华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

62

WILEY

Financial Statistics and Mathematical Finance

Methods, Models and Applications

金融统计与数理金融

方法、模型及应用

[德] 安斯加尔·斯特兰 (Ansgar Steland) 著

冉启康 尤成其 刘诚霖 译

机械工业出版社
China Machine Press

Financial Statistics and Mathematical Finance

Methods, Models and Applications

金融统计与数理金融

方法、模型及应用

[德] 安斯加尔·斯特兰 著
(Ansgar Steland)

冉启康 尤成其 刘诚霖 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

金融统计与数理金融：方法、模型及应用 /（德）安斯加尔·斯特兰（Ansgar Steland）著；冉启康，尤成其，刘诚霖译．—北京：机械工业出版社，2017.6
（华章数学译丛）
书名原文：Financial Statistics and Mathematical Finance：Methods，Models and Applications

ISBN 978-7-111-57301-2

I. 金…　II. ①安…　②冉…　③尤…　④刘…　III. ①金融统计　②金融学－数理经济学　IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 160034 号

本书版权登记号：图字：01-2012-7783

本书讨论了金融中统计方法应用的方方面面以及金融应用中统计工具使用的多种途径．首先简要介绍了金融统计和数理金融的基础知识，接着阐释了经济和金融工程中统计方法的应用和重要性，最后阐述了鞅理论、随机过程、随机积分等高级论题．本书适合统计学、金融数学、计量经济学、商务管理等专业的研究生和相关领域的从业者和研究人员阅读，许多章节也适合具有微积分和概率统计基础的本科生阅读．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码：100037）

责任编辑：和　静	责任校对：李秋荣
印　　刷：三河市宏图印务有限公司	版　　次：2017 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：186mm×240mm　1/16	印　　张：20.75
书　　号：ISBN 978-7-111-57301-2	定　　价：85.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

自20世纪50年代以来，随着金融学理论与金融市场和工具的不断发展，数学与统计在金融研究中的作用显得越来越重要. 反之，统计与数学理论及方法在金融学中的应用又极大地促进了金融理论的发展，数理金融学由此孕育而生. 数理金融是20世纪80年代末90年代初出现的一门新兴学科，它是以现代数学、统计及金融理论为基础，综合利用数学模型、数值计算等开发、设计金融产品，创造性地解决各种金融问题的一门学科，其核心内容是研究不确定随机环境下的投资组合的最优选择理论和资产的定价理论. 套利、最优与均衡是数理金融的基本经济思想和三大基本概念.

本书是一部近期在西方国家非常流行的著作. 它使用时间序列分析、随机过程、随机分析等理论详细地介绍了离散时间与连续时间的金融衍生产品定价理论. 作者以高超的手法对金融衍生产品定价中所需的统计与数学理论进行了全面的描述和总结，并系统地介绍了金融衍生产品的常用定价方法和最新进展.

本书内容丰富、推导严谨、案例翔实. 由于作者在内容选择、结构安排和逻辑体系设计方面的精巧构思，所以能以相对较少的篇幅，把书中所讨论的问题的经济背景以及解决这些问题的数学方法和基本思想，系统而又简明地展示给读者，且具有相当的深度. 本书是为金融市场的量化所需的一些最重要的统计及数学理论提供的一本系统而且深入的教材，它包含了非常前沿的金融统计与数理金融. 目前，为期权这种未定权益定价的数学理论——数理金融，与分析来自金融市场数据的统计方法与统计模型的理论——金融统计这两个领域在发展过程中或多或少地相互分离了，而同时覆盖这两个领域的教材非常缺乏，而此书将这两个领域有机地整合到了一起. 本书适合于硕士生、博士生，高水平的研究人员以及对数理金融或金融统计感兴趣的实践工作者阅读. 其中许多章节也适合已经学习了微积分、概率论及统计的本科生阅读.

受机械工业出版社华章公司之托，我们将此书译成中文. 全书由上海财经大学数学学院冉启康教授，研究生尤成其、刘诚霖共同翻译，王清华老师参与了校对工作。限于时间和水平，译文的不当之处在所难免，敬请本书的读者和有关领域的专家批评指正.

