ZHONGXUE SHUXUE
ZHI DAO SHU MEI

中学数学之道术美

朱家楔◎著

安徽师范大学出版社

ZHONGXUE SHUXUE
ZHI DAO SHU MEI

中学数学之道术美

朱家楔◎著

安徽师范大学出版社
· 芜湖 ·

责任编辑：孔令清
装帧设计：润一文化

图书在版编目（CIP）数据

中学数学之道术美 / 朱家楔著. — 芜湖 : 安徽师范大学出版社，2017.3
ISBN 978-7-5676-2724-6

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课 – 教学研究Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第326035号

中学数学之道术美

朱家楔　著

出版发行：安徽师范大学出版社
芜湖市九华南路189号　安徽师范大学花津校区　邮政编码：241002
网　　址：http://www.ahnupress.com/
发 行 部：0553-3883578　5910327　5910310（传真）　E-mail：asdcbsfxb@126.com
印　　刷：虎彩印艺股份有限公司
版　　次：2017年3月第1版
印　　次：2017年3月第1次印刷
规　　格：700 mm × 1000 mm　1/16
印　　张：11
字　　数：205千
书　　号：ISBN 978-7-5676-2724-6
定　　价：31.00元

序

改革开放以来,中小学数学教育倍受重视.教育部制定的《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称《课标》)前言中明确指出,"数学是人类文化的重要组成部分,数学素养是现代社会每一个公民应该具备的基本素养."但在相当程度上,仍然有人把数学当成上大学的敲门砖,大学之门被敲开后,"砖"便被扔掉.

更有一批为"高考"服务的"企业",以能为学生提高考分来招揽生意.于是,大量应考数学书籍、资料充塞书店,数学的教与学都集中在解题上,按高考题型"勤学苦练"成为数学基础教育的规则.结果绝大多数学生没有对数学产生兴趣,而是厌倦、害怕数学,这不仅不利于学生真正地掌握数学知识与技能,而且也不利于学生把数学中的文化精神内化成自身素养.

当然,产生这种现象的原因极其复杂,不仅仅是教师和学生两方面的思想认识问题.但是,教师和学生对数学的认识,至少能在这种社会性的行为中产生一定的作用,而这种认识应在数学的教与学过程中获得.

我认为数学是有着理性的真、善、美的学科.数学教学应尽最大努力去挖掘、发现数学的真、善、美,使学生学过数学之后,对其真、善、美有理解,有感受.有了这种感受与理解后,不仅能学到知识,还会领会到数学中的人文精神,并能内化成自身素养.向往真、善、美是人的天性,若能在学习过程中发现或挖掘出数学的真、善、美,则不会对学数学厌倦、害怕,还可能对数学产生兴趣与爱好.数学史上很多有造诣的数学家就是这样产生的.

数学广泛地渗透于日常生活和工作中,是具有相当高专业程度的学科.如果不从事数学教学与数学研究,即使是基础教育中的数学知识与技能,也不要求学生都熟练掌握,因为它们只是进一步学习数学的基础.但就数学教材所体

现的数学精神,即上面所说的真、善、美,学生体会越深越好,可以终生受益.

中小学数学中的真、善、美在哪里?

对数学而言,追求真、善、美是其学科的习惯,没有任何正面文字表述,本书便是从数学中挖掘这种精神.

本书分三章来叙述,第一章名为"数学之道".

"数学之道"是指数学实践(数学理论探索与数学应用)能始终指向求真的"无障碍大道"的特点.这种特点,本文用"求真务实"、"自由思考"、"和而不同"、"逻辑论证"来概括."求真务实"是目标,能使数学发展保持正确方向;"自由思考"是开源,能使数学"为有源头活水来";"和而不同"是协同,能使诸多数学建树均和谐共居于数学大厦,相映生辉;"逻辑论证"则贯通前三者,使学科目标能实现,数学精神成为整体,数学文化成为人类文化的重要组成部分.

