



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

自动控制原理

(第四版)

主编 梅晓榕

3



科学出版社

普通高

级规划教材

自动控制原理

(第四版)

主 编 梅晓榕

副主编 王 彤 柏桂珍 王述一

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书在哈尔滨工业大学“自动控制原理”课程历届教材的基础上编写,并进行了几次修订。本书内容包括系统的数学模型、时域分析、根轨迹、频域特性法、典型非线性环节、计算机控制系统、现代控制理论。最后按照全书内容逐章介绍 MATLAB 的应用,包括系统分析、设计和仿真框图等。

本书可作为高等院校“自动控制原理”课程(50~90 学时)的教材,适用于电气、自动化、电子、信息与通信、计算机、机械、航天工程、光学工程、动力机械以及工商管理等专业,也可供从事控制工程的技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/梅晓榕主编. —4 版. —北京:科学出版社,2017. 6

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-053264-0

I. ①自… II. ①梅… III. ①自动控制理论-高等学校-教材
IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 126879 号

责任编辑:余 江 张丽花 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:霍 兵 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 9 月第一版 开本:787×1092 1/16

2007 年 2 月第二版 印张:18 3/4

2013 年 8 月第三版 字数:468 000

2017 年 6 月第四版 2017 年 6 月第 22 次印刷

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



前 言

哈尔滨工业大学控制科学与工程系从 1980 年以来一直承担着本校各专业的“自动控制原理”课程的教学和实验工作,并完成了很多重大科研项目。本书就是在历届所用教材的基础上重新编写而成,饱含着各位教师的教学经验和科研工作体会。哈尔滨工业大学“自动控制原理”课程自 2002 年以来一直使用本教材,并于 2005 年评为黑龙江省精品课程。

本书内容包括经典控制理论,计算机控制系统,现代控制理论基础,MATLAB 在控制系统分析、设计和仿真中的应用等,可满足“自动控制原理”课程 50~90 学时的教学要求,适用于电气、自动化、电子、信息与通信、计算机、机械、航天工程、光学工程、动力机械和工商管理等专业。

本书第一版于 2002 年 9 月出版,第二版于 2007 年 2 月出版,并被评为“普通高等教育‘十一·五’国家级规划教材”,在全国很多高校得到采用。第三版于 2013 年 8 月出版,是哈尔滨工业大学“十二·五”规划教材。本书是第四版,本次修订内容如下:

(1) 结合数字化出版技术,增加了二维码(用手机微信“扫一扫”功能扫描书中相应的二维码,即可在线观看),使教材从平面走向立体。二维码内容包括基本章节的课件和文本。文本包括对书中内容的解释、说明和补充。

(2) 对教材内容进行了区分标识,分为必讲和选讲(用小字号排版)。教师可根据不同的学时和专业进行取舍。

(3) 对教材做了少量的修改和补充,改动部分主要在第 3 章和第 5 章。

本书可供不同专业选用。学时少的(50 学时左右),可只讲第 1、2、3、5 章,这是本书基本的和最实用的内容。70 学时左右,可在第 7 章“计算机控制系统”和第 8 章“现代控制理论基础”中再选讲一章。第 4 章和第 6 章,根据学时数进行取舍。第 9 章可安排在相应章节选讲。

本书有以下特点:

(1) 注重控制理论在工程中的应用,对实际中应用多的章节进行详细讨论。

(2) 保持控制原理的完整性,内容全面,又简明扼要。

(3) 设有“基于 MATLAB 的系统分析、设计和仿真”一章。注重 Simulink 的应用,因为它和方框图相似。希望利用仿真使学生对基本原理和方法有更深刻的认识和理解。