前　言

本书系统而且深入地介绍了金融市场的量化所需的一些最重要的数学理论，它包含了狭义的数理金融：为期权这种未定权益定价的套利理论及相关的数学理论，以及分析来自金融市场数据的统计方法与统计模型．这两个领域在发展过程中或多或少地相互分离了，而同时覆盖这两个领域的教材又非常缺乏，这是我写作本书的主要动机．我尝试着实现这一目的．本书适合硕士生、博士生、研究人员以及对上述两个领域感兴趣的实践工作者阅读．其中许多章节也适合已经学习了微积分、概率论及统计的本科生阅读．除了少数例外，所有的结果都给出了详细的证明，尽管可能与传统的证法有所不同．为了避免过多的概念、记号、模型和方法使得教材变得太复杂，也为了读者在首次阅读的时候就能跟随计算和推导快速地掌握本书的内容，我们尽可能地使本书的数学公式及记号初等化．在每章的结尾部分，我们都给出了所用参考文献的评注，这有助于更好地理解本书，也为进一步的学习提供了参考．

第 1 章从介绍一些重要的概念，如期权、金融衍生品等金融工具及相关的交易策略开始．但本章的重点不是阐述衍生品的原理和基本结果，而是引入后续章节所需的各种金融术语．本章也给出了现金流、贴现和利率期限结构的初步介绍．在一段给定时期上的资产收益（通常是日均收益）是金融市场中非常重要的研究主体，因为资产可根据收益重新定价，评判投资的依据也是资产的收益．对于收益的预估、预估误差、扰动范围等量的统计学分析有着重要的经济意义，所以，本章对相关的统计估计方法作了详细的介绍．要对投资风险进行度量必须知道相关统计估计的性质．例如，波动率与投资收益的标准误差密切相关，而风险价值，顾名思义，需要研究风险的量化及它们的统计估计．第 1 章以初步介绍期权定价作结尾，引入了数理金融学中最重要的一些概念，如无套利原理、风险中性定价原理，以及这些概念与概率演算（特别是等价鞅测度的存在性）的关系．事实上，通过最基础的介绍或一些简单的实例，就可以迅速掌握以上概念和基本结论．

第 2 章讨论套利理论和单期模型的未定权益的定价．设在 0 时刻，投资者建立了一个资产组合，需要讨论该资产组合在 1 时刻的收益状况．在一个简单的框架内，本章对第 1 章的结果作严格的数学处理，并将结果从有限概率空间（在该空间假设下，市场仅有有限种情况发生）推广到一般概率空间中去，使之更符合实际市场．空间分离定理表明，任意给定一个点，我们可以把它和指定的凸集分离．分离定理被用来证明套利机会消失及等价鞅测度的存在性，因此本章给出了分离定理的详细介绍，并给出了建立在 Esscher 变换下的等价鞅测度的构造方法．

第 3 章详细地介绍了离散时间（时间序列）的随机过程，包括鞅、鞅差分序列、线性过程、ARMA 过程、GARCH 过程，以及长记忆序列．鞅是数理金融中的一个基本概念，研究结论表明，在任意无套利的金融市场中，均存在一个概率测度，使得风险资产的贴现价格过程在该测度下是一个鞅，而任意一项未定权益，均能在该测度下得到它的风险中性定价，鞅理论对得到这些成果起到了关键性的作用．但是本章仅限于介绍在后面各章中需

要用到的鞅性质. 对鞅过程取一阶差分，即*鞅差分序列*，白噪声是它的一种形式，通常用来代替金融随机模型甚至经济随机模型中误差项是独立同分布这种不符合现实的假定. 统计分析表明，金融收益序列可以被假定为不相关的，但通常它们不是独立的. 当然具有相关性的一些时间序列也需要纳入考虑. ARMA 时间序列模型是一类适用范围较广的参数模型，它是一般的无限维线性过程，本章介绍了 ARMA 模型的参数和自协方差函数的估计方法. 许多金融时间序列还有条件异方差性，为此引出了 GARCH 模型. 本章的最后介绍了分数阶差分和长记忆过程.

第 4 章详细介绍了离散时间的多期模型的套利理论，在本章的模型中假设交易发生在一系列有限的时刻，在每个时刻，投资者均可以利用已知的市场信息来调整资产组合. 可以应用第 3 章的离散时间的鞅理论来研究无套利金融市场上期权和其他衍生品的定价. 本章详细研究了 CRR 二叉树模型，该模型是实际应用中的标准模型之一，由它可导出著名的欧式看涨期权的 Black-Scholes 定价公式. 除此之外，本章还讨论了美式权益的定价方法，其中需要用到最优停时的高等数学理论.

