普通高等教育"十二五"规划教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

主 编 杨福民

（上）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十二五”规划教材

# 高等数学

## （上）

杨福民　主编

北京邮电大学出版社
·北京·

## 内容简介

本书是为适应教学改革而编写的应用型本科少课时用教材.全书分上、下两册,共12章.上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用.下册包括微分方程、无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分.

本书的特点是根据目前应用型本科学生实际情况和教学现状,本着以应用为目的,必需、够用为度的原则对教学内容、要求、篇幅作了适度调整.尽量突出对基本概念、基本理论、基本方法与运算的教与学,配有较多的难度适中的例题与习题.各章有内容小结和练习题,有利于内容的总结与归纳,知识点的衔接与贯通.书后附有期终测试样卷和练习题的参考答案,便于学生自学和练习.

本书适合培养应用型人才的理工类高等本科院校作为教材,也可供经济管理类专业学生使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学.上/杨福民主编.--北京:北京邮电大学出版社,2013.7(2016.6重印)

ISBN 978-7-5635-3512-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第104902号

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 高等数学(上) |
| 主　　编 | 杨福民 |
| 策 划 人 | 马　飞 |
| 责任编辑 | 张保林 |
| 出版发行 | 北京邮电大学出版社 |
| 社　　址 | 北京市海淀区西土城路10号(100876) |
| 电话传真 | 010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真) |
| 网　　址 | www3.buptpress.com |
| 电子信箱 | ctrd@buptpress.com |
| 经　　销 | 各地新华书店 |
| 印　　刷 | 北京泽宇印刷有限公司 |
| 开　　本 | 787 mm×960 mm　1/16 |
| 印　　张 | 14 |
| 字　　数 | 288千字 |
| 版　　次 | 2013年7月第1版　2016年6月第4次印刷 |

ISBN 978-7-5635-3512-5　　定价:28.00元

# 中国矿业大学银川学院
# 基础课部数学教研室编委会


主　编　杨福民

副主编　马廷福　张振祺　杨文海

参　编　（排名不分先后）

李　明　马永刚　卢　琴　刘俊梅

金　涛　张马媛　梁　艳

# 前　言

高等教育由精英教育转向大众教育的历程已十载有余，随着教学改革的深化，独立学院将办学定位于培养"应用型人才"，为此不断进行着探索和实践．新的培养模式的一个重要的方面就是突出和加强实践性的实验实训、实习和课程设计等教学环节．作为学科的公共基础课教学势必受到一定影响．与时俱进，认同并参与教学改革与实践，适应并服务于培养"应用型人才"的教学模式，确立大众化高等教育的教学质量观，将新的教学理念和教学方法、手段在教学的各个环节中实践与实施．

编写与之相适应的教材是亟待解决的一项改革任务，为应用型人才的培养提供及时、可靠、坚实的保证．一些院校人才培养计划中"高等数学"课程被安排为少课时的教学．面向培养对象，结合办学定位与教学目标，体现个性化的教与学，我们在吸收国内同类教材的优点基础上，结合多年教学的经验，确立教材编写以"因材施教，学以致用"为指导思想；贯彻"以应用为目的，以必需、够用为度"的教学原则；突出"基本概念、基本理论、基本计算方法"的教学要求．

教材编写力求有利于教师组织教学，有利于学生学习掌握课程的基本知识内容．使教师易讲、易教，学生易懂、易学．适当降低理论深度，突出数学知识的应用工具性，培养数学的思维和方法，提高应用能力和综合素质．

在教材的编写中妥善处理学科的系统性、严肃性与达到基本教学要求之间的关系，知识内容学习掌握与应用能力提高的关系，加强基础的教与学和兼顾素质教育的关系．

重视概念、侧重计算、启发应用．内容少而精，简化定理、性质的证明，对纯数学的定义、构造性的证明、技巧性强的数学计算或作几何直观解释，或作淡化、省略的处理．

参与本书的编写人员都是长期在一线从事本科数学教学的教师，有一定的教学经历和教学经验，在编写内容及深度方面较好地反映和体现了应用型本科的教学需求．每章内容小结是本章重要知识点及主要方法的汇总，并简单介绍了本章内容在学科中的

地位作用以及与其他章节内容的联系,起到融会贯通地掌握学习内容的作用.各章节的教学要求及重点与难点是依据学科教学大纲,并结合学生实际水平提出的一个多层次基本教学要求,作为教与学的指导意见.每章节配置了较多的例题和习题,易于练习,便于自学.教师在授课时可有选择地使用其中的部分,其余供有精力的学生自主学习,自行完成.

《高等数学》上、下册由中国矿业大学银川学院数学教研室编写.本教材是为独立学院理工类应用型本科编写,适合"高等数学"少学时(约128学时)的教学.用"*"号标的内容,针对不同层次的教学要求,教师在授课时可按专业的要求有选择地使用.

