TURING 图灵数学·统计学丛书

经典名著·小波分析入门必读

Ten Lectures on Wavelets

小波十讲

[比] Ingrid Daubechies 著
贾洪峰 译

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书

经典名著·小波分析入门必读

Ten Lectures on Wavelets

小波十讲

[比] Ingrid Daubechies 著
贾洪峰 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

小波十讲/（比）英格里德·道贝切斯（Ingrid Daubechies）著；贾洪峰译. —北京：人民邮电出版社, 2017. 2
（图灵数学·统计学丛书）
ISBN 978-7-115-43898-0

Ⅰ. ①小··· Ⅱ. ①英··· ②贾 Ⅲ. ①小波理论 Ⅳ. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 264952 号

内 容 提 要

本书是数学界公认的经典著作, 包含了 20 世纪 80 年代以来世界上有关小波分析的最先进成果，全面论述了小波分析的主要原理和方法，并给出了大量实践例题，描述了小波的许多应用。

本书适合工程数学、信号分析、通信等方向的科研人员和高校相关专业师生。

◆ 著　　[比] Ingrid Daubechies
译　　贾洪峰
责任编辑　朱　巍
特约编辑　江志强
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164　电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000 1/16
印张：22.25
字数：437 千字　2017 年 2 月第 1 版
印数：1–4 000 册　2017 年 2 月北京第 1 次印刷
著作权合同登记号　图字：01-2014-3342 号

定价：79.00 元

读者服务热线：(010)51095186 转 600　印装质量热线：(010) 81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经商许可证：京东工商广字第 8052 号

版权声明

致我的母亲，她让我学会了独立.

致我的父亲，他激发了我对科学的兴趣.

前　　言

小波是应用数学领域较新的发展成果. 这个名字出现在大约十年前[①][Morlet、Arens、Fourgeau 和 Giard (1982), Morlet (1983), Grossmann 和 Morlet (1984)]. 在过去十年里，人们对小波的兴趣呈爆炸式增长. 小波能取得目前的成功，原因有多个. 一方面，可以认为小波综合了过去二三十年里在多个领域中发展起来的思想，比如，工程学的子带编码、物理学中的相干态和重正化群，还有纯粹数学中对 Calderón–Zygmund 算子的研究. 正是因为小波拥有这种横跨多个学科的起源，所以吸引了许多不同背景的科学家和工程师. 另一方面，小波是一种相当简单的数学工具，却有着多种多样的应用可能. 它们已经在信号分析 [声音、图像，早期的参考资料包括 Kronland-Martinet、Morlet 和 Grossmann (1987)、Mallat (1989b) (1989c) 撰写的一些文献，后面将给出近期的一些参考文献] 和数值分析 [用于积分变换的快速算法，见 Beylkin、Coifman 和 Rokhlin (1991)] 领域获得了激动人心的应用，许多其他应用也正在研究之中. 这种广泛适用性也增加了人们对它的关注.

本书包括了我于 1990 年 6 月在 CBMS 小波会议上作为主讲人所做的十次讲座（该会议由马萨诸塞大学洛厄尔分校数学系主办）. 根据 CMBS 会议的惯例，其他演讲者（G. Battle、G. Beylkin、C. Chui、A. Cohen、R. Coifman、K. Gröchenig、J. Liandrat、S. Mallat、B. Torrésani 和 A. Willsky）报告了他们在小波领域的相关工作. 此外还组织了三场研讨会，分别讨论了小波在物理学和反演问题方面的应用（由 B. DeFacio 主持），在群论和调合分析方面的应用（H. Feichtinger）以及在信号分析方面的应用（M. Vetterli）. 听众中既有活跃在小波领域的研究人员，也有其他一些对小波知之甚少但希望做更多了解的科学家和工程师，且以后者所占比例最大. 我认为我有义务向这部分听众讲授小波，这些内容为其他演讲者和我自己展