(4) 可以给使用本书的教师提供课件、习题答案以及交流平台。

本书由梅晓榕教授任主编,王彤、柏桂珍、王述一任副主编。参加修订工作的还有哈尔滨工业大学何朕、张卯瑞、林玉荣、强盛、宁永臣以及黑龙江省的其他几所大学的教师。

在编写中参考了很多优秀教材和著作,在此编者向参考文献中的各位作者表示真诚的谢意。

书中不当之处,敬请读者批评指正。

编 者

2017 年 4 月

目 录

前言	
第 1 章 自动控制概述	1
1.1 引言	1
1.2 自动控制系统的初步概念	1
1.3 自动控制系统的分类	2
1.4 控制系统的组成及对控制系统的基本要求	4
习题	6
第 2 章 系统的数学模型	8
2.1 控制系统微分方程的建立	8
2.2 传递函数	13
2.3 控制系统的框图和传递函数	20
2.4 非线性方程的线性化	34
习题	37
第 3 章 控制系统的时域分析法	43
3.1 引言	43
3.2 一阶系统的时域分析	46
3.3 二阶系统的时域分析	48
3.4 高阶系统的时间响应及简化	60
3.5 控制系统的稳定性	61
3.6 控制系统的稳态误差	66
3.7 复合控制	74
习题	76
第 4 章 根轨迹法	82
4.1 根轨迹的初步概念	82
4.2 绘制根轨迹的基本规则	83
4.3 用根轨迹方法分析和设计控制系统	93
习题	94
第 5 章 频率特性法	96
5.1 频率特性的初步概念	96
5.2 频率特性的图形	98
5.3 Nyquist 稳定判据	112
5.4 控制系统的相对稳定性	119
5.5 闭环频率特性图	121
5.6 频率特性与控制系统性能的关系	123
5.7 控制系统设计的初步概念	126

5.8	PID 控制器	127
5.9	超前补偿	131
5.10	滞后补偿	134
5.11	滞后超前补偿	138
5.12	串联补偿网络的期望幅频特性设计方法	140
5.13	反馈补偿	141
5.14	电子放大器的数学模型与补偿方法	145
	习题	148
第 6 章	典型非线性环节及其对系统的影响	157
6.1	概述	157
6.2	描述函数法	159
	习题	166
第 7 章	计算机控制系统	169
7.1	计算机控制系统概述	169
7.2	A/D 转换与采样定理	170
7.3	D/A 转换	173
7.4	z 变换	175
7.5	z 传递函数	181
7.6	线性离散系统的稳定性	188
7.7	线性离散系统的时域分析	192
7.8	数字控制器的模拟化设计	199
	习题	205
第 8 章	现代控制理论基础	209
8.1	状态空间法的基本概念	209
8.2	线性定常系统状态空间表达式的建立	212
8.3	由状态空间表达式求传递函数	224
8.4	线性定常系统状态方程的解	225
8.5	线性定常离散系统的状态空间表达式	229
8.6	李雅普诺夫稳定性分析	230
8.7	线性系统的可控性与可观测性	239
8.8	线性系统的状态反馈与极点配置	251
8.9	状态观测器	255
8.10	二次型性能指标的最优控制	265
	习题	267
第 9 章	基于 MATLAB 的系统分析、设计与仿真	273
9.1	引言	273
9.2	系统的初步概念与数学模型	274
9.3	系统的时域分析法	276
9.4	根轨迹	277
9.5	频率特性	278

9.6 典型非线性环节	279
9.7 计算机控制系统	280
9.8 状态空间法	281
附录 1 拉普拉斯变换的基本特性	285
附录 2 拉氏变换-z 变换表	286
附录 3 常用补偿网络	287
附录 4 本书所用的 MATLAB 命令	291
参考文献	292

第 1 章 自动控制概述

1.1 引 言



过去的一百年是科学和工程技术发展最迅速的一个世纪。人类的许多希望和梦想,被科学和技术变成现实;其中,自动控制技术所取得的成就和起到的作用给各行各业的人们留下了深刻的印象。控制的目的是使物理量(变量)按要求变化或保持不变。从最初的机械转速、位移的控制到工业过程中温度、压力、流量、物位的控制,从远洋巨轮到深水潜艇的控制,从电动假肢到机器人的控制,自动控制技术的应用几乎无处不在。从电气、机械、航空、化工、核反应到经济管理、生物工程,自动控制理论和技术已经介入到许多学科,渗透到各个工程领域。所以,大多数工程技术人员和科学工作者都希望具备一定的自动控制知识,以便能够理解和设计自动控制系统。

自动控制原理主要讲述自动控制的基本理论和分析、设计控制系统的基本方法。控制原理包括经典控制理论和现代控制理论。经典控制理论主要以传递函数为工具和基础,以频域法和根轨迹为核心,研究单变量控制系统的分析和设计。经典控制理论在 20 世纪 50 年代就已经发展成熟,至今在工程实践中仍得到广泛的应用。现代控制理论从 1960 年开始得到迅速发展。它以状态空间方法作为标志和基础,研究多变量控制系统和复杂系统的分析和设计,以便满足军事、空间技术和复杂的工业领域对精度、速度、重量、加速度、成本等的严格要求。

1.2 自动控制系统的初步概念

所谓自动控制就是在没有人直接操作的情况下,通过控制器使一个装置或过程(统称为控制对象)自动的按照给定的规律运行,使被控变量能按照给定的规律变化。系统是指按照某些规律结合在一起的物体(元部件)的组合,它们互相作用、互相依存,并能完成一定的任务。能够实现自动控制的系统就可称为自动控制系统。