第 5 章介绍连续时间的随机过程. 布朗运动是金融市场连续时间价格模型的主要随机源，为了使得内容简洁，本章仅限于讨论布朗运动的定义及最重要的一些性质. 布朗运动有一些令人惊讶的性质，比如：路径连续但处处不可微，或不存在有界变差. 本章还分别介绍了布朗运动的推广模型——分数布朗运动和 Lévy 过程. Lévy 过程保留了独立增量的性质，但是允许其增量是非正态分布的，包括其增量可能是厚尾分布并带有跳的. 与布朗运动一样，分数布朗运动也是一个高斯过程，但分数布朗运动可能有长相依的增量，即相关性减少得非常慢.

第 6 章介绍随机积分理论. 在默认读者已经掌握 Riemann 积分和 Lebesgue 积分的基础上，本章从介绍 Riemann 积分的直接推广——Riemann-Stieltjes（RS）积分开始，这种积分相对来说比较容易，它为引入 Itô积分作了铺垫. 值得一提的是 RS 积分可以用来研究许多统计问题. 可是如果没有 Itô积分，就无法继续讨论数理金融. 主要原因在于：在时间 $[t,t+\delta]$ 内，股票数为 $x(t)=x_t$，资产变化为 $x_t\delta P_t$，其中，$\delta P_t=P_{t+\delta}-P_t$. 在 n 期时间 $[i\delta,\ (i+1)\delta](i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ 上资产的累积变化为 $\sum_{i=0}^{n-1}x(i\delta)\delta P_{i\delta}$. 现取极限 $\delta\to 0$，就出现了一个关于股票价格的积分 $\int x_s\mathrm{d}P_s$，但是当股价不是有界变差过程时，这个积分在 Stieltjes 意义下是没有意义的，这就必须要引入 Itô积分. 本章还将介绍应用中常见的 Itô过程. Itô公式表明：一个 Itô过程的光滑函数仍是 Itô过程，且这个 Itô过程可以具体表示出来. 作为一类重要的 Itô过程，遍历扩散也将在本章中介绍. 本章介绍的 Euler 数值逼近方法为离散样本遍历扩散的统计估计及统计推断奠定了基础.

第 7 章介绍衍生品定价的一个理想的数学模型，即 Black-Scholes 模型，在实务中，它仍是连续时间模型的基准. 在本章的模型中，投资者可以把资金投资于有风险的股票，也可以存入银行获得固定利息. 第 6 章介绍的 Itô积分为建立连续时间模型的套利理论提供了数学基础. 经典的 Black-Scholes 模型假定股价的波动率与时间无关，但现实中常常不是这

样. 因此，本章还简要地讨论了波动率是与时间有关但是非随机的情形. 最后，本章介绍推广的 Black-Scholes 模型，在这种模型中，它允许无风险工具的利率随时间变化且是随机的，这包含了不投资于股票的资金可以购买比如 AAA 级政府债券这一现实情形.

第 8 章介绍离散时间过程的渐近极限理论，这种离散过程用来构建所需的模型；经常用金融数据（如收益、指数、价格和风险度量等）来估计、推断及检验模型就是这样一种过程. 极限理论包括了鞅差、线性过程以及混合过程的大数定律和中心极限定理，其内容还在不断扩展. 本章还深入讨论了带随机回归量的多元线性回归、非参数密度估计、非参数回归以及自协方差和长期方差估计等内容，这些统计工具在金融数据分析中处处用到.

第 9 章讨论了一些特定的专题. Copula 函数已成为对高维分布建模的一个重要工具，在应用于信用及违约相关的金融工具的定价时，它是强有力的，但同时也是危险的. 事实上，在 2008 年的金融危机中它们扮演了一个不幸的角色，在那个时候，这个简单的定价模型被大规模地应用于信用违约债务的定价. 对导致这场危机的原因进行回顾，它揭示了金融市场固有的复杂性以及对复杂数学模型的需求. 本章将详细地介绍局部多项式估计，因为它在许多金融问题中都有重要的应用，比如风险中性密度条件波动率的估计或有离散观测值的扩散过程的估计. 渐近正态性是建立在下列强大的还原原理基础上的：扰动项 $\{\varepsilon_t\}$ 以及回归量的驱动过程的（联合）平滑中心极限定理蕴含了局部线性估计量的渐近正态性. 变点（结构性改变）检验和监测已成为当前理论和应用研究的热点，本章的最后简要地介绍了变点分析和监测，其中主要介绍单整阶数改变的监测.

