4	应力-应变关系	80
4.5	模型参数获取	84
4.6	变刚度算法	86
4.6.1	基本思路	86
4.6.2	当前状态分析	88
4.6.3	加-卸载过程分析	88
4.6.4	数值实现过程	92
	主要参考文献	93
第 5 章	冻土工程变形场随机有限元分析方法	95
5.1	概述	95
5.2	控制微分方程与有限元公式	95
5.2.1	确定性控制微分方程	95
5.2.2	边界条件与初始条件	96
5.2.3	确定性有限元分析	96
5.3	冻土工程变形场随机分析模型	99
5.3.1	冻土力学参数随机性描述	99

5.3.2 随机变形场 NSFEM 分析	99
5.4 冻土工程变形场随机有限元程序开发	100
5.4.1 程序原理	101
5.4.2 程序研发	106
主要参考文献	106
第 6 章 典型冻土工程随机温度场与变形场分析	107
6.1 概述	107
6.2 路基工程随机温度场与变形场分析	107
6.2.1 计算模型与参数	107
6.2.2 计算结果与分析	110
6.2.3 变形可靠性评价	124
6.3 管线工程随机温度场与变形场分析	131
6.3.1 计算模型与参数	131
6.3.2 计算结果与分析	134
6.3.3 变形可靠性评价	141
6.4 塔基工程随机温度场与变形场分析	145
6.4.1 计算模型与参数	145
6.4.2 计算结果与分析	147
6.4.3 变形可靠性评价	155
主要参考文献	159
附录：典型冻土工程基础变形可靠性分析代码	161

第1章 绪 论

1.1 冻土工程随机热力特性研究意义

1.1.1 寒区冻土工程简况

青藏工程走廊跨越昆仑山、唐古拉山,穿过大片连续、岛状多年冻土地带 632km(高于 -1.5°C 的占多年冻土地区路段的 70%~80%),海拔 4700~5200m,气温低,冰冻期长,施工期短,且雨、雪和冰雹不断。高原多年冻土区特有的不良地质条件包括地下冰、冰椎、冰丘及热融湖塘等,在这一有限的走廊范围内,目前已建成的工程主要包括青藏公路、青藏铁路、格拉成品油管道、兰西拉光缆通信工程、高压输变电工程 5 项重大工程。

青藏公路作为内地通往边疆的重要国防经济主干道,自 1954 年青藏公路建成通车以来,青藏公路格拉段经历了两次改建和两期整治。但是,由于该段公路的自然条件恶劣、复杂,交通量大,形成严重超载,再加上公路养护方面存在的诸多困难,路面老化、龟裂、网裂、横向裂缝,以及路基波浪、不均匀沉降、纵向开裂、冻胀、翻浆、融沉等各种病害在不同的时间和空间上均屡屡发生,公路沿线多年冻土段的年病害率均在 30%左右,严重影响了公路的正常运营。同时,青藏铁路在多年冻土区个别地段也出现了比较严重的路基病害,主要有路基路基下沉、开裂、塌陷等病害,在整个青藏铁路沿线冻土区,超过 85%的路基变形监测点的累计变形表现为沉降变形,其余 15%的变形监测点表现为冻胀变形。对于冻胀变形而言,主要发生在季节冻土区普通路基、年平均地温小于 -1.5°C 的块石路基以及挖方换填路基。一般情况下,路基的累计冻胀变形通常较小,累计变形量值均小于 5cm,年均变形速率小于 1cm/a。对于沉降变形而言,块石路基沉降变形相对较小,而无冷却降温措施的普通路基沉降变形明显较大。

