刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections in Mathemetics by Y.P.Liu

第十八编

时代文化出版社

刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections in Mathematics by Y.P.Liu

第十八编

时代文化出版社

半闲数学集锦（第十八编）

作　　者：刘彦佩
出版单位：时代文化出版社
地　　址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司
地　　址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼
电　　话：010-68920114　13693651386
网　　址：www.grcsw.com

印　　刷：京冀印刷厂
开　　本：880×1230　1/16
版　　次：2016年9月第1版

书　　号：ISBN 978-988-18455-0-4
定　　价：全套 1890.00元（共22编）

第十八编序

此编仅由文章组成. 它们或者处于通往目标的过程中, 或者已经对于专著有所贡献, 或者专著的后续工作.

例如, 文 18.01[398] 和 18.15[411] 引出了专著 [486](19.11—19.36) 的一个专题. 提供了以节点剖分为参数, 数树的一种初等方法, 并得到了无和显式. 由此出发, 导致一系列的显式.

文 18.14[410], 为专著 [354](13.27—13.56) 中之 13.52—13.54, 提供了实际数据的支持.

文 18.51[451], 由专著 [354] 中的联树, 所引发出的一种代数, 显示了, 用联树表示一个图的嵌入, 无遗漏, 也无重复, 和求一个新嵌入, 在时间和空间上, 的线性性.

文 18.53[453], 将为专著 [481](19.11—19.36), 提供款 19.30 的一种, 从图的同调和上同调定理, 演化出来的途径.

其余的, 或者是由已有专著 [354](地图的代数原理), [396](*Theory of Polyhedra*), [459](*Introductory Map Theory*) 所引发, 以及与之关联的, 一些扩充和进展. 例如, 以联树为基础的, 有文 18.03[395], 18.13[409], 18.28[426], 18.37[436] 等, 都是确定图的亏格, 或亏格嵌入的.

文 18.04 [399], 18.12 [408], 18.16 [412], 18.18 [414], 18.24 [422], 18.27 [425], 18.29[427],18.32[430],18.34[433], 18.40[440], 18.48[448]—18.49[449], 18.61[464], 18.63[466] 等, 都是求图, 或有向图的手柄多项式, 或叉帽多项式的.

文 18.21[418] 和 18.26[424] 显示了联树, 在论证有关亏格的等式, 或不等式中的作用.

文 18.30[428], 18.44[444]—18.45[445], 利用联树, 数图在小亏格曲面上嵌入.

文 18.64[493], 在联树的基础上, 确定图的最大亏格的方法, 论证一类图的上可嵌入性.

文 18.22[420], 基于联树法, 设计求图的最大亏格的, 新有效算法.

或者是由已有专著诸如 [137](图的可嵌入性理论), [141](*Embeddability in Graphs*), [438](图的可嵌入性理论第二版), [400](*Topological Theory on Graphs*) 所引发, 以及与之关联的, 一些扩充和进展.

例如, 文 18.08[404]—18.10[406], 18.19[415], 18.23[421], 18.35[434], 18.38 [437]—18.39 [439], 18.41 [441]—18.43[443], 18.46[446], 18.54[454], 18.58[461]—18.60[463], 18.62[465] 等, 都与图的上可嵌入性与最大亏格有关.

文 18.25[423], 讨论一个图的树图, 和邻接树图的同构, 并且刻画了它们的平面性.

或者是由已有专著 [183](*Enumerative Theory of Maps*), [241](数组合地图

论), [397](数组合地图论第二版), [419](*General Theory of Map Census*) 所引发出来的, 以及与之关联的, 一些扩充和研究进展.

例如, 18.02[394], 18.06[402]—18.07[403], 18.11[413], 18.33[431], 18.36[435], 18.47[447], 18.50[450], 18.55[455]—18.57[457] 等, 都关联各种地图, 甚至带诸如色多项式, 在根同构下, 分类计数.

另外, 还有文 18.05[401], 讨论了一类图的弱最大亏格. 文 18.52[452], 提供一个图例，否定了 Stshl 关于亏格多项式根的一个猜想,

以及文 18.20[417], 在专著 [168]运输网络术 和专著 [154]纵横布局论 的基础上, 提供双极定向的一种新算法.

刘彦佩
2015 年 9 月
於北京上园村

第十八编目录

中国科学 A辑: 数学 2008年 第38卷 第4期: 477～480
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

依节点剖分数树的一种新方法

刘彦佩

北京交通大学数学研究所, 北京 100044
E-mail: ypliu@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2007-03-20; 接受日期: 2007-08-31
国家自然科学基金资助项目 (批准号: 10571013)

摘要 本文提供一种直接的初等方法依节点剖分数树, 而不是用已知的递推关系、母函数、泛函方程、Lagrange 反演、无限维矩阵等.