第二章是从初等数学范围梳理数学方法,本书称之为"数学之术".

由于"数学之道"是由"求真务实"、"自由思考"、"和而不同"、"逻辑论证"四者形成的整体,使得数学学科的成果为人类生产、生活以及科学研究所利用,也就是说成为人们解决生产、生活和科学研究中的问题的工具.这里的工具不是有形的如老虎钳、锯子之类,而是解决问题的思路、方法,以至分析探索的语言等,是供大脑使用的工具.所以,本书不称其为数学工具,而称之为"数学之术".因具体数学方法非常多,这里仅从初等数学范围内与日常生活密切相关以及与进一步学习更高深数学相联的数学方法方面梳理.

学过基础数学后,很多人一方面承认数学是人类不可缺少的工具,另一方面又觉得很多东西没用,白学了,这是对"数学之术"认识上的偏差."数学之术"使人们在生产、生活、科研等方面能"心中有数"、"心中有谱"、"行为有章",这些"术"应融于人的思维之中.

数学家阿尔波斯诺特说,"任何地方只要运用了数学推理,就像一个愚笨人利用了一个聪明人的才智一样."现代科学技术在飞速发展,但是所有的发展几乎都与"数学之术"联系在一起.不能利用数学,其发展必然受限,这一点也是众所周知的现实.因此,"数学之术"会使工作向尽善尽美发展,由于"数学之术"向善,故"数学之术"可称善之术.

第三章写的是"数学之美".数学美是古老的命题,它与艺术美相比总是令人不可捉摸.本人在教数学时,也提到过数学美,体会不深.关于数学美,现在有不少文章,但本人觉得都没有切合数学审美的特点.数学美主要特征是理性的

美,必须用思维去把握,几乎不能直觉感受.比如鲜花美丽,扫一眼就感受到;歌曲好听,闭眼听便能感受到;数学美,则不能.数学的审美需要桥梁,这桥梁便是用艺术的美为引导,对比着思考.因此,“数学之美”就是从这个角度来梳理数学的美,引导学生审美.

这里需要说明的是,本人是一名中学数学教师,本书是对自己40多年的中学数学教育的反思,也是阅读《课标》、按《课标》编写的数学教材,以及一些专家关于数学史、数学文化的专著的心得体会.本书中有些例题及图片,便是来自这些专著.

这些反思与体会是本人于1996年退休后逐步得出的.本人在1999年执笔编写“中小学教师自修教程”第五册第一章时,将有些反思写入其中[①].2009年8月,开通了新浪网的《朱家楔的博客》,之后陆续地将自己的“反思”用“数学之道”、“数学之术”、“数学之美”的题目以系列博文的形式发表.众多网友点击和评论,给了本人很大鼓舞.在众多朋友的帮助下,2015年本人终于完成了此书稿.

本人在中学数学教师岗位工作了40多年,退休后对数学教学有着留恋之情,于是常“梦想”能再站在讲台上.这本书便是“梦想”的备课笔记,谨以此献给中小学数学教师及正在学数学的年轻人.

朱家楔

2015年11月13日

① “中小学教师自修教程”是由中央教科所刘芳任总主编的中小学教师继续教育教材.该教程共六册,本人具体执笔编写第五册《教育科研能力的培养与提高》的第一章“学校科研——时代的呼唤”.该书于2000年3月由中国和平出版社出版.

目　录

第一章

数学之道

我国是世界上研究并使用数学较早的文明古国之一，在公元前一千多年前的周朝就有“养国子以道，乃教之六艺”的说法．所谓“六艺”是指“礼”、“乐”、“射”、“御”、“书”、“数”，这里的“数”便是今天的数学．这表明我们的祖先很早就认识到数学对于人类的生存与发展有重要价值．从我国语言习惯看，“六艺”的排列顺序表达了当时主流社会将数学的价值置于“六艺”之末这一历史事实，而且这种对数学价值的认定，在我国社会经历了很长的时间．