格尔木拉萨成品油管线是我国最长、世界海拔最高的成品油输送管道,建设于有“世界屋脊”之称的青藏高原。它北起青海省格尔木市,南迄西藏自治区首府拉萨,基本沿青藏公路铺设。管道于 1977 年建成并投入运行,全长 1076km,埋深 1.2~1.4m,管道干线直径 159mm,壁厚 6mm。其中,有 900 km 多的管线处在海拔 4000m 以上严寒地区,560km 多管线铺设在多年冻土区。根据相关研究,影响格拉管道变形的主要因素包括:冻胀、融沉,以及地形坡向、植被覆盖、水体等环境因素。其中冻胀和融沉是冻土区管道地基工程中两大主要冻害。冻胀一般发生在季节冻土区或融区,管基土的冻胀作用累积结果导致管道向上翘起,致使管道发生不均匀变形,甚至弯折、泄露。在高温管道或正温季节的常温管道沿线融化圈内,融沉主要发生在高含冰量多年冻土地段。青藏工程走廊光缆通信基础工程——兰州—西宁—拉萨光缆通信干线工程,在西大滩至那曲段通过多年冻土和季节冻土地段,该地区光缆工程的主要冻害病害亦可分为冻胀和融沉两个方面。

在青藏直流线路工程建设过程中, 输电线塔基是输电线路结构的重要组成部分, 其工程稳定性主要受到冻融循环作用、冻土和地下冰稳定性、不良冻土现象、环境气候变迁, 以及输电线路工程结构本身等诸多因素的影响, 由此会导致输电线路塔基工程相应的病害。对于采用埋深较浅的装配式基础、墩式基础, 下部土体的冻融会对基础的稳定性产生重要影响。对于穿越青藏高原多年冻土区的输电线路, 面对高比例的高温、高含冰量冻土, 随着工程活动的影响, 以及环境气候的变迁, 地下冰的融化、冻土的退化导致的融沉问题将是青藏输电线路面临最为严峻的挑战。同时, 由于输电线路大量采用桩式基础, 如果输电线路沿线的土壤水分充足, 在季节交替中容易产生冻胀力, 如果塔基设计深度、措施不尽合理, 或是强度不够, 尤其是在冻融循环过程中产生的冻拔作用, 会对塔基的稳定性会造成严重影响。另外, 随着环境温度的不断升高, 近 30 年来青藏高原多年冻土北界发生较大规模多年冻土退化, 多年冻土面积从 1975 年的 160.5km^2 退化成现在的 141.0km^2 , 环境气候等自然变化过程会导致冻土、地下冰的不断融化, 从而弱化输电线塔基冻土基础的热力稳定性。

1.1.2 寒区冻土工程随机热力特性研究意义

为了探求控制、削弱和治理冻土地基工程地质灾害的方法和措施, 确保青藏高原多年冻土工程的稳定性和耐久性, 并使其具有经济合理性, 需要全面了解冻土工程温度场的变化过程及在其影响下的地基变形情况, 预测工程环境随时间的演化所可能发生的问题, 以便及时或提前采取措施。传统冻土工程温度、应力及变形研究一般不考虑随机性因素的影响, 把模型中所有参数均视为确定性变量来处理。实际的传热及变形过程中, 参数往往存在着变异性。由于这些参数随机性的客观存在, 导致对温度场及变形场的响应不能忽视。然而, 由于地质勘查和现场、室内试验受到经费和设备条件的限制, 人们往往无法对土层参数的特性逐点精确的把握, 只能通过少数测试点的现场试验和若干试样的室内试验对土性参数作出近似的估计。大量试验和统计结果表明, 土性参数的变异性远比一般人工材料大, 因此, 考虑土性参数的不确定, 引进随机场理论对冻土不确定性参数进行随机性描述, 其在随机有限元理论计算及其工程应用中有重要意义。鉴于土性参数具有不确定性特征, 建立多年冻土温度场随机有限元分析模型, 研究典型结构断面的随机温度场计算方法, 为青藏高原多年冻土工程的强度及稳定性分析奠定基础; 考虑随机温度对冻土区土体基本力学参数的影响, 建立多年冻土工程应力场与变形场随机有限元分析模型, 研究典型结构断面的随机应力场与变形场数值算法, 对青藏高原多年冻土工程可靠度计算和失效概率分析有重要意义。

1.2 冻土工程随机热力特性研究概况

1.2.1 岩土参数随机性描述方法

土体作为一种复杂的材料, 其形成过程经历了各种复杂的地质环境以及物理、化学作用, 这些过程仍然在改变目前存在的土体。由于这种自然形成的特性, 土体在水平方

向和垂直方向上都存在着空间变异性。土性参数的随机性研究是地基土体温度、变形、强度及稳定性分析的基础,人们很早就认识到不确定因素对岩土工程问题的影响,但直到20世纪70年代才对其进行真正有意义的研究与探索。