关键词 树 植树 联树模型 节点剖分 码

MSC(2000) 主题分类 05C30, 05C10

1 引言

在数学史中, 数树与数数一样是一个经典课题. 数植树始于 1964 年 [1]. 继之, 有文献 [2–6]. 文献 [1–4] 用递推关系、母函数、Lagrange 反演. 文献 [5,6] 则主要用无限维矩阵无需反演.

然而, 本文的方法与上述完全不同, 是直接的和初等的. 本方法的中心思想是给带数多边形分类. 事实上, 是联树模型的一种退化情形 [7].

一个平面树就是树的一个平面上地图. 一个植树就是根点次为 1 的一个平面树. 在图 1 中, (a) 为平面树, (b) 为植树.

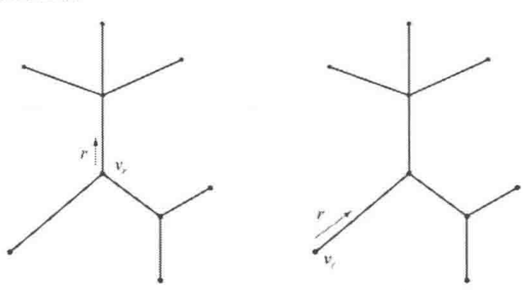


图 1 平面树与植树

令 T 为一植树, 有 $n+1$ 个节点: $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\,(n \geqslant 1)$, 其中, v_0 为根节点. 从 v_0 开始沿面边界再回到 v_0 的节点足标的一个序列. 从这个序列去掉 0 所得的段称为 T 的一个 V-码, 见图 3 和 4.

在数的一个序列中, 如果数的每个相邻对恰出现两次, 则称它是多面形的. 易见, 植树的 V- 码是多面形的.

向量 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$, 其中 $n_i\,(i \geqslant 1)$ 为非根 i- 顶点的数目, 称为植树的一个节点剖分.

非负整数 $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ 的一个序列, 用向量 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$ 表示. 用 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{1}_i$ 分别表示所有分量全是 1 和除第 i 分量为 1 外全是 0 的向量. 如果

$$\sum_{i \geqslant 1}(2-i)n_i = 1, \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{n}$ 是可行的. 令 $\boldsymbol{n}' = (n_1', n_2', \ldots, n_i', \ldots)$, 其中

$$n_i' = \begin{cases} n_1 - 1, & \text{当 } i = 1; \\ n_{k-1} + 1, & \text{当 } i = k-1; \\ n_k - 1, & \text{当 } i = k; \\ n_i, & \text{否则}, \end{cases} \tag{2}$$

即 $\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n} - \mathbf{1}_k + \mathbf{1}_{k-1} - \mathbf{1}_1\,(k \geqslant 2)$ 和 $n_1, n_k > 0$, 则称 $\boldsymbol{n}'$ 是 $\boldsymbol{n}$ 的一个简约.

引理 1 非负整数序列的一个简约 $\boldsymbol{n}'$ 是可行的, 当且仅当 $\boldsymbol{n}$ 是可行的.

证明 由 (2) 式, 有 $\sum_{i \geqslant 1}(2-i)n_i' - \sum_{i \geqslant 1}(2-i)n_i = -1-(2-k)+(2-k+1) = 0$. 这就意味引理成立.

可行序列 $\boldsymbol{n}_0 = (1, 1)$ 不会有简约, 因此, 称它是不可约的.

引理 2 任何可行序列 $\boldsymbol{n}$ 均有 $n_1 > 0$.

证明 用反证法. 若 $\boldsymbol{n}$ 可行但 $n_1 = 0$. 然而, $\sum_{i \geqslant 1}(2-i)n_i = \sum_{i \geqslant 2}(2-i)n_i \leqslant 0$. 与可行性 (1) 矛盾.

引理 3 任何可行序列 $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{n}_0$ 均可通过简约变换到 $\boldsymbol{n}_0$.

证明 因为 $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{n}_0$, 引理 2 使得 $\boldsymbol{n}$ 有一个简约. 只要此简约不是 $\boldsymbol{n}_0$, 由引理 1 可得另一个简约. 根据有限递归原理, 即得引理.

定理 1 对于一个非负整数序列 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$, 存在一个植树使得有 n_i 个非根节点次为 $i\,(i \geqslant 1)$, 当且仅当 $\boldsymbol{n}$ 是可行的.