当今社会，数学的价值不再是“六艺”之末了．数学已成为其他学科的工具与语言，是推动生产发展、人类物质生活、文化生活、科学研究的杠杆．计算机出现后，人的生活与社会实践，以至艺术领域也都离不开数学．所以，近代人们从文化层面提出了数学文化的概念，并认定数学文化是人类文化的重要组成部分．

数学学科的发展，使自身的价值升值到现在的地位与其自身特质相关联．从学科角度看，各学科都是把目标定在求真．但在人类文化的长河里，数学并没有声言求真，而实际上始终不渝地求真．数学把求真原则沉淀为数学的思维习惯，因而不需要用纲领来加以约束．这可以从任何数学发明，以至任何一本数学专著都不需要声称它是求真，要遵循什么原则等证明．

我认为沉淀数学思维的习惯是“求真务实”、“自由思考”、“和而不同”、“逻辑论证”四个原则．这四个原则是使数学这门学科发展到现在，且能具有如上所述的巨大价值的根本原因．这四个原则各有侧重面：“求真务实”侧重“目标”，并渗透于数学实践的全过程，从而使数学发展保持正确方向；“自由思考”侧重“开源”，使得数学研究能不断创新；“和而不同”侧重“协同”，使得各种数学建树均能共居，并增辉数学大厦；“逻辑论证”则侧重贯通“目标”、“开源”、“协同”三个

原则,使学科目标能实现求真.所以,这四者便是数学精神、数学之道.

《课标》总目标中提出让学生具备“独立思考”、“评价与反思”、“坚持真理、修正错误、严谨求实”等这些作为现代公民所必备的优秀品质,都可以在数学的四个“思维习惯”中得到营养.当然,一般而言,需要教师带领学生一起去挖掘,去分析揭示,不然学生会“入芝兰之室,久而不闻其香”.

§1.1 求真务实

学科的求真与通常意义的求真有层次上的差别.比如购物这一行为,人们遵循货真价实以求真,考究的对象是所购的物是否是真.而学科不仅研究物的真,还要研究物与物相互关系的规律的真,这样首先要确定研究的物是真,然后才谈得上研究其相互关系并探索其真.比如人类对自然的研究,把地球当作不动的,是宇宙中心,解释天体运动,因为地球本身不动不是真的,所以据此来研究地球与各天体的运动规律,当然不可能得到正确结论,求不到真.

数学学科在求真目标方面有得天独厚的条件.恩格斯说:“数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学.”也就是说,数学研究的对象是数量,而数学中的数量则是人类从万事万物中抽象出的无可非议的真.比如最简单的“0”和“1”,“0”表示什么都没有;“1”可以是一头牛的“1”,也可以是一粒芝麻的“1”.这种抽象均被公认为理性的真,人们对此提不出异议.再比如数学中最简单的形是点与线,点只有位置无大小,而线仅有长度和方向而无粗细之分.在现实中没有这种点与线,但这种点与线深刻地表达了点与线的本质特征,从而为对其研究的结论能广泛地与实际相结合,是非常理性的真.由于对象是无可非议的真,且与现实无直接黏连,这便是研究数学得天独厚的条件.

数学的真是什么呢?数学研究对象的数与量是抽象出的真,而对数与数、数与形、形与形之间的关系,探索出的公理、定理、法则等则是数学规律的真.因为数学研究的对象是抽象的,故其求真特别注意务实,总是把求真与务实相结合.