① 这篇前言的写作日期是 1992 年 3 月. —— 编者注

示的一些近期成果奠定了坚实的基础. 因此，在我的讲座中大约有三分之二是“基本小波理论”，另外三分之一讨论最近的且尚未公布的工作. 这种划分也体现在本书中. 因此，我认为本书可以用作有关小波的导论性图书，既可供个人阅读，也可作为专题讨论会材料或研究生教材. 本书没有包含这次 CBMS 会议上的其他讲座和研讨会论文，因此，相较于这次 CBMS 会议，本书更多地介绍我自己的工作. 书中的许多地方都给出了一些参考文献，供深入阅读或详细解释特定的应用，作为对正文的补充. 其他已经出版的小波书籍有：*Wavelets and Time Frequency Methods* [Combes、Grossmann 和 Tchamitchian (1987)]，其中包括了 1987 年 12 月法国马赛国际小波会议的论文集；*Ondelettes* [Y. Meyer (1990)，法文版；英译版预计很快发行]，其中对小波的数学处理要比本书讲座内容详尽得多，但对其他领域较少谈及；*Les Ondelettes en* 1989 [P. G. Lemarié 编 (1990)] 是 1989 年春天在巴黎第十一大学所做的演讲集；*An Introduction to Wavelets* [C. K. Chui (1992b)] 从逼近理论的角度介绍了小波. 1989 年 5 月同样是在马赛举办的国际小波会议的论文集也即将出版 [Meyer (1992)]. 此外，此次 CBMS 会议的许多其他投稿者，以及一些没有与会的小波研究人员都受邀撰写了有关其小波工作的文章，汇编而成的文集 *Wavelets and their Applications* [Ruskai 等 (1992)] 可以看作是本书的姊妹篇. 另一小波文集是 *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications* [C. K. Chui 编 (1992c)]. 此外，我还知道其他一些小波文集正在准备之中（J. Benedetto 和 M. Frazier 编，另一本由 M. Barlaud 编著），还有 M. Holschneider 的专论，1992 年 3 月有一份 IEEE *Trans. Inform. Theory* 小波特刊，1992 年晚些时候将会有另一份 *Constructive Approximation Theory* 小波特刊，1993 年将会有一份 IEEE *Trans. Sign. Proc* 小波特刊. 此外，一些近期出版的书籍中也包含了有关小波的章节. 比如，*Multirate Systems and Filter Banks* [P. P. Vaidyanathan (1992)]，*Quantum Physics, Relativity and Complex Spacetime: Towards a New Synthesis* [G. Kaiser (1990)]. 对本书感兴趣的读者会发现，这些书籍和特刊对于本书未能完整给出的许多细节和内容都非常有用. 此外，由这些参考文献可以看出小波仍在快速发展之中.

本书大体沿循了讲座的路线：全书共分 10 章，每章对应十次讲座中的一次，各章顺序也与讲座顺序一致. 第 1 章择要概述小波变换的不同方面，勾画了一幅庞大画面的轮廓，后续各章则向其中添加更多细节. 从第 2 章开始，依次介绍连续小波变换（第 2 章，其中对带限函数和香农定理有简要回顾）、离散但冗余的小波变换（框架，第 3 章）、对时频密度及正交基存在性的一般讨论（第 4 章）. 第 2 章至第 4 章的许多结果均可同时针对加窗傅里叶变换和小波变换得出，本书并列给出两种情况，同时指出它们的相似与不同之处. 其余各章专门讨论小波的正交基：构建小波正交基的第一个一般策略与多分辨率分析（第 5 章），紧支撑小波正交基和它们与子带编码的联系（第 6 章），这些小波基的正则估计（第 7 章），紧支撑小波

基的对称性（第 8 章）. 第 9 章表明，对于许多不是特别适合采用傅里叶方法的泛函空间，这些正交基是“很好的”基. 这一章是全书中数学性最强的一章，其中大多数材料都与其他各章讨论的应用没有联系，因此，对这部分小波理论不感兴趣的读者可以直接跳过它. 之所以要包含这一章，有如下几个原因：证明过程中使用的估计方法对于调和分析非常重要，David 和 Journé 在证明 T(1) 定理中使用的类似（但要更复杂一些的）估计已经成为 Beylkin、Coifman 和 Rokhlin (1991) 工作中数值分析应用的基础. 此外，这一章介绍的 Calderón–Zygmund 定理表明，远在小波出现之前，使用不同尺度的方法（这是小波的先驱工作之一）就已经在调和分析中得到了应用. 最后，第 10 章概要介绍了几种构建正交小波基的扩展：扩展到多维，扩展到 2 之外（甚至是非整数）的伸缩因子（可能实现更好的频率局域化），扩展到基于有限区间（而不是整条数轴）的小波. 每一章的最后都是一个“附注”小节，其中的内容均带有标号，便于在该章正文论述中引用. 这些内容包括：更多的参考文献，为使正文保持流畅而放在此处的附加证明、注释等.

本书是一本数学书，给出并证明了许多定理. 它要求读者具有一定的数学背景知识. 具体来说，我假定读者熟悉傅里叶变换和傅里叶级数的基本特性. 书中还用到了测度与积分理论中的一些基本定理（法图引理、控制收敛定理、富比尼定理，这些内容可以在任何一本优秀的实分析书中找到）. 对于某些章节，熟悉基本的希尔伯特空间方法也是有帮助的. 在预备知识中列出了书中使用的基本概念和定理.