证明 必要性. 设 T 是这样的一个植树. 因为 n_i 是 T 中非根 i- 节点的个数 $(i \geqslant 1)$, T 的边数为 $\sum_{i \geqslant 1} n_i$, 从而 $1 + \sum_{i \geqslant 1} i n_i = 2\sum_{i \geqslant 1} n_i$. 这就意味着 $\boldsymbol{n}$ 满足 (1) 式, 即 $\boldsymbol{n}$ 是可行的.

充分性. 首先, 不可约序列是基图为两条边路的植树之节点剖分. 然后, 沿证明引理 3 的反向, 即可得带给定可行序列的一个植树.

2 主要结果

给定集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}\,(n \geqslant 1)$ 上的一个多面形段 L, 以 1 为首尾, 令向量 $\boldsymbol{n}$ 为 L 的点剖分, 其中 $n_i\,(i \geqslant 1)$ 为 i 在 L 中出现的次数.

在多面形段 L 上, 若 vuv 是 L 的子段, 则称 u 是可收缩的. 去掉 u 并合二 v 为一, 即用 v 替代 vuv 的运算, 称为收缩. 若 L 可通过收缩变为一个点, 则 L 称为胞形.

如果 L 的点剖分满足 (1) 式, 则也称 L 是可行的.

可见, 任何胞形均为可行段. 但反之未必.

下面, 采用

$$\binom{n}{\boldsymbol{n}} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_s} = \prod_{i=1}^{s-1} \binom{n-\sigma_{i-1}}{n_i}, \tag{3}$$

其中 $s \geqslant 2$, $n_i \geqslant 0$ 全是整数, 且 $n = \sum_{i=1}^{s} n_i$, $\sigma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} n_j$, $\sigma_0 = 0$.

注意, 当 $s=2$ 时, $\binom{n}{\boldsymbol{n}}$ 为从 n 中取 n_1 的组合数.

例 1 在图 2 中, 两个不同的 5 阶植树有节点剖分 $\boldsymbol{n} = (3, 0, 2)$ 满足 (1) 式. (a) 为序列 123242151, (b) 为序列 121343531. 这里,

$$\frac{1}{5}\binom{5}{3,0,2} = \frac{1}{5}\frac{5!}{3!0!2!} = 2.$$

在图 3 中, 6 个不同的 5 阶植树由 (a)–(f) 给出带节点剖分 $\boldsymbol{n} = (2, 2, 1)$ 满足 (1) 式. 这里

$$\frac{1}{5}\binom{5}{2,2,1} = \frac{1}{5}\frac{5!}{2!2!1!} = 6.$$

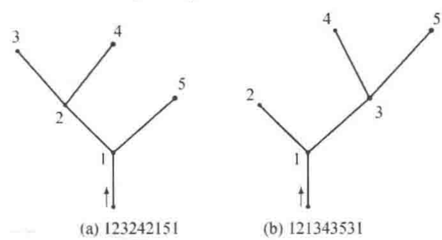


图 2 树 $\boldsymbol{n} = (3, 0, 2)$

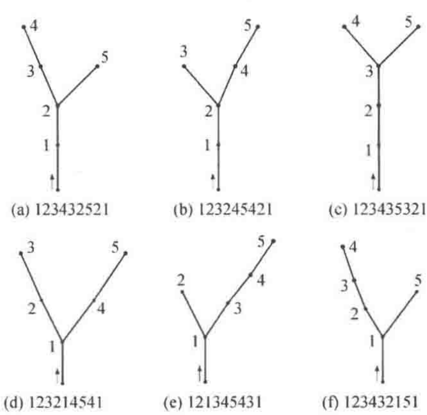


图 3 树 $\boldsymbol{n} = (2, 2, 1)$

数集 $\mathbb{N}$ 上的一个可行段, 数 $i \in \mathbb{N}$ 将此段分割为节. 节的数目比 i 的出现次数多 1. 每节称为 i- 节.

如果 $\mathbb{N}$ 上的一个可行段有性质: 所有小于 i 的数都出现在 $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的第 1 次出现之前, 则称它为中意的. 用 1⇔1 代表两个集合之间的一个 1–1 对应.

引理 4 令 $\mathcal{T}_n$ 为所有带节点剖分 $\boldsymbol{n}$ 的 $n+1$ 阶植树的集合, $\mathcal{L}_n$ 为 $\mathbb{N}$ 上带点剖分 $\boldsymbol{n}$ 所有中意胞形的集合, 则 $\mathcal{T}_n$ 1⇔1 $\mathcal{L}_n$.