学院和教务处的领导对教材的出版给予了极大的关注和支持.出版社的领导和编辑们对本书的编辑和出版给予了具体的指导和帮助,编者对此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,教材中难免存在不妥之处,敬请专家、同行及读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编写组

2013年6月

# 目　　录

# 第1章 函　　数

初等数学主要研究的对象是常量，而高等数学主要研究的对象是变量.变量与变量之间的依赖关系，即函数关系，是高等数学研究的主要内容，本章将在复习和归纳中学数学有关知识的基础上，引入初等函数的概念.

## §1.1 区间与邻域

### 1.1.1 集合的概念

**1. 集合**

集合是数学中的一个基本概念，简单地说，具有某种属性的事物的全体称为一个**集合**.构成集合的事物称为集合的**元素**.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，则记作 $a\in A$，读作 $a$ 属于 $A$.如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，则记作 $a\notin A$，读作 $a$ 不属于 $A$.

如果集合 $A$ 只包含有限个元素，则称 $A$ 为**有限集**；否则称为**无限集**.

**全集**:研究问题的全体元素的集合，记为 $\Omega$.

**子集**:若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 $A$ 是 $B$ 的子集，记为 $A\subset B$.

**空集**:不含任何元素的集合，记为$\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

**2. 集合的表示方法**

**列举法**:把集合的全体元素一一列举出来.

**描述法**:由具有某种性质 $P$ 的全体元素所组成的集合，表示为 $M=\{x|x$ 具有性质 $P\}$.

**图示法(文氏图)**:用一封闭曲线所围成的图形表示集合.

**3. 集合的运算**

设 $A,B$ 是两个集合.

(1) $A$ 与 $B$ 的**并集**(简称并)，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

(2) $A$ 与 $B$ 的**交集**(简称交)，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

(3) $A$ 与 $B$ 的**差集**(简称差),记为 $A-B$,即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

$\Omega-A$ 称为 $A$ 的**余集或补集**,记为 $\overline{A}$.

**4. 常用的数集**

自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

正整数集 $\mathbf{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

整数集 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

有理数集 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}\text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$.

有理数与无理数统称为**实数**,记为 $\mathbf{R}$. 数轴上的点与实数一一对应.

### 1.1.2 绝对值

**1. 概念**

实数 $x$ 的绝对值,记为 $|x|$.

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

绝对值是一个非负实数,即 $|x|=\sqrt{x^2}\geqslant 0$,其几何意义为数轴上点 $x$ 到原点的距离.

**2. 绝对值的性质**

(1) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(2) 设 $a>0$,则

$$|x|<a \quad\Leftrightarrow\quad -a<x<a;$$

$$|x|>a \quad\Leftrightarrow\quad x<-a \text{ 或者 } x>a.$$

(3) $|xy|=|x|\,|y|$, $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

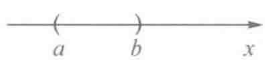
(4) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$(三角不等式).

### 1.1.3 区间与邻域

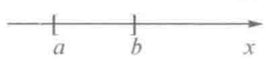
**1. 区间**

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$.

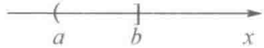
**开区间**:记为 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$,在数轴上表示为



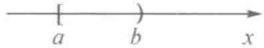

**闭区间**:记为 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$,在数轴上表示为



**半开区间**:记为$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,在数轴上表示为




$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,在数轴上表示为




$a$ 为区间左端点,$b$ 为右端点. $b-a$ 称为区间的长度.

**无限区间**:记为

$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\};$$
$$(a,+\infty)=\{x|x>a\};\quad [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\};\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

记号$+\infty$与$-\infty$分别读作"正无穷"与"负无穷",它们不表示任何数.

**2. 邻域**

区间$(a-\delta,a+\delta)=\{x|\,|x-a|<\delta,\delta>0\}$称为 ***a* 的 *δ* 邻域**,记为$U(a,\delta)$. 其中 $a$ 为邻域的中心,$\delta$ 为邻域的半径(见图 1-1).

在$U(a,\delta)$中去掉中心点 $a$ 得到的实数集$\{x|0<|x-a|<\delta,\delta>0\}$称为 $a$ **的去心的 *δ* 邻域**,记作$\mathring{U}(a,\delta)$. 有$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$(见图 1-2).

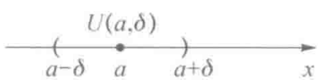



**图 1-1**

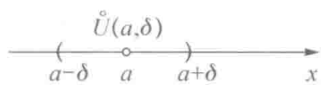



**图 1-2**

# 习 题 1.1

1. 如果$A=\{x|3<x<5\}$,$B=\{x|x>4\}$,求:

(1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$; (3) $A-B$.