不过，尚未掌握所有这些预备知识的读者也不必沮丧，本书大部分内容只需要傅里叶分析的基本概念就能理解. 此外，在本书的几乎所有证明中，都尽力给出最为详细的步骤，可能会让一些非常精通数学的读者感到繁琐. 我希望这些讲义能够吸引数学家之外的读者. 为此，我经常回避“定义 — 引理 — 命题 — 定理 — 推论”这样的顺序，在许多地方尝试给出更直观的表述，尽管这样可能会使讲述内容不够简练. 这一跨越多个学科的主题为我的学术生涯带来了很多激情，希望能与读者分享其中一些.

我希望借此机会向众多促成召开洛厄尔会议的人们表示感谢：CBMS 组委会和马萨诸塞大学洛厄尔分校数学系，特别要感谢 G. Kaiser 教授和 M. B. Ruskai 教授. 此次会议取得了很大的成功，与会人数出乎意料地远超往届，这主要归功于其非常高效的组织. 作为一位资深的会议组织者，I. M. James (1991) 说：“每次会议都主要归功于某一个人的努力，他几乎完成了所有的工作.” 对于小波 CBMS 1990 会议来说，这个人就是 Mary Beth Ruskai. 我要特别感谢她首先提议举办这次大会，以其出色的组织方式将我的书面工作减至最少，同时让我能及时了解所有进展情况，还要感谢她担任组织骨干，这也绝不是一项简单的任务. 在此次会议之前，我有机会在密歇根大学安娜堡分校数学系的一门研究生课程上讲授本书的大部分内容. 这次为时一学期的访问受到了美国国家科学基金会女性客座教席和密歇根大

学的联合支持，在此感谢这两家机构的支持. 我还要感谢所有参与该课程并提供反馈和有益建议的教职员工和学生们. 本书手稿由 Martina Sharp 录入，感谢她的耐心、勤奋和出色工作. 如果没有她，我甚至不会尝试编写本书. 感谢 Jeff Lagarias 的编辑评论. 感谢所有帮助我在毛校样中查出排印错误的人们，特别感谢 Pascal Auscher、Gerry Kaiser、Ming-Jun Lai 和 Martin Vetterli. 仍然残留的错误当然都是我的责任. 我还要感谢 Jim Driscoll 和 Sharon Murrel 帮助我准备著者索引. 最后，我要感谢我的丈夫 Robert Calderbank，他非常支持并践行我们两人的家庭事业两不误做法，当然，这偶尔也会意味着他和我会少证明一些定理.

Ingrid Daubechies
罗格斯大学
AT&T 贝尔实验室

在后续印刷中，已经纠正了一些小错误和许多印刷错误. 感谢所有帮我找出这些错误的人. 我还更新了一些内容：之前尚未发表的一些参考文献已经发表，一些原来被列为待解决的问题也已经解决. 我没有尝试去包含自第一次印刷之后又出现的大量其他重要小波论文. 无论如何，参考文献列表没有也不准备列出有关这一主题的所有参考文献.[①]

① 这本中文版译自原书的第 9 次印刷版本. —— 编者注

预备知识与符号

本章为预备知识，主要解决符号约定和统一标准问题，还会给出一些在本书后面会用到的基本定理. 考虑到有些读者可能不熟悉希尔伯特空间和巴拿赫空间，本章包含了一些非常简短的初级内容.（这一初级内容应当主要用作参考，供读者遇到一些自己不熟悉的希尔伯特空间或巴拿赫空间内容时，回头来查阅. 大多数章节都用不到这些概念.）

首先来看一些符号约定. 对于 $x \in \mathbb{R}$，用 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数，

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z};\ \ n \leqslant x\}\ .$$

例如，$\lfloor 3/2 \rfloor = 1$，$\lfloor -3/2 \rfloor = -2$，$\lfloor -2 \rfloor = -2$. 与此类似，$\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数.

若 $a \to 0$（或 ∞），则以 $O(a)$ 表示任意以 a 的常数倍为界的量，以 $o(a)$ 表示任何当 a 趋向于 0（或 ∞）时也有同样趋势的量.

证明的结束总以“■”标记. 为清晰起见，注释和示例以“□”结束.

在许多证明中，C 表示“一般”常量，在同一证明中，其取值不一定相同. 在不等式链中，经常使用 $C, C', C'', \cdots$ 或 $C_1, C_2, C_3, \cdots$，以避免混淆.