本书附设一个专用网站：http://fsmf.stochastik.rwth-aachen.de.

致谢

我要衷心地感谢我的学生和助理 Martin Euskirchen、Wolfgant Herff 博士和 Annabel Prause 硕士，是他们仔细地阅读了此书的初稿，Martin Euskirchen 还帮助输入了部分章节. 我还要特别感谢 Mohammed Abujarad 博士，他校对了本书的最后版本，发现了一些写作错误和许多的打印错误，并为最终的成书提出了几个建议. 最后，我要感谢我的家人，特别是我的孩子们对我的支持.

Ansgar Steland
于德国 RWTH Aachen 大学

目　录

第1章　金融微积分基础

1.1　几个引例

▶例 1.1.1　设有一个向职工收取保费的养老基金，该基金计划把部分资金投资于交易所的股票，而不是国库券．国库券的固定利率可以事先获知，而股票收益却是不确定的．它可能大大超出债券利率，也可能因股价下跌而使基金遭受损失．对养老基金来说，了解该投资带来的预期收益和相应的投资风险是至关重要的，这有助于确定股票的投资额度．实际市场中，投资者会投资于一系列的风险资产组合．其中引出的问题是：资产组合之间的相互关系是什么？现代金融学用服从特定分布的随机变量来描述收益．因此，必须从数学和统计学的角度考虑收益满足的特征，从经济学的角度考虑收益的期望、收益的风险，并给出精确的度量．进一步，在给定历史数据的时间序列后，需考虑如何得到序列的预测值．◀

▶例 1.1.2　为了减少股票投资可能带来的损失，养老基金可以和银行签订合约，当合约敲定的止损价 L 大于股价 S 时，基金可以对该合约行权，要求银行支付价差，这种合约被称为期权．如何为该期权作公平定价，银行为对冲期权空头应如何确定投资策略？◀

▶例 1.1.3　设某钢铁厂为年产量为 10 000 辆的汽车制造厂提供必需的钢材，钢铁厂年内开始生产，需要耗用大量石油．为了计算成本，钢铁厂希望能事先锁定油价，不妨设为 K．一个可行的方法是，钢铁厂可以签订一项合约，在合约的交割期，如果实际油价高于 K 值，那么钢铁厂可以要求对方支付价差．这类合约被称为看涨期权．同样地引出一个问题：合约的公平定价如何确定？钢铁厂锁定油价的另一个可行方法是远期或期货合约．◀

▶例 1.1.4　更具体地讨论例 1.1.3，设钢铁厂需要一桶石油，在当前时刻 $t=0$，石油现价 $S_0=100$．为了锁定油价，钢铁厂购买了一份买方看涨期权，执行价 $K=100$．不妨设固定利率为 1%，同时设一年后，即在时刻 $t=1$ 时的油价 S_1 满足如下的两点分布，

$$P(S_1=110)=0.6,\quad P(S_1=90)=0.4.$$

如果 $S_1=110$，钢铁厂对期权行权可获利 $G=10$，否则期权收益为 0．因此，期望收益为：

$$E(G)=10\times 0.6=6.$$

由于期权购买者具有非负收益，并且能以正的概率获得实际收益，因此，钢铁厂需要给出售期权的银行支付溢价．则银行应当以预期收益 6 作价出售该期权吗？令人惊讶的是，答案是否定的．事实上，期权的中间交易商可以一个更低的价格(例如 $x=5.45$)出售期权而不遭受损失．设交易商在 $t=0$ 时出售一份期权并以现价 50 购买 0.5 单位石油．资金流为：出售期权进账 x，购买石油负债 50．在 $t=0$ 时，投资组合包括货币市场的 $x-50$ 和产品市场的 0.5 单位石油．假定 $x<50$，那么，在 $t=1$ 时，交易商需要支付 $1.01\times|x-50|$ 给银行．分别考虑油价上涨和下跌两种情况．若油价上涨，石油升值为 $0.1\times 110=55$，此时钢铁厂行权，交易商从钢铁厂获得 100 元．则溢价 x 的合理取值是使得净支出等于购买的石