图 1-2-1 表示采用空调器的室内温度控制系统的元件框图。图中方框代表元部件,方框之间的带箭头的线段代表信号(或变量)及传递方向。室内温度是要被控制的物理量,它由空调器直接控制。电位器输出电压 r 代表设定或希望的室内温度。实际温度 c 由热敏电阻组成的温度传感器检测并转换成电压 y 。电子放大器的输出电压 a 代表设定温度与实际温度之



图 1-2-1 室温控制系统元件框图

差。当这个差值大于某个规定值时,空调器就通电运行,使室内温度朝设定值变化。当室内温度达到规定值后,放大器输出电压 a 使空调器断电而停止运行。于是室内温度就被控制在设定值附近。

在自动化领域,被控制的装置、物理系统或过程称为控制对象。这个“过程”包括化学反应过程、核反应过程、热传导过程等。控制对象还可以属于生物领域或其他领域。对控制对象产生控制作用的装置称为控制器。直接改变被控变量的元件称为执行元件。能将一种物理量检测出来并转换成另一种容易处理和使用的物理量的装置称为传感器或测量元件。图 1-2-1 中,室内的空气等物体就是控制对象,空调器是执行元件,放大器属于控制器,热敏电阻属于传感器或测量元件。于是图 1-2-1 的元件方框图就可抽象成图 1-2-2 的功能框图。

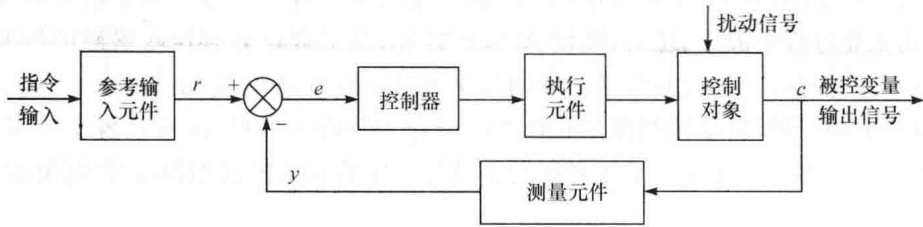


图 1-2-2 室温控制系统功能框图

下面介绍几个关于变量的术语。

由外部加到系统中的变量称为输入信号,它不受系统中其他变量的影响和控制。由系统或元件产生的变量称为输出信号,最关注的输出信号又称为被控变量。由某一个输入信号产生的输出信号又称为该输入信号的响应。控制器输出的信号称为控制变量,它作用在控制对象(执行元件,功率放大器)上,影响和改变被控变量。反馈信号是被控变量经由传感器等元件变换并返回到输入端的信号,它要与输入信号进行比较(相减)以便产生偏差信号。反馈信号一般与被控变量成正比。给定值又称为指令输入信号,它与被控变量是同一物理单位,用来表示被控变量的设定值。代表指令输入信号与反馈信号进行比较的基准信号称为参考输入信号。参考输入信号与反馈信号之差称为偏差信号。扰动(信号)是加于系统上的不希望的外来信号,它对被控变量产生不利影响。将指令输入信号变成参考输入信号的元件可称为参考输入元件。

在图 1-2-1 和图 1-2-2 所示系统中,室内温度的设定值就是给定值,或称为指令输入。室内的实际温度 c 就是被控变量,也是系统的输出信号。电位器的输出电压 r 是参考输入信号,热敏电阻即温度传感器的输出信号 y 是反馈信号, $e=r-y$ 称为偏差信号。图 1-2-1 中的放大器(控制器)输出信号 a 也就是加到空调机上的信号,它就是控制变量。电位器就是参考输入元件,它将设定的温度值转换成电压。周围环境温度的变化及房间散热条件的变化等都属于扰动信号。

1.3 自动控制系统的分类



1.3.1 开环控制和闭环控制

按照控制方式和策略,系统可分为开环控制和闭环控制两大类。

图 1-2-1 和图 1-2-2 所示系统,输出信号不仅受到输入信号的控制,而且还受到与输出信

号成比例的反馈信号的控制。从框图看,代表信号传递路线和方向的信号流线按箭头方向形成闭合的环路,所以这种控制方式称为闭环控制,对应的系统就是闭环控制系统。准确地说,闭环系统中的被控量是受偏差量控制。闭环控制方式中总是要用到反馈信号,所以又称为反馈控制。