对（一维）傅里叶变换采用以下约定：

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x)\ . \tag{0.0.1}$$

根据这一标准定义，有

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}\ ,$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-1/2}\ \|f\|_{L^1}\ ,$$

式中

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int \mathrm{d}x \ |f(x)|^p\right]^{1/p} . \tag{0.0.2}$$

傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \ \mathrm{e}^{i\xi x} (\mathcal{F}f)(\xi) = (\mathcal{F}f)^{\vee}(x) , \\ \check{g}(x) &= \hat{g}(-x) . \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

严格来说，只有当 f 和 $\mathcal{F}f$ 分别绝对可积时，式 (0.0.1) 和 (0.0.3) 才分别有定义. 例如，对于广义 L^2 函数 f，应当通过一种求极限的过程来定义 $\mathcal{F}f$（见下文）. 我们将隐含地假定，在所有情况下都会使用适当的求极限过程，而且即使在隐含采用求极限过程的情况下，也会采用类似于式 (0.0.1) 和 (0.0.3) 的写法，这时的符号使用多少有些不太合适，但非常方便.

傅里叶变换的一个标准性质是

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}} f\right) = (i\xi)^{\ell} \ (\mathcal{F}f)(\xi) ,$$

因此

$$\int \mathrm{d}x \ |f^{(\ell)}(x)|^2 < \infty \leftrightarrow \int \mathrm{d}\xi \ |\xi|^{2\ell} \ |\hat{f}(\xi)|^2 < \infty ,$$

其中 $f^{(\ell)} = \frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}} f$.

如果函数 f 是紧支撑的，也就是说，当 $x < a$ 或 $x > b$ 时 $f(x) = 0$，其中 $-\infty < a < b < \infty$，则其傅里叶变换 $\hat{f}(\xi)$ 对于复变量 ξ 也有定义，且

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leqslant (2\pi)^{-1/2} \int_a^b \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{(\mathrm{Im}\,\xi)x} \ |f(x)| \\ &\leqslant (2\pi)^{-1/2} \ \|f\|_{L^1} \begin{cases} \mathrm{e}^{b\ (\mathrm{Im}\,\xi)}, & \mathrm{Im}\ \xi \geqslant 0 , \\ \mathrm{e}^{a\ (\mathrm{Im}\,\xi)}, & \mathrm{Im}\ \xi \leqslant 0 . \end{cases} \end{aligned}$$

若 f 还是无限可微的，则同一论断也适用于 $f^{(\ell)}$，从而得出 $|\xi|^{\ell} \ |\hat{f}(\xi)|$ 的界. 因此，对于一个支集为 $[a, b]$ 的 C^{∞} 函数 f，存在常量 C_N 使得 f 的傅里叶变换的解析延拓满足

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant C_N(1 + |\xi|)^{-N} \begin{cases} \mathrm{e}^{b\ \mathrm{Im}\,\xi}, & \mathrm{Im}\ \xi \geqslant 0 , \\ \mathrm{e}^{a\ \mathrm{Im}\,\xi}, & \mathrm{Im}\ \xi \leqslant 0 . \end{cases} \tag{0.0.4}$$

反之，任何一个整函数，如果对于所有 $N \in \mathbb{N}$ 都满足式 (0.0.4) 所示类型的界，该函数是一个 C^{∞} 函数（支集为 $[a, b]$）的傅里叶变换的解析延拓. 这就是 Paley–Wiener 定理.

我们偶尔还会遇到（缓增）分布. 它们是从集合 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$（由所有衰减速度快于任意负幂函数 $(1+|x|)^{-N}$ 的 C^∞ 函数组成）到复数域 $\mathbb{C}$ 的线性映射 T，对于所有 $m,n\in\mathbb{N}$，都存在 $C_{n,m}$ 使得对于所有 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 均有

$$|T(f)|\leqslant C_{n,m}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(1+|x|)^n\ f^{(m)}(x)\right| .$$

由所有这些分布组成的集合称为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. 任何一个存在多项式界的函数 F 都可以看作一个分布，$F(f)=\int \mathrm{d}x\,\overline{F(x)}\,f(x)$. 另一个例子就是狄拉克的“$\delta$ 函数”，$\delta(f)=f(0)$. 有一个分布 T，如果函数 f 的支集与 $[a,b]$ 不相交，对于所有此类 f，均有 $T(f)=0$，就说分布 T 支撑于 $[a,b]$. 可以将一个分布 T 的傅里叶变换 $\mathcal{F}T$ 或 $\hat{T}$ 定义为 $\hat{T}(f)=T(\check{f})$（若 T 是一个函数，则这一定义与之前的定义一致）. 关于分布的 Paley–Wiener 定理可以表述为：当且仅当，对于某一 $N\in\mathbb{N}$，$C_N>0$，满足

$$|\hat{T}(\xi)|\leqslant C_N(1+|\xi|)^N\begin{cases}\mathrm{e}^{b\ \mathrm{Im}\,\xi}, & \mathrm{Im}\ \xi\geqslant 0\ ,\\ \mathrm{e}^{a\ \mathrm{Im}\,\xi}, & \mathrm{Im}\ \xi\leqslant 0\end{cases}$$

时，整函数 $\hat{T}(\xi)$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 上一个分布 T 的傅里叶变换的解析延拓，该分布的支集为 $[a,b]$.