纵观数学发展史可以看出,数学发展始终指向探索“数与量的某种关系的真”.这种真,虽然几乎全是存在于思维中的数学结论,但它却理性地反映着客观世界物质与关系的模型,并向“物”的质及“物”与“物”之间关系的真逼近,只要求“逼近”也是务实.比如我们用数学方法求平均值,当然是求平均值之真.但

实际求值运算到一定小数位时，可以四舍五入．比如数学中对圆周长与其直径长的比的研究，得出了圆周率的概念，并用希腊字母 π 表示．π 实为超越数，实际运算中也只用 $\pi=3.1416$，以至于 $\pi=3.14$ 也足够．故数学计算准许在规定范围内取近似值便是数学求真务实的最直接表示．

现实生活中运用数学知识时也求真务实．比如我们到商场购物，收银员用电脑计算的应付款是总计数经四舍五入后的近似数，而非准确数．因为如果要精确到分厘，我们可没那种小额币给他，这样做就不务实了．

数学的求真务实，还可见于数学教材．在人类文明的发展史上，数学所求到的真，可谓硕果累累．人们可选择作为学数学与进一步研究数学有用的基础的"硕果"，然后将其编入基础教育的数学教材中．我国的数学教材从1949年至今进行了多次编写，内容是经过多次精心挑选的．可以说，现今数学教材既体现了求真也体现了务实——既能为将来进一步学习并研究数学的人打基础，也能为将来从事其他工作的人打基础．所以，教材中介绍的数学知识与技能，既是数学基础，又接近生活而有重要实用价值．

求真务实可称之为数学教学的目标性原则．因为在学数学时，求真务实已成为数学的思维习惯，且方方面面都能体现出这一目标性原则．本节将从中学数学教材的多个方面来挖掘这一原则．

1.1.1 普遍性

求真务实是数学的普遍性目标要求．数学本身是一座庞大的科学大厦，它的每一个构件都必是真．故数学的教与学，以及研究过程中的每一个环节，都必须将目标定为求真务实．

(1)从数学使用的符号与语言体现求真务实．

当今世界，各民族，各国家，虽有民族传统和政治制度上的差别，但中小学数学教科书及大学数学教材内容却基本相似．这也是数学的真的普遍性的表现．打开数学史，查看数学追求真的径迹，各民族不仅大体相似，而且还相互吸收．现在，数学上采用的十进制及数码符号0，1，2，3，4，5，6，7，8和9，原是印度人发明并使用的，然后传入阿拉伯半岛．9—10世纪，由阿拉伯传到欧洲，欧洲人称为阿拉伯字母．其实我国也是采用十进制较早的民族，但中文的数字写法没有印度人发明的书写方便．

可以断定，数学符号的使用如果离开了这种求真务实的约定，继而在符号

选择时存在某种偏见,那么数学的传播与发展必然受到不应有的阻碍.

数学的符号语言是自然形成的,且现在的数学表达式是不用翻译的.如一元二次方程:$ax^2+bx+c=0$,求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,以及后来产生的集合语言等,这些表述方法,全世界数学教科书都一样.数学这种能吸收全人类的智慧形成世界语言,不是数学史上有个“秦始皇”做出统一的规定而形成的特征,而是有求真务实的“习惯”自然形成的.数学是全人类的,当然要吸取全人类的智慧,这是必然的途径.它成为全人类共同的财富,是求真务实的必然结果.

(2)中学教材的编写及其教与学的要求体现求真务实.

数学王国浩如烟海,对于任何一个人,要将其全部掌握是不可能的.对于一个现代人而言,掌握其基础知识中的“真”就足够了.所以对中小学数学教材而言,其求真必须与务实结合,不然,学生理解不了“真”,学了也无用.于是对初等数学教材与教学而言,内容不仅求真还要务实.从内容看,绝对不能因某种原因而编入不真的内容.没有编入中小学数学教材的数学内容,不是否定其真,而是将此内容列入专科学校或大学数学教材,以至让数学博士去攻读.基础教育数学课程中只需提供进一步学习这种知识的基础.这样,中小学数学教材的编写及教师的教学,都围绕求真务实的精神而不断地推陈出新,这便是整个基础教育中数学教育的现实.所以,各国在编写中学教材时都求真务实,于是中学以至大学的数学教材内容大体相似,并能互相借鉴.

(3)数学教与学层面也有求真务实.

《课标》提出“要面向全体学生,适应学生个性发展的需要,使得:人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展”,这要求在数学教学过程的战略层面上必需求真务实.