证明 必要性. 对于 $T \in \mathcal{T}_n$, 易见其 V- 码 $\mu(T)$ 是唯一的中意胞形, 即 $\mu(T) \in \mathcal{L}_n$.

充分性. 令 $\mu \in \mathcal{L}_n$. 由最大点的唯一性和可收缩性, 通过相继收缩最大点总可得一点. 返回这一过程, 得树 $T(\mu) \in \mathcal{T}_n$.

定理 2 带节点剖分 $\boldsymbol{n}$ 的 $n+1$ 阶不同构植树的数目为

$$\frac{1}{n}\binom{n}{\boldsymbol{n}} = \frac{(n-1)!}{\boldsymbol{n}!}, \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{n}! = \prod_{i \geqslant 1} n_i!. \tag{5}$$

证明 在引理 4 的基础上, 只需讨论所有中意胞形的集合 $\mathcal{L}_n$. 由于每个中意胞形有 n 个可能方式选择最小点, 和不同的方式对应从 n 中取 $\boldsymbol{n}$ 的不同选择, 将所有方式划分为 $\frac{1}{n}\binom{n}{\boldsymbol{n}}$ 类. 用以自然数序长为 n 带重复出现的一个数列表示一个方式. 两个方式 A 和 B 等价, 当且仅当存在一个数 $i \in \mathbb{N}$, 使得 $A + i\,(\mathrm{mod}\ n)$ 在循环序下为 B. 一个以 1 开头的方式称为标准的. 因为每一类含 n 个方式, 而且从中只有标准方式形成植树的 V- 码, 即得定理.

在例 1 中, 图 2 和 3 提供 (4) 式的两个情形. 仅取 $\boldsymbol{n} = (3,0,2)$ 为例. 在 5 个点 1,2,3,4 和 5 中, 取 2 个点每个重复 3 次和取 3 个点每个重复 1 次的组合共有 10 个方式如下: (a) 111222345, (b) 111233345, (c) 111234445, (d) 111234555, (e) 122233345, (f) 122234445, (g) 122234555, (h) 123334445, (i) 123334555, (j) 123444555. 其中分为 2 类: C_1={(a), (e), (h), (j), (d)}和 C_2 = {(b), (f), (i), (c), (g)}. 因为 (e) = 222333451, (h) = 333444512, (j) = 444555123 和 (d) = 555111234 都与 (a) = 111222345 等价得 C_1; 相仿地得到 C_2.

3 注记

在定理 2 的基础上, 可得许多推论. 这里, 只简列几个. 1) 对于平面树. 由于根点次为 s 带节点剖分 $\boldsymbol{n}$ 的平面树与带节点剖分 $\boldsymbol{n} + \mathbf{1}_{s+1}$ 的植树 1–1 对应; 2) 外平面地图. 由于 n 阶带面剖分 $\boldsymbol{s}$ 的外平面地图与带节点剖分 $\boldsymbol{s} + (n-1)\mathbf{1}_1$ 的植树 1–1 对应; 3) 对于带面剖分 4-正则 Hamilton 平面地图. 基于 2); 4) 平面 Halin 地图. 由于带特定 n- 圈和节点剖分 $\boldsymbol{u}$ 的平面 Halin 地图与带节点剖分 $\boldsymbol{u} + (n-1)(\mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_3)$ 的植树 1–1 对应; 5) 对于平面单顶点地图. 基于 1) 和对偶性.

参考文献

1 Harary F, Tutte W T. The number of plane trees with given partition. Mathematika, **11**: 99–101 (1964)
2 Harary F, Prins G, Tutte W T. The number of plane trees. *Akad van W Proc*, **67**: 319–329 (1964)
3 Tutte W T. The number of planted plane trees with a given partition. *Amer Math Monthly*, **71**: 272–277 (1964)
4 刘彦佩. 组合学中的一些泛函方程. 信阳师范学院学报 (NS), **15**: 1–11 (2002)
5 刘彦佩. 一些节点剖分计数问题. 科学通报, **30**: 1521–1525 (1985)
6 Wu F E, Liu Y P. Enumerations of one-vertex maps with face partition on the plane. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, **20**: 229–234 (2000)
7 刘彦佩. 地图的代数原理. 北京: 高等教育出版社, 2007

ERRATA

In the previous issue(Vol. 9, No.2) of KJCAM, the FIGURES for the article of Rongxia Hao, Junliang Cai and Yanpei Liu were erroneously published. We have published the correct FIGURES as follows.