在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 上，唯一会用到的测度就是勒贝格测度. 集合 S 的（勒贝格）测度通常记为 $|S|$. 具体来说，$|[a,b]|=b-a$（其中 $b>a$）.

下面列出一些著名的积分与测度论定理，后面将会用到它们.

法图引理 *若 $f_n\geqslant 0$，$f_n(x)\to f(x)$ 几乎处处成立（即，根据勒贝格测度，不满足逐点收敛的点集具有零测度），则*

$$\int \mathrm{d}x\ f(x)\leqslant \limsup_{n\to\infty}\int \mathrm{d}x\ f_n(x)\ .$$

特别地，若这个 $\limsup$ 为有限值，则 f 可积.

[一个序列的 $\limsup$ 定义为

$$\limsup_{n\to\infty}\ \alpha_n=\lim_{n\to\infty}\ [\sup\{\alpha_k;\ k\geqslant n\}]\ ;$$

每个序列，即使它没有极限（比如 $\alpha_n=(-1)^n$），也有 $\limsup$（可能是 ∞）；若序列收敛于一个极限，$\limsup$ 与该极限一致.]

控制收敛定理 *设 $f_n(x)\to f(x)$ 几乎处处成立. 若对于所有 n 均有 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$，且 $\int \mathrm{d}x\ g(x)<\infty$，则 f 可积，且*

$$\int \mathrm{d}x\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\int \mathrm{d}x\ f_n(x)\ .$$

富比尼定理 若 $\int \mathrm{d}x[\int \mathrm{d}y\ |f(x,y)|] < \infty$，则

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\ f(x,y) = \int \mathrm{d}x\ \left[\int \mathrm{d}y\ f(x,y)\right] = \int \mathrm{d}y\ \left[\int \mathrm{d}x\ f(x,y)\right] ,$$

即，积分顺序可以互换.

在这三个定理中，积分区域可以是 $\mathbb{R}$ 的任意可测子集（对于富比尼定理则为 $\mathbb{R}^2$ 的任意可测子集）.

当用到希尔伯特空间时，除另有名字外，通常用 $\mathcal{H}$ 表示. 我们将遵从数学家的习惯，使用的标量积关于第一个变量为线性：

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,\ v\rangle = \lambda_1\langle u_1,\ v\rangle + \lambda_2\langle u_2,\ v\rangle .$$

同样，有

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} ,$$

其中，$\bar{\alpha}$ 表示 α 的复共轭，对于所有 $u \in \mathcal{H}$，$\langle u, u\rangle \geqslant 0$. u 的范数 $\|u\|$ 定义为

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle . \tag{0.0.5}$$

在希尔伯特空间中，$\|u\| = 0$ 蕴涵着 $u = 0$，所有柯西序列（根据 $\|\ \|$ 的定义）在此空间均有极限. [更明确地说，若 $u_n \in \mathcal{H}$，且当 n, m 足够大时 $\|u_n - u_m\|$ 变为任意小；即，对于所有 $\epsilon > 0$ 均存在 n_0（依赖于 ϵ），使得当 $n, m \geqslant n_0$ 时满足 $\|u_n - u_m\| \leqslant \epsilon$，则存在 $u \in \mathcal{H}$，使得当 $n \to \infty$ 时 u_n 趋向于 u，即 $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\| = 0$.]

这样的希尔伯特空间的一个典型例子是 $L^2(\mathbb{R})$，其中

$$\langle f, g\rangle = \int \mathrm{d}x\ f(x)\ \overline{g(x)} .$$

这里的积分范围是 $-\infty$ 至 ∞. 当积分范围为整个实数轴时，我们经常省略积分限.

另一个例子是 $\ell^2(\mathbb{Z})$，它是由所有平方和的复数序列组成的集合，其中的复数以整数为索引，有

$$\langle c, d\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ \overline{d_n} .$$

同样，在对所有整数求和时，也经常省去求和索引的上下限. $L^2(\mathbb{R})$ 和 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 都是无穷维希尔伯特空间. 较为简单的是有限维希尔伯特空间，$\mathbb{C}^k$ 是其典型例子，标量积为

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{k} u_j\ \bar{v}_j ,$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_k)$, $v=(v_1,\cdots,v_k)\in\mathbb{C}^k$.