如果图 1-2-2 的系统中没有测量元件,不使用反馈信号,系统就如图 1-3-1 所示。系统输出信号只取决于输入信号,与输出信号无关。框图中的信号流线没有形成闭合回路,所以这种控制方式被称为开环控制,对应的系统就是开环控制系统。采用集中供热方式的室内供热系统是典型的开环控制系统。供热锅炉按预定的时间向暖气管道中送去规定温度的热水以实现供热,而不监测各房间的温度。

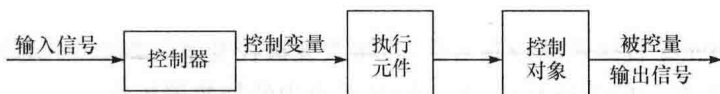


图 1-3-1 开环控制系统

开环控制的主要优点是,系统结构简单,调试容易。主要缺点是,当工作环境和系统本身的元部件性能参数发生变化或受到外来扰动时,开环系统的被控变量会受到较大影响,即抗干扰能力差。一般说,高精度的开环控制系统要求所有的元部件都有较高的精度和很稳定的性能。所以开环控制对环境和元件的要求比较严格。

闭环控制系统本身能检测出被控量的设定值与实际值之差,实际上是用偏差量去减小和消除偏差。对于参数变化和扰动信号引起的偏差,都有很强的抑制能力。所以闭环系统的最大优点就是精度高,抗干扰能力强。闭环系统的缺点是,结构复杂(增加了测量元件和一条反馈通路),设计和调试技术也复杂;闭环系统还会产生一种失控现象——不稳定。本书主要研究闭环控制系统。

1.3.2 伺服系统、定值控制系统和程序控制系统

按输入信号分类,控制系统可分为定值控制系统、伺服系统、程序控制系统。

定值控制系统的输入信号是恒值,要求被控变量保持相对应的数值不变。室温控制系统,直流电机转速控制系统,发电厂的电压频率控制系统,高精度稳压电源装置中的电压控制系统就是典型的定值控制系统。

伺服系统的输入信号是变化规律未知的任意时间函数,系统的任务是使被控变量按同样规律变化并与输入信号的误差保持在规定范围内。导弹发射架控制系统,雷达天线控制系统都是典型的伺服系统。伺服系统又称为随动系统。

程序控制系统中的输入信号按已知的规律(事先规定的程序)变化,要求被控变量也按相应的规律随输入信号变化,误差不超过规定值。热处理炉的温控系统、机床的数控加工系统和仿形控制系统就是典型的程序控制系统。

1.3.3 控制系统的其他类型

控制系统还有很多种分类方法。例如,按照系统是否满足叠加原理可分为线性系统 and 非线性系统。对于线性系统,初始条件为零时,几个输入信号同时作用在系统上所产生的输出信号,等于各输入信号单独作用时所产生的输出的和。按照系统控制器是否采用计算



机,可分为计算机(数字)控制系统和模拟系统。按照控制对象的范畴可分为运动控制系统、过程控制系统等。按照系统参数是否随时间变化可分为时变系统和定常系统。本书主要研究线性定常系统。

1.4 控制系统的组成及对控制系统的基本要求



1.4.1 控制系统的基本组成

控制系统中控制对象以外的元部件统称为控制元件。由于控制对象的不同,控制系统也是各种各样的。但是根据控制元件在系统中的功能和作用,可将控制元件分成4大类。

1. 执行元件

执行元件的功能是直接带动控制对象,直接改变被控变量。例如,机电控制系统中的各种电动机,液动控制系统中的液压马达,温度控制系统中的加热器等都属于执行元件。执行元件有时也被归入控制对象中。

2. 放大元件

放大元件的功能是将微弱信号放大,使信号具有足够大的幅值或功率。放大元件又分为前置放大器和功率放大器两类。前置放大器能放大一个信号的数值,但功率并不大,它靠近系统的输入(前)端。如由运算放大器构成的前置放大器只能放大电压信号,而能输出的电流却很小。功率放大器输出的功率大,它输出的信号可直接带动执行元件运转和动作。例如,由电力电子器件组成的功率放大器同时输出足够大的电压和电流,能直接带动直流电动机转动。

3. 测量元件

测量元件的功能是将一种物理量检测出来,并且按着某种规律转换成容易处理和使用的另一种物理量输出。测量元件一般称为传感器。过程控制中的变送器、敏感元件都属于测量元件。图1-2-1中的热敏电阻的功能就是将温度转变成电压信号。