油的价格，即满足方程

$$100 + 1.01 \times (x - 50) = 55,$$

解得 $x=5.445\,545 \approx 5.45$. 现在考虑油价下跌至 90 的情况，此时钢铁厂不行权转而从现货市场购买石油. 交易商仍然需要偿还借款，并低价出售石油而带来损失 5. 则溢价 x 必须保证净损益为 0，即满足方程

$$0.5 \times 90 + 1.01 \times (x - 50) = 0.$$

同样得到 $x=5.445\,545$，注意到两个方程得到了一致的非随机解 x. ◀

1.2 现金流、利率、价格和收益

首先引入一些基本概念和公式. 任一开始于时刻 $t=t_0$，终止于 T 的投资，都对应一个从数学角度描述该项投资的现金流的银行账户. 标准记法如下：记发生支付的时刻分别为 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$，对应的支付为 X_1，…，X_T. 同时约定：若支付 $X_i>0$，表示账户

2 有进账；若支付 $X_i<0$，表示有支出.

从经济学角度讲，现在和将来同一数额的支付存在着巨大的差异. 为了比较该差异，考虑利息因素，或对支付贴现，将支付累计至时刻 t^*. 如果所有支付均被贴现至 $t^*=t_0$ 时刻，那么该贴现量被称为**现值**；当然，也可以选择将支付累计至时刻 $t^*=T$ 比较.

在实际中，必须确定如何分割时段，比较时间点 t_1 和 t_2 之间的经济学差异，最常用的做法是以年为基数分段. 假设日期以日-月-年的习惯给出，即 $t=(d, m, y)$. 记日期 t_1 和 t_2 之间的差异为 $\tau(t_1, t_2)$，计算 $\tau(t_1, t_2)$ 常用的基准如下：

（ⅰ）Actual/365：每年计 365 天，以实际天数计算；

（ⅱ）Actual/360：每年计 360 天，以实际天数计算；

（ⅲ）30/360：每年计 360 天，每月计 30 天.

在后面的章节中，假定所有时间均服从以上基准.

设固定年利率为 r，利息支付不采取复利形式，则日期 t_1，…，t_n 对应的支付 X_1，…，X_n 在 $t=T$ 时的价值有如下表达式

$$V_T = \sum_{i=0}^{n} X_i(1 + \tau(t_i, 1)r).$$

而 $t=0$ 时的现值可由以下公式计算：

$$V_0 = \sum_{i=0}^{n} X_i D(0, t_i), \quad \text{其中} \quad D(0, t_i) = \frac{1 + \tau(t_i, T)r}{1 + rT}.$$

这里 $D(0, t_i)$ 表示时刻 t_i 对应的支付 X_i 的贴现因子.

通常，利息是在年内某个固定时段支付的，比如说，按季或按月支付. 把一年分成 m 个时段，同时在每一时段赋予利率 r/m，则一单位的投资经过 k 个时段后增值为：

$$1 + \frac{r}{m}k.$$

若考虑复利，则价值变为

$$(1 + r/m)^k.$$

当 $k=m\to\infty$ 时，该离散利率序列趋于连续复利，即

$$\lim_{m\to\infty}(1+r/m)^m = \mathrm{e}^r. \qquad 3$$

因此，若一项投资持续 $t\in(0,\ \infty)$ 年，经历了 tm 个时段，那么，其累计贴现因子为

$$\lim_{m\to\infty}(1+r/m)^{mt} = \mathrm{e}^{rt}.$$

现考虑利率 $r=r(t)$ 是时间 t 的函数，且满足 $r(t)>0$，$t>0$，账户余额 $S_0(t)$ 连续增长的情形. 有两种方法可以描述这些量的关系：一种是利用带 $S_0(t)$ 的模型；一种是利用 $r(t)$. 首先假定 $S_0(t)$ 已经给出，则时段 $[t,\ t+h]$ 内的年增长率为：

$$\frac{1}{h}\frac{S_0(t+h)-S_0(t)}{S_0(t)}.$$

定义 1.2.1 假设账户余额 $S_0(t)$ 是可微函数，则

$$r(t)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\frac{S_0(t+h)-S_0(t)}{S_0(t)}$$

有定义，称为**即时利率**或者**瞬时利率**.