《课标》将数学课程目标分成了解、理解、掌握、运用四个层次,学习过程目标分为经历、体验、探索三个层次,这便是对数学教学从战术层面提出的求真务实.

现在教材中还增加了过去教材没有的《问题解决》栏目,目的在于引导学生将数学用于实践,用数学去研究解决问题,以便为将来从事数学研究打基础.

现行中学数学教材中还编入了数学模型的初步知识,这里更具体地体现数学在具体研究中的求真务实.在解决实际问题时,可按某模型(模型可以是别人提供的,也可以是自己创建的)去做,能解答出结果,是求到了真;若不符合实际

要修改模型，这当然更是求真而且务实. 总而言之，学生解数学题要经常进行这种求真训练. 即使证明其无解便止步，这也是达到了求“真”. 这种止步，在数学里也是公认的. 如用直尺和圆规三等分角问题和化圆为方问题，在数学史上很多人去探索，近代有人证明了用直尺和圆规做是无解问题，便没有人再探索“尺规”的解法了. 所以此时的“真”，即为无解，已求到，这就是务实精神.

还有，教育部制定的《课标》中不少规定实为我国数学教育教学经验的总结. 也就是说，在《课标》制定前，很多优秀教师就是这样教数学的. 即在数学的教学实践中有着求真务实的许多习惯性做法，而《课标》则是将其系统化，并作为教育部的统一要求，从面强化了编写数学教材与进行数学教学方面的求真务实要求.

就数学研究而言，要取得成果必须一步一步地走，“大而化之，哗众取宠”是没有立足之地的.

一句话，数学把求真务实这一目标普遍而切实地确立于数学研究与传授过程之中，即求真务实渗透于数学的每一个细胞之中.

1.1.2　严肃性

数学的求真务实是非常严肃的. 这个严肃性表现在对称之为数学的真的定理、法则都必须跨越证明的门槛. 人教版义务教育教科书七年级下册数学课本第 5.3.2 节《命题、定理、证明》明确指出，“如果…，那么…”结构的判断句称为命题. 其结论可能是真，也可能是假，判定真假的方法是推理证明. 经过推理得到证实的是真命题，称为定理. 这样，学生一进中学，课本便将数学的“真”的严格要求亮了出来.“没有被证明只能称为假设或命题，而不能称为定理”. 比如，新课标教材在小学的《图形与几何》中有“通过观察与操作，了解三角形的三内角和为 180°”的内容安排，让学生撕下任意三角形的三个内角去拼图，用量角器去量三角，加起来看是否是 180°. 学生都操作验证了，但教材中未出现定理字样. 而到七年级下学期授第 7.2.1 节《三角形》时，导入证明三角形内角和为 180° 的方法还加上这样一段话：“但是由于形状不同的三角形有无数个，我们不可能用量度方法一一验证所有的三角形的内角和为 180°. 因此，需要寻找一种能证明任意一个三角形的内角和等于 180° 的方法”. 于是，再次强调，未经数学的逻辑证明的不是数学的真. 而教材也只是在明确其为真之后，才出现“三角形内角和定理：三角形三内角和等于 180°”这样一行粗体字.

从此以后，数学中的定理、公式的出现都必须经过逻辑论证这个高而严的门槛，正因如此才保证了数学中处处都是真：每一概念、每一定义、每一定理、每一法则都经得起推敲. 数学的推敲是非常严格的. 它不仅要接受实践检验，还需要有理论证明. 通过了实践检验还只能算猜想；因为实践是有限的，不可能对所有情况一一实践，所以必须有理论证明才是定理，才算真.

数学承认：人的实践能力是有限的，不可能对所有情况一一加以验证；而能用数学方法证明的可经受任何实践的考验，不会被否定；而有限的实践证实的数学结论，却很难找到证明方法的实例存在. 如哥得巴赫猜想，因为没被证明，所以只能称为猜想.