希尔伯特空间总有正交基，即 $\mathcal{H}$ 中存在向量族 e_n 满足

$$\langle e_n,e_m\rangle=\delta_{n,m}\ ,$$

而且，对于所有 $u\in\mathcal{H}$ 有

$$\|u\|^2=\sum_n\ |\langle u,e_n\rangle|^2.$$

（我们只考虑可分希尔伯特空间，也就是其正交基可数的空间.）正交基的例子包括：$L^2(\mathbb{R})$ 上的埃尔米特函数；$\ell^2(\mathbb{Z})$ 中由 $(e_n)_j=\delta_{n,j}$（$n,j\in\mathbb{Z}$）定义的序列 e_n（即除第 n 项之外的所有项为零）；$\mathbb{C}^k$ 中的 k 个向量 $e_1,\cdots,e_k$，其定义为 $(e_\ell)_m=\delta_{\ell,m}$，$1\leqslant\ell,m\leqslant k$.（此处克罗内克符号 δ 取通常含义：当 $i=j$ 时 $\delta_{i,j}=1$，当 $i\neq j$ 时 $\delta_{i,j}=0$.）

希尔伯特空间的一个典型不等式是柯西–施瓦茨不等式

$$|\langle v,w\rangle|\leqslant\|v\|\ \|w\|\ ,\tag{0.0.6}$$

利用 v 和 w 的适当线性组合，写出式 (0.0.5) 即可得证. 特别地，对于 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ 有

$$\left|\int\mathrm{d}x\ f(x)\ \overline{g(x)}\right|\leqslant\left(\int\mathrm{d}x\ |f(x)|^2\right)^{1/2}\left(\int\mathrm{d}x\ |g(x)|^2\right)^{1/2}\ ,$$

且对于 $c=(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $d=(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ 有

$$\sum_n\ c_n\overline{d_n}\leqslant\left(\sum_n\ |c_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_n\ |d_n|^2\right)^{1/2}\ .$$

式 (0.0.6) 的一个推论是

$$\|u\|=\sup_{v,\ \|v\|\leqslant1}\ |\langle u,v\rangle|=\sup_{v,\ \|v\|=1}\ |\langle u,v\rangle|\ .\tag{0.0.7}$$

$\mathcal{H}$ 上的“算子”是从 $\mathcal{H}$ 到另一希尔伯特空间（通常就是它自身）的线性映射. 显然，若 A 是 $\mathcal{H}$ 上的一个算子，则

$$A(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)=\lambda_1Au_1+\lambda_2Au_2\ .$$

若在 $u-v$ 足够小时可使 $Au-Av$ 为任意小，就说此算子是连续的. 显然，对于所有 $\epsilon>0$，应当存在 δ（依赖于 ϵ），使得在 $\|u-v\|\leqslant\delta$ 时 $\|Au-Av\|\leqslant\epsilon$. 若取 $v=0$, $\epsilon=1$，则发现，对于某一 $b>0$，若 $\|u\|\leqslant b$，则 $\|Au\|\leqslant1$. 对于任意 $w\in\mathcal{H}$，可以定义 $w'=\frac{b}{\|w\|}w$. 显然，$\|w'\|\leqslant b$，从而有 $\|Aw\|=\frac{\|w\|}{b}\ \|Aw'\|\leqslant b^{-1}\|w\|$. 若

$\|Aw\|/\|w\|$（$w \neq 0$）有界，就说算子 A 有界. 我们已经看到任意连续算子都是有界的，反之亦然. A 的范数 $\|A\|$ 定义为

$$\|A\| = \sup_{u\in\mathcal{H},\ \|u\|\neq 0} \|Au\|/\|u\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| \ . \tag{0.0.8}$$

立即可以得出，对于所有 $u \in \mathcal{H}$ 有

$$\|Au\| \leqslant \|A\| \ \|u\| \ .$$

从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathbb{C}$ 的算子称为"线性泛函". 对于有界线性泛函，有里斯表示定理：对于任意 ℓ: $\mathcal{H}\to\mathbb{C}$，线性且有界，即对于所有 $u \in \mathcal{H}$ 有 $|\ell(u)| \leqslant C\|u\|$，存在唯一的 $v_\ell \in \mathcal{H}$ 使得 $\ell(u) = \langle u, v_\ell\rangle$.