由上式知：

$$r(t)=\frac{S_0'(t)}{S_0(t)} \quad\Leftrightarrow\quad S_0'(t)=r(t)S_0(t).$$

对应的微分形式为：

$$\mathrm{d}B(t)=r(t)B(t)\mathrm{d}t.$$

众所周知，该常微分方程的通解为 $S_0(t)=C\exp\left(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right)$，$C\in\mathbf{R}$. 在本例中，对应于初值 $S_0(0)=1$ 的特解为

$$S_0(t)=\exp\left(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right). \tag{1.1}$$

若对任意的 t，均有 $r(t)=r$，则得到 $S_0(t)=\mathrm{e}^{rt}$，与前面的结果一致.

在金融模型中，一般采用的是瞬时利率，因此常用式(1.1)来表示账户余额.

定义 1.2.2(银行账户) 一个初始资本为 1、采取即时利率 $r(t)$ 和连续复利计算的银行账户余额可表示为

$$S_0(t)=\exp\left(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right),\quad t\geqslant 0.$$

若初始投资资金为 x，则在时刻 t 的资金为 $xS_0(t)$. 反过来，为了在时刻 T 得到一单位的货币，需要在 $t=0$ 时注入 $x=1/S_0(T)$ 单位的资金，初始资金 $x=1/S_0(T)$ 在任意时刻 4
$t\in[0,\ T]$ 的累积值为：

$$xS_0(t)=\frac{S_0(t)}{S_0(T)}.$$

上式表明，T 时刻的一单位支付在 $t=0$ 时的价值为 $S_0(t)/S_0(T)$.

定义 1.2.3 时刻 t 到 T 之间的**折现因子** D 是使得 t 时刻的 D 单位资金在无风险的投资回报下等于 T 时刻的一单位资金，它的表达式为：

$$D(t,T)=\frac{S_0(t)}{S_0(T)}=\exp\left(-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right).$$

1.2.1 债券和利率期限结构

前面讨论的基础知识可用于债券定价和理解利率期限结构理论.

零息券是一种在**到期日**按**面值**(记为 X)支付一定数额货币的债券，零息券也称为**折扣券**. 本节和以后章节中，均假定债券是由政府发行，因此可以忽略其违约风险，同时假设时间以年为计量单位，年利率为 r. 由前面的讨论知，支付 X 的现值为

$$P_n(X)=\frac{X}{(1+r)^n}.$$

注意到该公式决定了债券定价和利率之间的一一对应关系. 这里的利率 r 同时是到期日 n 的**贴现率**或者**即期利率**，所谓即期利率是指合约中约定的当期利率.

现在考虑带息券：设在时刻 t_1，…，t_k，利息支付分别为 C_1，…，C_k，在到期日 T 支付现值为 X. 这一系列支付的现值等价于一串面值分别为 C_1，…，C_k，X，到期日分别为 t_1，…，t_k，T 的零息债券之和，因此，其价格由下列**债券定价公式**给出

$$P(t)=\sum_{i=1}^{k}C_iP(t,t_i)+XP(t,T),$$

如果用 $\tau_j=t_j-t$ 表示从时间点 t 到第 j 个支付的时差(即到期期限)，则上式等价于

$$P(t)=\sum_{i=1}^{k}C_iP(t,t+\tau_i)+XP(t,T).$$

由此可知，债券在时刻 t 的价格由曲线 $\tau\mapsto P(t,\ t+\tau)$决定，该曲线给出了时差为 τ，支付

5 1 个单位的零息债券在时刻 t 的价格. 这种方法称为**利率期限结构**.

也可采取第二种方法来讨论利率期限结构. 设零息券到期日为 $t+m$，面值为 1，记 $P(t,\ t+m)$为该债券在时刻 t 的价格，同时给定 m 年后到期债券在时刻 t 的即期利率 $r(t,\ t+m)$，则债券价格为

$$P(t,t+m)=\frac{1}{(1+r(t,t+m))^m}.$$

如果利息在期限内采取连续复利形式以等距 n 时段支付，则有

$$P(t,t+m)=\frac{1}{(1+r(t,t+m)/n)^{nm}}$$

当 n 变化时，上式收敛于连续复利公式. 令 $T=t+m$，则有

$$P(t,t+m)=\mathrm{e}^{-r(t,t+m)m}\quad\Leftrightarrow\quad P(t,T)=\mathrm{e}^{-r(t,T)(T-t)}.$$

连续复利率 $r(t,\ T)$也称为**到期收益率**，而函数 $t\mapsto r(t,\ T)$称为**收益率曲线**.