热敏电阻、热电偶、温度变送器、流量变送器、测速发电机、电位器、光电码盘、旋转变压器、感应同步器等元件包括它们的信号处理电路都属于测量元件。

测量元件的精度直接影响到系统的精度,所以高精度的系统必须采用高精度的测量元件(包括可靠的线路)。

4. 补偿元件

由上述三大类元件与控制对象组成的系统往往不能满足技术要求。为了保证系统能正常工作(稳定)并提高系统的性能,控制系统中还要另外补充一些元件,这些元件统称为补偿元件,又称为校正元件,有时也称为控制器。如何选择补偿方法,补偿元件应当具有什么样的性能,这是本书将要讨论的主要问题。最常见的补偿方法有串联补偿、反馈补偿,如图1-4-1所示。

常用的补偿元件有模拟电子线路、计算机、部分测量元件(如测速发电机)等。

从系统工作原理和框图看,控制系统中还有比较元件,它把两个信号相减,比较它们的大小,产生偏差信号。但比较元件一般不是一个单独的实际元件,电子放大器就具有比较元件的功能,有些测量元件也包含比较元件的功能。

由控制元件和控制对象组成的控制系统的典型功能框图。如图1-4-1所示。

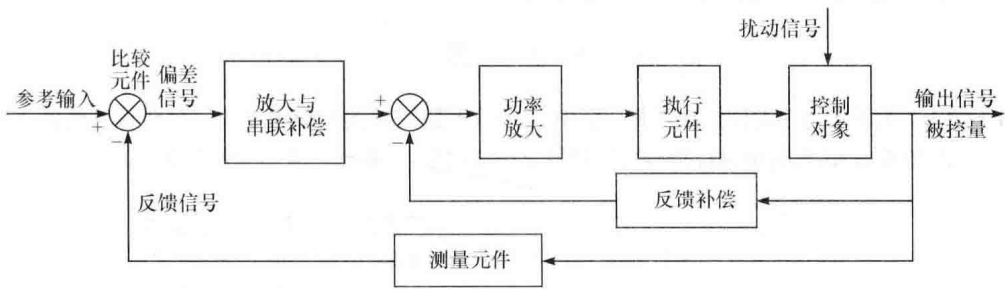


图 1-4-1 控制系统的典型功能框图

1.4.2 对控制系统的基本要求

对闭环控制系统的基本要求可归纳为 3 个方面：稳定性、准确性（稳态精度）、快速性与平稳性（动态性能）。

1. 稳定性

闭环控制存在着稳定与不稳定的问题。所谓不稳定，就是指系统失控，被控变量不是趋于所希望的数值，而是趋于所能达到的最大值，或在两个较大的量值之间剧烈波动和振荡。系统不稳定就表明系统不能正常运行，此时常常会损伤设备，甚至造成系统的彻底损坏，引起重大事故。所以稳定是对系统最基本又是最重要的要求。稳定性是系统的重要特性，同时也是控制原理中的一个基本概念。本书将对稳定性的问题做多次详细的分析和讨论。

2. 准确性

准确性就是要求被控变量与设定值之间的误差达到所要求的精度范围。要求被控变量在任何时刻、任何情况下都不超出规定的误差范围，对于高精度控制系统，实现起来是困难的。控制的准确性总是用稳态精度来度量。对于稳定的系统，时间足够长时就达到了稳态，此时的精度就是稳态精度。稳态精度属于系统的稳态性能。

3. 快速性与平稳性

系统的被控变量由一个值改变到另一个值总是需要一段时间，总是有一个变化过程，这个过程就称为过渡过程，此时系统表现出的特性称为动态性能。人们自然希望过渡过程既快速又平稳，所以快速性和平稳性就是动态性能包含的主要内容。

如果要求一个系统中的被控变量 $c(t)$ 由 0 变到 1，加入对应的输入信号后，输出信号 $c(t)$ 的典型变化曲线如图 1-4-2 所示。图中曲线①和②表示稳定系统的响应，③和④是不稳定系统的响应。

在实际应用和控制理论中，对系统的要求有更具体的表述和定量的表示，称为性能指标。

对控制系统的研究，按顺序可分为理解、分析和设计三个步骤。理解系统是控制这个系统的基础，理解系统的标志就是建立系统的数学模型。分析系统就是探讨系统的性能。设计系统就是使系统满足性能指标要求。自动控制原理的基本内容，首先是研究如何求系统的数学模型，然后针对数学模型，分析系统的性能，设计系统的