一个从 $\mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_2$ 的算子 U，若对于所有 $v, w \in \mathcal{H}_1$ 都有 $\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, w\rangle$，就说算子 U 是等距的；若还有 $U\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$，即对于某一 $v_1 \in \mathcal{H}_1$，每个元素 $v_2 \in \mathcal{H}_2$ 都可写作 $v_2 = Uv_1$，就说 U 是酉算子. 若 e_n 构成 $\mathcal{H}_1$ 中的一个正交基，且 U 为酉算子，则 Ue_n 构成 $\mathcal{H}_2$ 中的一个正交基. 反之亦然：任何一个将正交基映射为另一正交基的算子都是酉算子.

一个集合 D，若每个 $u \in \mathcal{H}$ 都可写作 D 中某一序列 u_n 的极限，就说集合 D 在 $\mathcal{H}$ 中是稠密的.（于是可以说，D 的闭包就是整个 $\mathcal{H}$. 一个集合 S，若 v 可以通过对 S 中序列求极限得到，将所有这些 v 添加到 S，即可得到 S 的闭包.）若 Av 仅对于 $v \in D$ 有定义，但已知对于所有 $v \in D$ 有

$$\|Av\| \leqslant C\|v\| \ , \tag{0.0.9}$$

则可以"借助连续性"将 A 延拓到整个 $\mathcal{H}$. 显然，若 $u \in \mathcal{H}$，可找出 $u_n \in D$ 使得 $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. 于是 u_n 必然是一个柯西序列，且根据式 (0.0.9) 可知，Au_n 也是如此. 因此 Au_n 存在极限，称为 Au（它不依赖于选定的具体序列 u_n）.

还可以使用无界算子，即对于算子 A，不存在有限值 C，使得 $\|Au\| \leqslant C\|u\|$ 对于所有 $u \in \mathcal{H}$ 均成立. 无界算子通常只能定义在 $\mathcal{H}$ 中的一个稠密集合 D 上，不能通过上述技巧进行延拓（因为它们是不连续的），这是一个无法改变的事实. 它的一个例子就是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，其中可以取 $D = C_0^\infty(\mathbb{R})$，即由所有具有紧支撑集的无穷次可微函数组成的集合. 在上面定义算子的稠密集称为算子的定义域.

A 是从希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$ 到希尔伯特空间 $\mathcal{H}_2$（也可以是 $\mathcal{H}_1$ 本身）的一个有界算子，其伴随矩阵 A^* 是从 $\mathcal{H}_2$ 到 $\mathcal{H}_1$ 的算子，定义为

$$\langle u_1, A^*u_2\rangle = \langle Au_1, u_2\rangle \ ,$$

对于所有 $u_1 \in \mathcal{H}_1$，$u_2 \in \mathcal{H}_2$，上式均应成立.（根据里斯表示定理可以保证 A^* 的存在：对于固定的 u_2，可以用 $\ell(u_1) = \langle Au_1, u_2\rangle$ 在 $\mathcal{H}_1$ 上定义一个线性泛函 ℓ. 它显

然有界，因此对应于一个向量 v，使得 $\langle u_1, v\rangle = \ell(u_1)$. 容易验证，对应关系 $u_2 \to v$ 是线性的；这就定义了算子 A^*.）伴随算子 A^* 有以下性质：

$$\|A^*\| = \|A\|\ , \quad \|A^*A\| = \|A\|^2\ .$$

若 $A^* = A$（仅当 A 将 $\mathcal{H}$ 映射到其自身时才可能成立），则称 A 为自伴算子. 若自伴算子 A 对于所有 $u \in \mathcal{H}$ 满足 $\langle Au, u\rangle \geqslant 0$，则称之为正算子，常记作 $A \geqslant 0$. 若 $A - B$ 是一个正算子，则记作 $A \geqslant B$.

迹族算子是一些特殊算子，对于 $\mathcal{H}$ 中的所有正交基，均满足 $\sum_n |\langle Ae_n, e_n\rangle|$ 是有限的. 对于这样一个迹族算子，$\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$ 与选定的正交基无关，这个和值称为 A 的迹

$$\mathrm{tr}\ A = \sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle\ .$$

若 A 为正，只需针对一个正交基验证 $\sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle$ 是否为有限值就足够了：如果有限，那 A 就是迹族.（此结论对于非正算子不成立！）

一个从 $\mathcal{H}$ 到其自身的算子 A，如果 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使 $A - \lambda\,\mathrm{Id}$（Id 表示单位算子，$\mathrm{Id}\,u = u$）不存在有界逆，则所有这些 λ 组成算子 A 的谱 $\sigma(A)$. 在有限维希尔伯特空间中，$\sigma(A)$ 由 A 的特征值组成；在无穷维希尔伯特空间中，$\sigma(A)$ 包含所有特征值（构成点谱），但还经常包含其他 λ，构成连续谱.（例如，在 $L^2(\mathbb{R})$ 中，$f(x)$ 与 $\sin \pi x$ 的乘积没有点谱，但它的连续谱是 $[-1, 1]$.）一个自伴算子的谱仅由实数组成；一个正算子的谱仅包含非负数. 谱半径 $\rho(A)$ 的定义为

$$\rho(A) = \sup\ \{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(A)\}\ .$$