1. 随机场的引进

Lumb 率先对土体参数不确定性进行了深入的研究,通过大量的室内试验,获得很多有价值的试验研究成果^[1,2];Cornell 提出土性参数可以在空间上视为随机变量^[3];其后,Wu 采用概率理论对土性参数空间上的变异性进行了描述^[4]。随着土体参数变异性研究的深入,人们逐渐认识到土体参数之间的相关性,Lumb 首次提到土体参数的空间变异性概念,并对香港土体滑坡问题进行了分析论述^[5]。

Vanmarcke 首次提出了土层剖面的随机场模型,用波动范围来描述土体参数的空间变异性,其著作中详细阐述了随机场的由来,并认为随机场的建立是一种被动过程,是因为人们根本无法确知(或根本不可能确知)事物所有的方方面面,人们只能通过采集样本的方法获取事物个别部位的信息,虽然事物本身任一点处的特性是确定的(不考虑时效应),但人们只能通过样本点去估计未确知点,从而导致随机场模型的建立^[6,7]。Vanmarcke 进一步完善了随机场理论,土性参数随机场模型的实质是用齐次正态随机场来模拟土层剖面,用方差、方差折减系数、相关函数、相关距离来描述土体的空间变异性,用方差折减系数把点的变异性与空间变异性联系起来,引入了相关距离的概念,指出在相关距离内,土性强相关;在相关距离外,土性可视为不相关,提出了计算土层相关距离的“空间递推平均法”^[8]。Vanmarcke 的随机场理论得到了诸多学者的认可,并广泛应用于岩土工程不确定性问题分析中^[9-15]。

Soulie^[16]将地质统计理论应用于土体参数的空间变异性中,研究了土体不排水抗剪强度的变异性,证明了地质统计理论是分析土体参数变异性的有效方法,Soulie^[17]对该方法做了进一步阐述。Chiasson^[18]、张征^[19,20]、Jaksa^[21]、胡小荣^[22]等学者研究了地质统计理论在土体参数空间变异性模拟中的应用。

总体来说,岩土参数的空间变异性及相关性特征已得到诸多学者的认可,不确定性岩土参数描述方法早期以随机变量法为主,由于该方法无法反映土性参数空间变异性特性,应用较少;之后逐渐发展并引进了随机场方法及地质统计方法;目前,岩土工程不确定性土性参数描述方法中,将土性参数空间变异性模拟为随机场的情况较为合理,应用最为广泛,而地质统计理论则应用较少。

2. 随机场的离散

在随机性问题研究中,不确定参数随着时间而发生变化通常用随机过程来表示,而随着空间位置而变化,则可以用随机场来描述。因此,随机场可以看成是随机过程概念在空间区域上的自然推广。随机过程与时间有关,而随机场则可以看成是定义在场域参数集上的随机过程模型。Vanmarcke 提出“真正”的随机有限元法必须包含对随机场的离散处理,否则无法准确地对结构进行随机性描述与分析^[23]。因此,随机场的离散处理是随机有限元理论的重要组成部分。随机场有两类离散方法:一类是在空间中离散,即

将随机场也划分成网格；另一类是抽象离散，即将随机场展成级数，这种方法也称谱分解。

Kiureghian 提出了随机场中心离散法，该方法是用随机场在每个单元中心点的值来表示其在每个单元的属性，因而随机场在每个单元内部都是常量，且等于它在各个单元中心的值^[24]。中心离散法简单方便，程序易于实现，但精度欠佳，现较少采用。

Baecher 提出了随机场的局部平均法^[25]，Vanmarcke 对随机场的局部平均理论进行深入的研究，给出了一维、二维及多维随机场局部平均单元的定义及数字特征^[41]。随机场局部平均法的思想是用随机场在单元上的局部平均来表征随机场在单元上的属性。