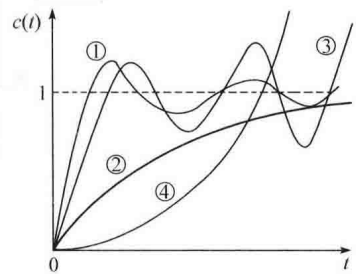
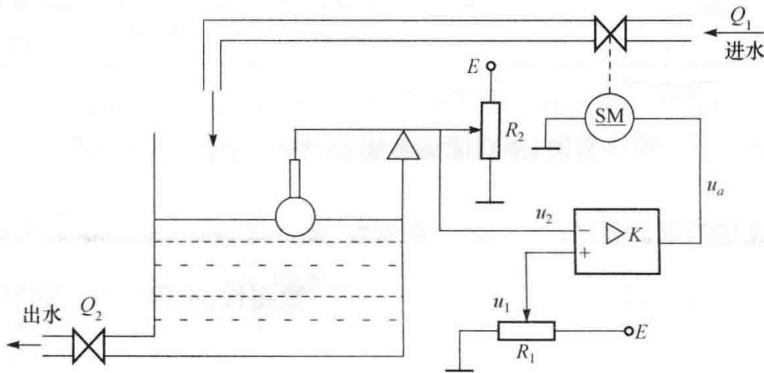


图 1-4-2 系统的典型响应曲线

补偿元件(控制器),使系统满足性能指标要求。

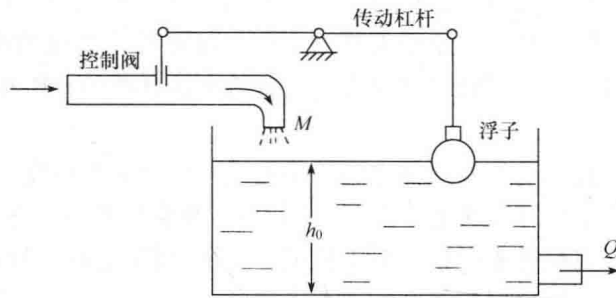
习 题

1-1 题 1-1 图所示为一液位控制系统。图中 K 为放大器, SM 为伺服电动机。分析该系统的工作原理,在系统中找出参考输入、扰动量、被控制量、控制器及控制对象,并画出系统的元件框图。



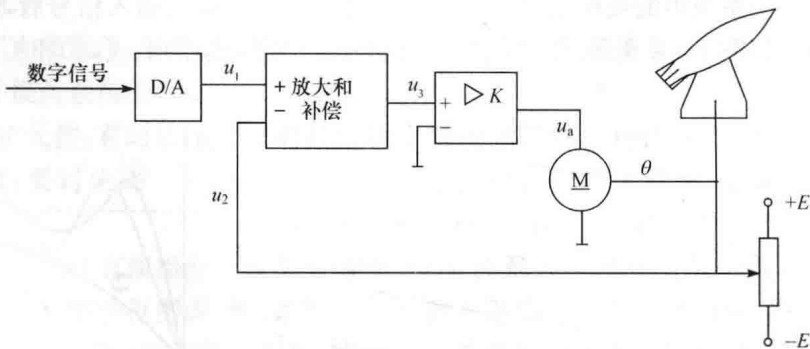
题 1-1 图 液位控制系统原理图

1-2 题 1-2 图所示为一液位控制系统,说明它的工作原理。



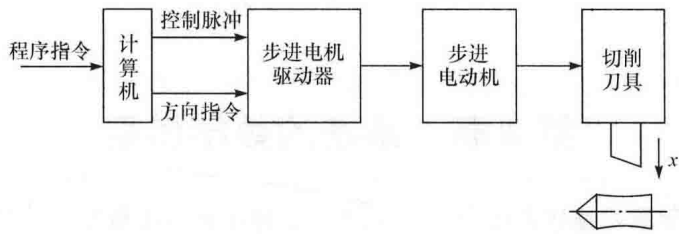
题 1-2 图 液位控制系统原理图

1-3 题 1-3 图表示一个导弹发射架控制系统,它用来控制导弹发射架的方位转角 θ 。图中 M 表示直流电动机。简述该系统的工作原理,说明它属于什么类型的控制系统,指出它的参考输入信号、被控变量、反馈信号、控制变量以及测量元件、执行元件。