更为重要的是，不论你在数学界是怎样权威的人物，你仅口头说“证明”了某命题不算数，必须写出相应证明过程，并经数学界的推敲，被认为无漏洞才可被数学界接纳为数学的真.

1.1.3 理性的实在

数学定理和法则都是人的思维产品，相当抽象，因为它有求真务实的习惯，所以它总有实在与之对应. 这不同于文艺思维塑造的神仙与鬼怪，现实中找不到，只专供人们精神上感受.

数学中有只有位置没大小的点，只有长度没有粗细的线，以及没厚度的面. 这种“真”，从表面上看，世间不存在. 但正是这种“真”，却能表达实在图形与运动变化的规律，达到珠联璧合的地步；正是这种“真”，能把看不见的运动变化表达成看得到的线. 我认为这种“真”是理性的实在，这种理性的实在有着更广泛的实在与其对应.

比如虚数，是人们探索出60多年后才终当作“新数”给以承认的. 因为生活中存在既有大小之分的数，还有方向之别的向量. 正是这个新数，能准确地表达向量.

又如中学教材中的由乘法运算产生的乘方，如 $3\times3\times3\times3=3^4$，于是有 3^n，n 是正整数；后来扩大为有理数、实数，a^x 有意义，有实在的数与之对应. 这是在对照同底幂相除、开方运算及指数函数之后，便得此结论（x 为无理数时，a^x 的存在性的证明在实变函数论里）.

再如数学中对两数成正比例关系的研究，最后得出正比例函数 $y=kx$. 这个

抽象的正比例函数是很多常见现象的理性实在.如 k 表示物价,则函数可表示物的件数与总价间的关系; k 表示匀速运动的速度,则函数可表示运动时间与运动路程间的数量关系.

非欧几何的结论有无实在与之对应？有！爱因斯坦的相对论便是建立在黎曼几何这一基础之上,如三角形在球面上,其内角和便不等于180°.

1.1.4　相对性

数学的求真务实,不把目标绝对化,而是务实地承认“真”的相对性.数学中,定理、法则都是在其相应的空间内成立.数学认同这些定理、法则,不因其在某空间成立,而在另一空间不成立.因此,定理、法则之间不相互否定.

方程的求解是具体的求真,从这个具体的求真我们可清楚地看到,数学承认求真的相对性.据方程的求解理论,解方程,求出了解,当然是求出了真.方程的“解”可以不唯一,即求出的“真”可以不唯一.对代数方程而言,解的最多个数与方程次数相同.对于三角方程而言,有解便有无数个,而得出无解结论也是真.所谓无解,便是求不出满足条件的数.

方程的求解只要依据相应法则去探索,而且运算无误,不论得出的是一解、两解、多解或无解,数学都承认其为求真.于是,解方程这个具体的数学求真的目标也因题而异,即具有相对性,不存在一定要求出多少个解,或只能有多少个解等.

如在学习一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法时,得出判别式 $\Delta=b^2-4ac$,认定当 $\Delta<0$ 时,方程无解.后来学习了复数,当 $\Delta<0$ 时方程仍有两解. $\Delta<0$ 判定方程无解是在实数范围内,而认为其有解则是在复数集合内.还有一元二次方程可以有两个解,这两个解不互相排斥,所以关于一元二次方根的判别式的两种判断是不同层次的,这便是真的相对性.

因而,数学上的真具有的层次性是相对的,这种真在数学中处处都可碰到.如数学中的函数有定义域与值域,在其定义域内是正确的,不在其定义域内便不成立,无意义.在数值运算上,有取近似值的观念.在实数集合里,两数可以比较大小;但在复数集合里,两数便无大小可言.虽然实数包含于复数之中并不矛盾,其原因在于各自在不同领域,即存在不同层次、不同范围的真.

欧氏几何与罗氏几何对三角形三内角的判定也是数学真的层次性与相对性的表现.因此,欧氏几何里没有称罗氏几何为谬论的章节,罗氏几何里也没有