1) 一维随机场局部平均

对于一个一维连续宽平稳随机场 $X(x)$ ，其数学期望 $E[X(x)] = m$ 为常数，方差 $\text{Var}[X(x)] = \sigma^2$ 亦为常数，随机场在第 i 个离散元 $[x_i - L_i/2, x_i + L_i/2]$ 上的局部平均定义为

$$X_i = \frac{1}{L_i} \int_{x_i - L_i/2}^{x_i + L_i/2} X(\xi) d\xi \quad (1-1)$$

式中， L_i 是第 i 个局部平均单元的长度； X_i 称为一维局部平均随机场。

2) 二维随机场局部平均

对于一个二维连续宽平稳随机场 $X(x, y)$ ，其数学期望 $E[X(x, y)] = m$ 为常数，方差 $\text{Var}[X(x, y)] = \sigma^2$ 亦为常数，第 i 个矩形离散单元的边平行于坐标轴，中心点为 (x_i, y_i) ，边长为 L_{xi} 、 L_{yi} ，单元面积为 $A_i = L_{xi}L_{yi}$ ，随机场在这个编号为 i 的离散单元上的局部平均定义为

$$X_i = X_{Ai}(x_i, y_i) = \frac{1}{A_i} \int_{x_i - (L_{xi}/2)}^{x_i + (L_{xi}/2)} \int_{y_i - (L_{yi}/2)}^{y_i + (L_{yi}/2)} X(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1-2)$$

3) 多维随机场局部平均

对于一个多维连续宽平稳随机场 $X(\mathbf{t})$ ， $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ，其数学期望 $E[X(x, y)] = m$ 为常数，方差 $\text{Var}[X(x, y)] = \sigma^2$ 亦为常数，第 i 个多维离散单元的中心点为 $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ，随机场在这个编号为 i 的离散单元上的局部平均定义为

$$X_i = X_{Di}(\mathbf{t}) = \frac{1}{D} \int_0^T X(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (1-3)$$

式中， $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ ； $D = T_1 T_2 \dots T_n = \prod_{i=1}^n T_i$

研究表明^[26,27]：随机场局部平均方法在随机场网格划分及随机计算中十分有效，对原始数据的要求低、收敛快、精度高，是随机有限元计算中最常用的方法。

Liu 提出了随机场的插值法，该方法将随机场在单元内的值用单元结点处值的插值函数来表示，随机场的统计特性可由各单元结点处随机变量间的统计特性近似反映^[28]。

引进型函数 $N_i(X)$ ，随机场 $b(X)$ 离散为

$$b(X) = \sum_{i=1}^q N_i(X) b_i \quad (1-4)$$

式中, X 表示空间位置; b_i 为随机场在结点 i 处的值 ($i=1,2,\dots,q$); q 为单元结点数。

随机场 $b(X)$ 在单元内的均值和方差可表示为

$$E[b(X)] = \sum_{i=1}^q N_i(X) E(b_i) \quad (1-5)$$

$$\text{Var}[b(X)] = \sum_{i,j=1}^q N_i(X) N_j(X) \text{Cov}(b_i, b_j) \quad (1-6)$$

随机场的插值不是直接计算随机场引起的单元之间的相关性, 而是通过随机场在各结点上的值间接地反映, 因此只要给定随机场在各结点上的值即可, 计算相对简单, 且较易考虑非线性问题和局部平均法不能处理的非均匀随机场问题^[29]。同时, 随机场的插值法将原连续状态的随机场仍离散成一个连续函数, 精度较高。然而, 随机场的插值法须知相关函数, 并且要求随机场对空间参数具有较高的连续性, 以保证插值的顺利进行。

Takada 提出了随机场的局部积分法, 该方法是在单元刚度矩阵的推导过程中采用随机场在单元上的加权积分以考虑材料参数的随机场^[30]。之后, Deodatis 对随机场的局部积分法做了进一步论述^[31]。