最后，还可以通过时刻 t 的即时远期利率来得到利率期限结构，到期日为 T 的即时远期利率定义为：

$$f(t,T)=\frac{-\dfrac{\partial}{\partial T}P(t,T)}{P(t,T)}=-\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T).$$

这里假定债券价格 $P(t,\ T)$关于到期期限可微，则得到

$$P(t,T)=\exp\left(-\int_0^{\tau}f(t,t+s)\mathrm{d}s\right),\quad r(t,t+\tau)=-\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}f(t,t+s)\mathrm{d}s.$$

1.2.2 资产收益

对于收益固定的债券，如国库券，因为利率已知，其投资价值可以事前确定. 但对于股票等风险资产来说，它们的收益率是通过市场价格来计算的.

令 S_t 为时刻 t 的股价，因为股价通常是在某些等距时刻报出，一般可以将时间赋值为离散的自然数集 $\mathbf{N}$. 如果投资者在时刻 $t-1$ 至 t 之间持有一份股票，则股价变化记为

$$S_t = S_{t-1}(1+R_t),$$

其中，

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$ 6

称为净收益，而

$$1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

称为总收益. 资产收益是如何随时间积累的呢？设投资者在时刻 s 至 $t=s+k$ 的 k 个时段中持有一份股票，s，t，$k\in\mathbf{N}$(更一般地，s，t，$k\in[0,\infty)$). 定义 k-时段的收益为

$$R_t(k) = \frac{S_t - S_s}{S_s} = \frac{S_t}{S_s} - 1.$$

易知单期收益 R_{s+1}，…，R_t 和 k-时段收益之间具有如下关系：

$$1 + R_t(k) = \frac{S_t}{S_s} = \prod_{i=s+1}^{t} \frac{S_i}{S_{i-1}} = \prod_{i=s+1}^{t}(1+R_i).$$

当资产持有期为 k 年，则年均收益(有效收益)为下列几何平均

$$R_{t,k} = \left[\prod_{i=0}^{k-1}(1+R_{t+i})\right]^{1/k} - 1.$$

一项具有固定的年收益 $R_{t,k}$ 的投资将会产生同样的累计收益. 上式等价于

$$R_{t,k} = \exp\left[\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log(1+R_{t+i})\right] - 1. \tag{1.2}$$

总收益的自然对数形式

$$r_t = \log(1+R_t) = \log\frac{S_t}{S_{t-1}}$$

称为**对数收益**. 由式(1.2)可以得到从 s 到 $t=s+k$ 的 k-时段对数收益为

$$r_t(k) = \log(1+R_t(k)) = \sum_{i=s+1}^{t}\log(1+R_i) = \sum_{i=s+1}^{t} r_i.$$

和收益 R_t 相比较，对数收益具有对时间可加性的良好性质.

有了以上定义，就可以得到资产价格的下列基本乘法分解公式

$$S_t = S_0\prod_{i=1}^{t}(1+R_i) = S_0\prod_{i=1}^{t}\exp(r_i).$$ 7

1.2.3 资产价格基本模型

当股票在交易所上市时(上市前认为不存在报价)，记 S_0，S_1，…为它的一系列报价，报价通常是它的市场收盘价．其中 $S_0>0$ 表示初始报价，一般可以认为是个常数．为了避免初始价格带来的影响，也可以事先令 $S_0=0$.

求股价随机模型的第一种方法是假设股价变化量满足

$$\Delta+u_n, \quad n=1,2,\cdots$$

其中，$\Delta\in\mathbf{R}$ 是非随机常量，$u_n(n\in\mathbf{N})$是一列独立同分布的随机变量，其分布函数为 F，并满足：

$$E(u_n)=0, \quad \mathrm{Var}(u_n)=\sigma^2\in(0,\infty), \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

在本书中，称 u_n 为**新息值**．新息序列通常记为$\{u_n, n\in\mathbf{N}_0\}$，当参数 n 明确时，可简记为$\{u_n\}$．由以上股价模型可以得到股价过程为

$$S_t=S_0+\sum_{i=1}^{t}(\Delta+u_i)=S_0+t\Delta+\sum_{i=1}^{t}u_i, \quad t=0,1,\cdots$$