题 1-3 图 导弹发射架控制系统

1-4 题 1-4 图表示一个机床控制系统,用来控制切削刀具的位移 x 。说明它属于什么类型的控制系统,指出它的控制器、执行元件和被控变量。



题 1-4 图 机床控制系统

1-5 判定下列方程描述的系统是线性定常系统、线性时变系统还是非线性系统。式中 $r(t)$ 是输入信号， $c(t)$ 是输出信号。

$$(1) c(t) = 3r(t) + 6 \frac{dr(t)}{dt} + 5 \int_0^t r(\tau) d\tau$$

$$(2) c(t) = 2r(t) + t \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$$

$$(3) c(t) = [r(t)]^2$$

$$(4) c(t) = 5 + r(t) \cos \omega t$$

$$(5) \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 6 \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

$$(6) t \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) + 3 \frac{dr(t)}{dt}$$

1-6 简述开环控制和闭环控制的主要优缺点。

第 2 章 系统的数学模型



系统的数学模型就是描述系统中各变量间关系的数学形式和方法。经典控制理论和现代控制理论都以数学模型为基础。数学模型的建立和简化是定量分析和设计控制系统的基础,也是目前许多学科向纵深发展需要解决的问题。

系统中变量的关系分为静态关系和动态关系两种。如果系统中各变量随时间变化缓慢,对时间的导数可忽略不计,就称系统处于静态。表示静态关系的数学表达式中没有变量对时间的导数项。处于静态的系统,知道了系统的输入量即可确定系统的输出量及其他变量。当系统中的变量对时间的导数不可忽略时,称系统处于运动状态或动态,相应的系统称为动态系统或动力学系统。对于动态系统,为了确定输出量和其他变量,仅仅知道输入量是不够的,还必须知道一组变量的初始值。

控制理论研究的是动态系统。动态系统数学模型的基础是微分方程,又称为动态方程或运动方程。

数学模型有很多种形式,它们各有特点和最适用的场所。本章只介绍微分方程、传递函数和动态框图,其余的几种数学模型将在后续章节介绍。

建立系统数学模型的方法有分析法(又称理论建模)和实验法(又称系统辨识)。分析法是根据系统中各元件所遵循的客观(物理、化学、生物等)规律和运行机理,列出微分方程式。实验法是人为地给系统施加某种测试信号,记录其输出响应,并用适当的数学模型去逼近。本章只介绍分析法。

系统的物理参数不随时间变化的系统称为定常系统,系统的物理参数不随空间位置变化的系统称为集总参数系统。本章研究定常、集总参数系统。

许多表面上完全不同的系统(如机械系统、电气系统、液压系统和经济学系统等)却可能具有完全相同的数学模型,数学模型表达了这些系统的共性,所以研究透了一种数学模型,也就能完全了解具有这种数学模型的各种各样系统的特点。因此数学模型建立以后,研究系统主要是以数学模型为基础,分析和设计系统,而不再涉及实际系统的物理性质和具体特点。

2.1 控制系统微分方程的建立

控制系统中的输出量和输入量通常都是时间 t 的函数。很多常见的元件或系统的输出量和输入量之间的关系都可以用一个微分方程表示,方程中含有输出量、输入量及它们对时间的导数或积分。这种微分方程又称为动态方程或运动方程。微分方程的阶数一般是指方程中最高导数项的阶数,又称为系统的阶数。

对于单变量线性定常系统,微分方程为

$$\begin{aligned} & c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + a_2 c^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} \dot{c}(t) + a_n c(t) \\ & = b_0 r^{(n)}(t) + b_1 r^{(n-1)}(t) + b_2 r^{(n-2)}(t) + \cdots + b_{n-1} \dot{r}(t) + b_n r(t) \end{aligned} \quad (2-1-1)$$

式中, $r(t)$ 是输入信号, $c(t)$ 是输出信号, $c^{(n)}(t)$ 表示 $c(t)$ 对 t 的 n 阶导数。 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$, $b_i (i=0, 1, \dots, n)$ 都是由系统结构参数决定的系数。

这里介绍用解析法列写微分方程,其一般步骤为

1) 根据要求,确定输入量和输出量;

2) 根据系统中元件的具体情况,按照它们所遵循的科学规律,围绕输入量、输出量及有关中间量,列写原始方程式,它们一般构成微分方程组。对于复杂的系统,不能直接写出输出量和输入量之间的关系式时,可以增设中间变量。方程的个数一般要比中间变量的个数多1。为了下一步整理方便起见,列写方程时可以从输入量开始,也可以从输出量开始,按照顺序列写;

3) 消去中间变量,整理出只含有输入量和输出量及其各阶导数的方程;

4) 标准化,一般将输出量及其导数放在方程式左边,将输入量及其导数放在方程式右边,各阶导数项按阶次由高到低的顺序排列。可以将各项系数归化成具有一定物理意义的形式。