以结构分析为例, 假设单元 e 的弹性模量 $E^e(X)$ 为

$$E^e(X) = E_0^{(e)} [1 + f^{(e)}(X)] \quad (1-7)$$

式中, $E_0^{(e)}$ 为弹性模量的均值; $f^{(e)}(X)$ 为一维零均值均匀随机场。

两端铰接杆单元的刚度矩阵可近似表示为

$$K^{(e)} \approx K_0^{(e)} + X^{(e)} \Delta K_0^{(e)} \quad (1-8)$$

式中, $K_0^{(e)}$ 为弹性模量取均值时的单元刚度矩阵, $X^{(e)} = \int_0^L f^{(e)}(x) dx$, L 为杆长。

两端刚接杆单元的刚度矩阵可近似表示为

$$K^{(e)} \approx K_0^{(e)} + X_0^{(e)} \Delta K_0^{(e)} + X_1^{(e)} \Delta K_1^{(e)} + X_2^{(e)} \Delta K_2^{(e)} \quad (1-9)$$

式中, $X_1^{(e)} = \int_0^L x f^{(e)}(x) dx$, $X_2^{(e)} = \int_0^L x^2 f^{(e)}(x) dx$ 。

不难看出, 局部积分法采用积分形式, 其计算精度相对较高, 而且该方法积分运算只需进行一次, 刚度矩阵的波动性也由此得出, 因此计算效率也较高。相关文献[30,31]认为, 随机场局部积分法的精度与效率与随机场局部平均法相当, 但该方法解决二维、三维问题较困难。

Spanos 提出了随机场的正交展开法。该法是将材料特性参数随机场进行 Karhunen-Loeve 正交展开, 并由此推导出刚度矩阵的级数展开式, 从而获得位移、应力的统计特性^[32]。Ghanem 对该方法做了进一步补充^[33]。

根据 Karhunen-Loeve 展开正交法, 材料参数的随机场 $S(x)$ 可表示为

$$S(x) = \bar{S}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(x) \quad (1-10)$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_L S(x) \varphi_n(x) dx \quad (1-11)$$

式中, λ_n 、 $\varphi_n(x)$ 分别为随机场 $S(x)$ 相关函数的特征值和特征函数, $\varphi_n(x)$ 具有如下正交性:

$$\int \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (1-12)$$

式中, δ_{mn} 为 Kronecker 函数。

随机场的正交展开法只需一次分解刚度矩阵, 可根据精度和工作量对有关方程进行取舍, 在能获得特征值和特征函数的精确解条件下, 该方法是随机场离散方法中精度最高的。刘宁认为, 正交展开法精度与效率之间很难协调, 并指出特征值和特征函数的获得需解积分方程, 并非所有形式的随机场函数都能轻而易举地获得其特征值和特征函数, 对于二维和三维问题, 单元刚度矩阵表达式难以获得^[34]。

综上所述, 常见的 5 种随机场空间离散方法包括中心离散法、局部平均法、插值法、局部积分法及正交展开法, 其优缺点如表 1-1 所示, 总体可概括为: 中心离散法和插值法计算效率较高, 局部平均法与局部积分法计算效率相当, 正交展开法计算精度与计算效率之间很难协调; 中心离散法计算精度较低, 局部平均法、局部积分法及插值法计算精度均较高, 正交展开法在能获得特征值和特征函数的精确解条件下计算精度最高; 中心离散法因精度较低采用较少, 插值法较易考虑非均匀随机场问题, 但需要知道原随机场的相关函数并要求随机场对空间参数具有较高的连续性; 局部积分法和正交展开法解决二维、三维问题较困难; 局部平均法对原始数据的要求低, 在常见的宽平稳随机场中应用广泛。

表 1-1 随机场空间离散法比较

空间离散法	计算效率	计算精度	编程	应用条件及应用范围
中心离散法	较高	低	易	精度差、采用少
局部平均法	高	较高	易	数据结构要求低、收敛快, 应用广
插值法	较高	较高	易	需已知原随机场的相关函数, 且连续, 应用受限
局部积分法	高	较高	较易	解决二维、三维问题较困难
正交展开法	效率与精度难协调	需已知特征值和特征函数	难	解决二维、三维问题较困难