其中 $u_0=0$，且约定，任意序列$\{a_n\}$有 $\sum_{i=1}^{0}a_i=0$．称 S_t 为**随机游动**；若 $\Delta\neq0$，则称 S_t 为**带漂移项的随机游动**．显然

$$E(S_t)=S_0+\Delta t$$

$$\mathrm{Var}(S_t)=t\sigma^2.$$

该资产价格模型主要来源于 Bachelier(1990)的工作．

另一种股价模型是建立在对数收益基础上的．记

$$R_i:=\log(S_i/S_{i-1}), \quad i\geqslant1.$$

那么

$$S_t=S_0\prod_{i=1}^{t}S_i/S_{i-1}=S_0\prod_{i=1}^{t}\exp(R_i).$$

则相应的对数价格过程为

$$\log S_t=\log S_0+\sum_{i=1}^{t}R_i, \quad t=0,1,\cdots,$$

同样，它也是一个随机游动．

对于对数收益$\{R_n\}$，经典假设认为它服从如下的正态分布：

$$R_i\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu,\sigma^2)$$

8 其中，$\mu\in\mathbf{R}$ 且 $\sigma^2>0$．对数价格也同样服从正态分布：

$$\log(S_t)=\log(S_0)+\sum_{i=1}^{t}R_i\sim N(\log(S_0)+t\mu,t\sigma^2).$$

因此，S_t 服从对数正态分布．下面对对数正态分布作简要介绍．

若随机变量 X 满足 $Y=\log(X)\sim N(\mu, \sigma^2)$，则称 X 服从参数为 $\mu\in\mathbf{R}$(称为**漂移率**)、$\sigma>0$(称为**波动率**)的**对数正态分布**，X 取值于区间$(0, \infty)$，且有

$$P(\log X \leqslant y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}t, \quad y \in (0,\infty).$$

作变量代换 $\mu=\mathrm{e}^t$ 可得

$$P(X \leqslant \mathrm{e}^y) = P(\log X \leqslant y) = \int_{-\infty}^{\mathrm{e}^y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma u}\mathrm{e}^{-(\log u-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}u.$$

取 $y=\log x$，则得到 X 的密度函数 $f(x)$ 的表达式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}\mathrm{e}^{-(\log x-\mu)^2/2\sigma^2}\mathbf{1}(x>0), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1.3}$$

易知 X 的期望和方差分别为

$$E(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1).$$

为了刻画比标准正态密度函数更为“矮胖”的分布，一般使用的是**自由度为 n 的 t 分布** $t(n)$，它的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{n\pi}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

其中，参数 n 为自然数. 由对称性知，t 分布的期望为 0，方差为 $n/(n-2)$.

这里引出几个问题：以上模型哪个是正确的或者更接近实际？收益、对数收益能服从正态分布吗？资产收益是对称分布的吗？如何估计分布的参数，如 μ，σ^2 和偏度？收益独立的假设符合实际情况吗？价格过程完全服从随机游动吗？经济状况变化将如何影响收益分布？可以发现并检验这些影响吗？如何模拟 m 个不同证券的收益之间的随机关系？

已有研究表明，某些金融变量是比正态分布尾厚的分布. 9

若随机变量 X 有**吸收域**，则称 X 是**平稳的**，或称服从**平稳分布**. X 有吸收域是指存在独立同分布的随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 和序列 $\{\sigma_n\}\subset(0,\infty)$，$\{\mu_n\}\subset\mathbf{R}$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i + \mu_n \xrightarrow{d} X,$$

由经典的中心极限定理知，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 是平稳的. 由莱维-辛钦(Lévy-Khintchine)公式知，随机变量 X 的特征函数

$$\varphi(\theta) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}), \quad \theta \in \mathbf{R},$$

具有如下的表达式：

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{\mathrm{i}\mu\theta - \sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1-\mathrm{i}\beta(\mathrm{sgn}(\theta))\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{\mathrm{i}\mu\theta - \sigma|\theta|\left(1+\mathrm{i}\beta\frac{2}{\pi}(\mathrm{sgn}(\theta))\log|\theta|\right)\right\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

其中，$0<\alpha\leqslant 2$ 称为**平稳指数**(或**特征指数**)，$-1<\beta<1$ 称为**偏度参数**，$\sigma>0$ 为**标度参数**，$\mu\in\mathbf{R}$ 为**位置参数**. 当 $\alpha=2$ 时，$\varphi(\theta)=\exp(\mathrm{i}\mu\theta-\sigma^2\theta^2)$，则为正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 一个标准正态分布的尾部以指数形式快速衰减，即

$$P(|X|>x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}, \quad x\to\infty \quad (x\sim N(0,1)).$$