列写微分方程的关键是要了解元件或系统所属学科领域的有关规律而不是数学本身,当然,求解微分方程还是需要数学工具。

下面以电气系统和机械系统为例,说明如何列写系统或元件的微分方程式。这里所举的例子都属于简单系统,而实际系统往往是很复杂的,本章后面将介绍如何建立复杂系统的数学模型。

1. 电气系统

电气系统中最常见的装置是由电阻、电感、电容、运算放大器等元件组成的电路,又称电气网络。像电阻、电感、电容这类本身不含有电源的器件称为无源器件,像运算放大器这种本身包含电源的器件称为有源器件。仅由无源器件组成的电气网络称为无源网络。如果电气网络中包含有源器件或电源,就称为有源网络。

列写电气网络的微分方程式时都要用到基尔霍夫电流定律和电压定律,它们可用下面两式表示:

$$\sum i = 0 \quad (2-1-2)$$

$$\sum u = 0 \quad (2-1-3)$$

列写方程时还经常用到理想电阻、电感、电容两端电压、电流与元件参数的关系,它们分别用下面各式表示:

$$u = Ri \quad (2-1-4)$$

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (2-1-5)$$

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (2-1-6)$$

例 2-1-1 在图 2-1-1 所示的电路中,电压 $u_i(t)$ 为输入量, $u_o(t)$ 为输出量,列写该装置的微分方程式。

解 设电流 $i(t)$ 如图所示。由基尔霍夫电压定律可得

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_o(t) = u_i(t) \quad (2-1-7)$$

式中, $i(t)$ 是中间变量。 $i(t)$ 和 $u_o(t)$ 的关系为

$$i(t) = C \frac{du_o(t)}{dt} \quad (2-1-8)$$

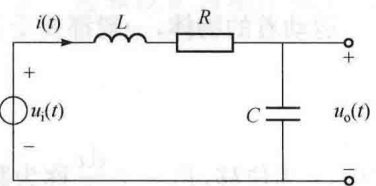


图 2-1-1 LRC 电路

将式(2-1-8)代入式(2-1-7)消去中间变量 $i(t)$, 可得

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (2-1-9)$$

上式又可写成

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + T_2 \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (2-1-10)$$

其中, $T_1 = L/R$, $T_2 = RC$ 。式(2-1-9)、式(2-1-10)就是所求的微分方程式。这是一个典型的二阶线性常系数微分方程, 对应的系统也称为二阶线性定常系统。

例 2-1-2 由理想运算放大器组成的电路如图 2-1-2 所示, 电压 $u_i(t)$ 为输入量, 电压 $u_o(t)$ 为输出量, 求它的微分方程式。

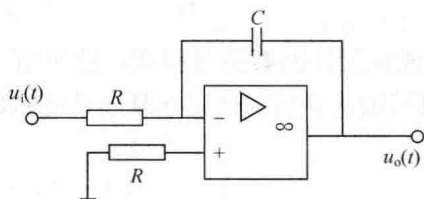


图 2-1-2 电容负反馈电路

解 理想运算放大器正、反相输入端的电位相同, 且输入电流为零。根据基尔霍夫电流定律有

$$\frac{u_i(t)}{R} + C \frac{du_o(t)}{dt} = 0$$

整理后得

$$RC \frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t) \quad (2-1-11)$$

或

$$T \frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t) \quad (2-1-12)$$

式中, $T = RC$ 称为时间常数。式(2-1-11)、式(2-1-12)就是该系统的微分方程式。这是一阶系统。

2. 机械系统

机械系统指的是存在机械运动的装置, 它们遵循物理学的力学定律。机械运动包括直线运动(相应的位移称为线位移)和转动(相应的位移称为角位移)两种。

做直线运动的物体要遵循的基本力学定律是牛顿第二定律:

$$\sum F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2-1-13)$$

式中, F 为物体所受到的力, m 为物体质量, x 是线位移, t 是时间。

转动的物体要遵循如下的牛顿转动定律:

$$\sum T = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (2-1-14)$$

式中, T 为物体所受到的力矩, J 为物体的转动惯量, θ 为角位移。

运动着的物体, 一般都要受到摩擦力的作用, 摩擦力 F_c 可表示为

$$F_c = F_B + F_f = f \frac{dx}{dt} + F_f \quad (2-1-15)$$

式中, x 为位移, $F_B = f \frac{dx}{dt}$ 称为黏性摩擦力, 它与运动速度成正比, 而 f 称为黏性阻尼系数。

F_f 表示恒值摩擦力, 又称库仑摩擦力。

对于转动的物体, 摩擦力的作用体现为如下的摩擦力矩 T_c 。