2. 设全集$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,4,6\}$,求:

(1) $\overline{A}$; (2) $\overline{B}$; (3) $\overline{A}\cup\overline{B}$; (4) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

3. 解下列不等式:

(1) $|x-4|<7$; (2) $x^2-4x+3>0$;

(3) $\dfrac{2x-1}{x+2}<1$; (4) $|x+1|>2$.

# §1.2 函　　数

## 1.2.1 函数的概念

### 1. 常量与变量

在实际问题中,我们经常遇到各种各样的量.如果一个量在某个过程中保持不变,称其为常量;如果一个量在某个过程中是变化的,称其为变量.常量可以看成特殊的变量.

一般常量用 $a,b,c,\cdots$ 表示,变量用 $x,y,t,\cdots$ 表示.

例如,用一根长度为 $l$ 的铁丝围成一个矩形的框架,用 $x$ 表示矩形的长,则

$$\text{矩形的宽 } y=\frac{l}{2}-x, \qquad \text{矩形的面积 } S=x\left(\frac{l}{2}-x\right).$$

在这个问题中,$l$ 是常量,$x,y,S$ 都是变量.

### 2. 函数的定义

在同一个过程中,往往有几个变量同时存在,变量与变量之间的依赖关系称为函数.本章只讨论两个变量的情况.

**例 1**(自由落体运动)　设物体下落的时间为 $t$,下落的距离为 $s$,假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么 $s$ 与 $t$ 之间的依赖关系由下式给定:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g$ 是重力加速度.假定物体着地时刻 $t=T$,那么当时间 $t$ 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一值时,由上式就可以确定相应的 $s$ 值.

**定义 1.1**　设变量 $x$ 和 $y$,$D$ 是非空数集.如果对任何的 $x\in D$,按照一定的对应法则 $f$ 都有唯一确定的 $y$ 值与之对应,称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数,记作

$$y=f(x),$$

称 $D$ 为函数的**定义域**,称 $x$ 为**自变量**,称 $y$ 为**因变量**.

$y$ 与 $x$ 的对应关系 $f$ 称为函数关系,习惯上称为函数 $y$ 或函数 $f(x)$.

当自变量 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时,与 $x_0$ 对应的函数 $y$ 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的**函数值**,记为 $y=f(x_0)$,或 $y|_{x=x_0}$.

当 $x$ 取遍 $D$ 的各个数值时,对应的函数 $y$ 取值的全体称为函数的**值域**,记为 $f(D)$.即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

函数的表示法通常有三种:公式法、图像法和表格法.

定义域 $D$ 和对应法则 $f$ 称为函数的两个要素.当两个函数的定义域和对应法则相同时,则认为这两个函数相同.

确定函数的定义域要注意：

(1) 偶次方根下的项非负；

(2) 分式的分母不能为零；

(3) 对数的真数大于零；

(4) 某些三角函数及反三角函数有各自的取值要求；

(5) 函数由几个式子运算构成，其定义域为各个式子定义域的交集.

**例2**　求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

**解**　要使函数有定义，必须使

$$3x-2>0 \quad 且 \quad 3x-2\neq 1$$

即

$$x>\frac{2}{3} \quad 且 \quad x\neq 1.$$

因此函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为 $D=\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

**例3**　求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

**解**　要使函数有定义，必须使

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1 \quad 且 \quad x^2<25$$

即

$$-4\leqslant x\leqslant 6 \quad 且 \quad -5<x<5.$$

所以函数的定义域

$$D=[-4,6]\cap(-5,5)=[-4,5).$$

**3. 函数及其解析式的其他形式**

1) 反函数

**定义1.2**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，值域为 $f(D)$，若对于任意的 $y\in f(D)$，在 $D$ 内都有唯一确定的 $x$ 与之对应，记为 $x=\varphi(y)$. 称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 一般称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

在同一个坐标系下，$x=\varphi(y)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形是同一个. 习惯上用 $x$ 表示自变量，$y$ 表示函数，所以将反函数记为 $y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$. 由于改变了自变量与因变量的记号，因而 $y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的(见图1-3).

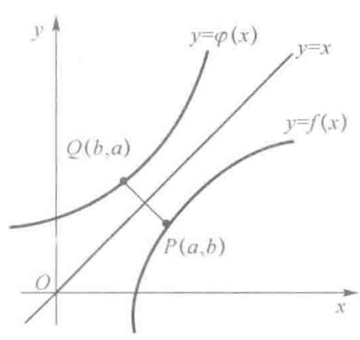



图1-3

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $D$ 上单调，则它在这个区间上存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，且反函数在区间 $f(D)$ 上也是单调的.