以上随机场空间离散方法可以利用许多有限元的基本关系, 方便随机有限元程序的开发。Spanos 提出了 Karhunen-Loeve 级数分解法^[35], 该方法是将随机场离散为一组不相关的随机变量, 在实际应用过程中, 通常只需要少数几个随机变量便能较好地模拟随机场, 降低了随机分析的计算量, 具有很好的计算效率。但在应用过程中需要求解第二类 Fredholm 积分方程, 针对指数型相关函数可得出解析解, 而大多数协方差函数的解析解是无法求出的, 这限制了该方法的应用。Ghanem 应用 Galerkin 法求解积分方程, 克服了上述问题, 但其中仍涉及复杂的数值积分运算, 应用起来也不是很方便^[36]。Phoon 应用 Wavelet-Galerkin 法求解积分方程, 大大简化了特征值与特征函数的计算过程, 同

时还应用 Karhunen-Loeve 级数模拟非高斯型随机场, 并对其收敛性进行了深入研究^[37-39]。Jun 提出了正交级数展开法, 通过选择完备的正交函数系列, 避免了直接求解积分方程特征值问题^[40]。抽象离散随机场方法效率高于传统空间离散随机场方法, 然而, 其随机有限元公式计算复杂, 且与确定性有限元区别较大, 需做大量的编程工作来修改已有的有限元程序, 因此应用不便。

综上所述, 对于可以视为平稳过程的宽平稳随机场岩土参数, 采用空间网格离散随机场方法可以利用许多有限元的基本关系, 其中, 随机场局部平均法对原始数据的要求低、效率高、精度好, 并且可以利用许多确定性有限元基本关系, 程序通用性强。鉴于此, 本书采用对原始数据要求低、收敛快、精度高、应用较广的局部平均法对参数随机场进行离散分析。

3) 参数的计算

岩土参数随机场模型中, 方差折减系数可由相关函数及相关距离求得。因此, 土性随机场参数问题研究主要集中在相关函数及相关距离上。Vanmarcke 给出了随机场相关距离的数学定义, 为随机场标准相关函数的计算提供了参数^[41]。

若极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x\Gamma^2(x)$ 存在, 则可定义相关距离为

$$\theta = \lim_{x \rightarrow \infty} x\Gamma^2(x) \quad (1-13)$$

式中, $\Gamma^2(x)$ 为随机场 $X(x)$ 的方差函数, 表示在局部平均下的“点方差” σ^2 的折减, 亦称方差折减函数。

诸多学者在土体参数随机性方面做了许多基础性研究工作, 在试验的基础上得到了不同土体参数的波动范围统计资料, 为工程实践提供了有价值的参考。Asaoka 通过室内试验和现场测试, 对软黏土空间变异性进行了简单而准确的描述^[42]; Fenton 认为土体参数波动范围主要取决于土体沉积过程的地质作用, 而不是特定的土体性质, 因此可根据土体的地质成因统计资料来近似估计其波动范围^[43]。DeGroot 对原位土体自协方差的估计进行了试验研究^[44]; Phoon 对土体不确定性的 3 个主要来源(固有变异性、测量误差及相变变异性)进行了试验研究及理论分析^[45]; Rackwitz 采用概率论与数理统计方法, 对土性不确定性参数概率模型进行了详细论述^[46]。国内学者在计算土体参数的相关距离方面也做了大量工作。傅旭东根据一维平稳高斯随机场理论, 讨论了方差折减系数、相关距离等概念, 归纳了相关范围和相关距离的计算方法, 并提出了计算相关范围的自回归模拟方法^[47]。徐斌通过现场工程静探曲线的相关距离研究, 对用相关函数法求静探曲线相关距离过程中所出现的计算方法的选择问题、异常数据影响问题及样本容量选取问题进行了分析^[48]。程强采用相关函数法计算相关距离时, 对相关函数形式的选择, 拟合范围等问题进行了探讨, 并通过大量 CPT 资料得出了一般土层相关距离的分布范围^[49]。刘春原通过理论分析和推导研究了岩土参数随机场的半变异函数和相关函数两种理论方法的内涵和联系, 探讨了计算相关距离的不同方法^[50]。李小勇等根据工程勘察资料和室内强度试验, 分析了太原典型黏土强度指标的空间变异性, 采用不同方法对比分析求得了参数的相关距离^[51]。阎澍旺对求解土层相关距离的递推空间法和相关函数法进行比较和探