它具有以下性质：

$$\rho(A) \leqslant \|A\| \quad \text{且} \quad \rho(A) = \lim_{n\to\infty}\ \|A^n\|^{1/n}\ .$$

自伴算子可实现对角化. 如果它们的谱仅由特征值组成（有限维时即是如此），这一结论最容易理解. 于是有

$$\sigma(A) = \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

有一个相应的正交特征向量族，

$$Ae_n = \lambda_n e_n\ .$$

于是得出，对于所有 $u \in \mathcal{H}$，

$$Au = \sum_n \langle Au, e_n\rangle e_n = \sum_n \langle u, Ae_n\rangle e_n = \sum_n \lambda_n \langle u, e_n\rangle e_n\ ,$$

这就是 A 的对角化表示.（如果谱的一部分或全部是连续的，还可以根据谱定理推广上述结论，但本书不需要做此推广.）如果两个算子可交换，即对于所有 $u \in \mathcal{H}$ 均有 $ABu = BAu$，则可以对它们同时进行对角化：存在一个正交基，使得

$$Ae_n = \alpha_n e_n \quad 及 \quad Be_n = \beta_n e_n \ .$$

有界算子的许多性质同样可适用于无界算子：对于无界算子，伴随、谱、对角化都是存在的. 但对于定义域要特别小心. 例如，要推广可交换算子的同时对角化，就需要非常小心地定义可交换算子：存在一些这样的病态例子，A 和 B 的定义域均为 D，其中，AB 和 BA 在 D 上均有意义，且在 D 上相等，但 A 和 B 却不能同时对角化 [因为 D 选择得“太小”. 请参阅 Reed 和 Simon (1971) 给出的例子]. 无界自伴算子可交换的正确定义用到了相关联的有界算子：若与 H_1 和 H_2 相关联的酉演化算子是可交换的，H_1 和 H_2 就是可交换的. 对于一个自伴算子 H，相关联的酉演化算子 U_t 定义如下：对于任意 $v \in D$，其中 D 是 H 的定义域（小心：一个自伴算子的定义域并不一定恰好是使 H 有定义的任意稠密集），$U_T v$ 是初始条件为 $v(0) = v$ 的微分方程

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, v(t) = Hv(t)$$

在时刻 $t = T$ 的解 $v(t)$.

巴拿赫空间与希尔伯特空间有许多相同性质，但要更广泛一些. 它们是赋以范数（此范数不一定通常也不是由标量积导出的）且对该范数完备（即所有柯西序列均收敛，见上文）的线性空间. 前文针对希尔伯特空间复习的一些概念（例如：有界算子、线性泛函、谱和谱半径）在巴拿赫空间中同样存在. 是巴拿赫空间但不是希尔伯特空间的一个例子是 $1 \leqslant p < \infty$ 且 $p \neq 2$ 时的 $L^p(\mathbb{R})$，它是 $\mathbb{R}$ 上所有满足 $\|f\|_{L^p}$（见式 (0.0.2)）有限的函数 f 的集合. 另一个例子是 $L^\infty(\mathbb{R})$，是 $\mathbb{R}$ 上所有有界函数组成的集合，且赋以范数 $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. 巴拿赫空间 E 的对偶空间 E^* 是 E 上所有有界线性函数的集合，它还是一个线性空间，具有一个自然范数（定义同式 (0.0.8)），且关于该范数是完备的：E^* 本身是一个巴拿赫空间. 对于满足 $1 \leqslant p < \infty$ 的 L^p 空间，可以证明，L^q（其中 p 和 q 满足关系式 $p^{-1} + q^{-1} = 1$）中的所有元素定义了 L^p 上的有界线性泛函. 事实上，我们有赫尔德不等式

$$\left|\int \mathrm{d}x\; f(x)\; \overline{g(x)}\right| \leqslant \|f\|_{L^p}\; \|g\|_{L^q} \ .$$

可以证明，L^p 上的所有有界泛函都是这一类型，即 $(L^p)^* = L^q$. 特别地，L^2 是自对偶的. 根据里斯表示定理（见前文），每个希尔伯特空间都是自对偶的. 一个从 E_1 到 E_2 的算子 A，其共轭算子 A^* 是从 E_2^* 到 E_1^* 的算子，其定义为

$$(A^*\ell_2)(v_1) = \ell_2(Av_1) \ .$$