We apologize for this error. The Editors

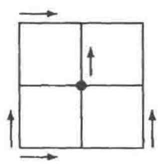


Figure (2)

1 essential map on the Torus with 2 edges

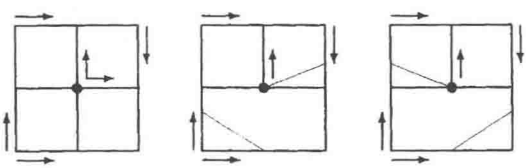


Figure (3)

4 essential maps on the Klein bottle with 2 edges

第 8453 页

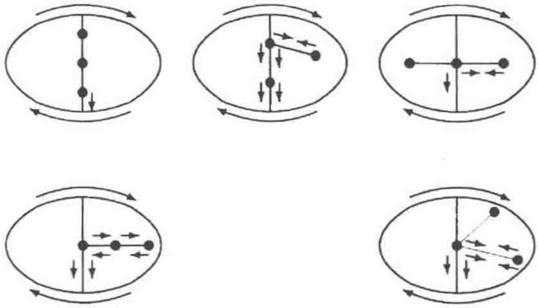


Figure (4)

22 essential maps on the projective plane with 3 edges

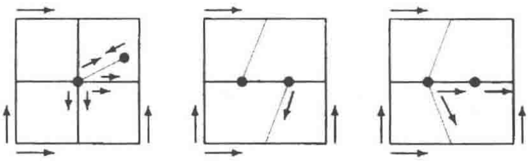
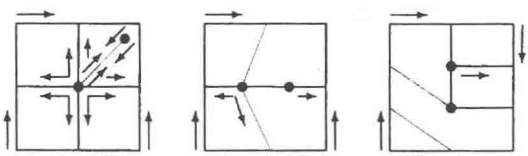
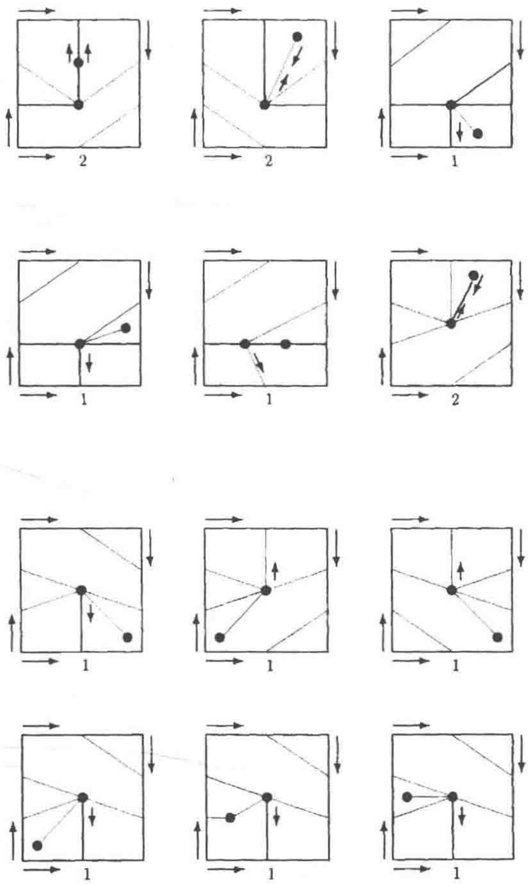


Figure (5)

10 essential maps on the Torus with 3 edges





第 8455 页

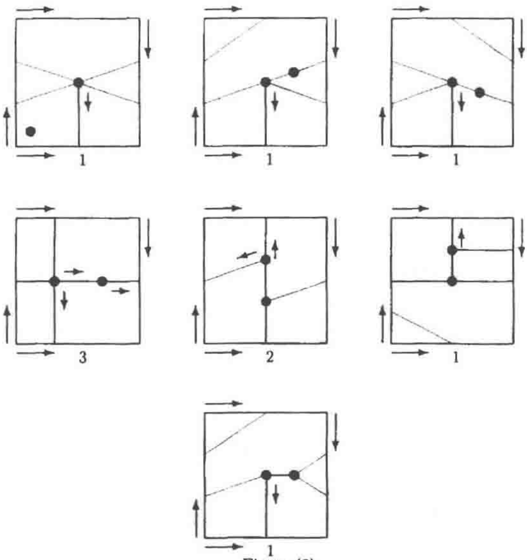


Figure (6)

41 essential maps on the Klein bottle with 3 edges

第31卷第6期 北京交通大学学报 Vol.31 No.6
2007年12月 JOURNAL OF BEIJING JIAOTONG UNIVERSITY Dec. 2007

文章编号:1673-0291(2007)06-0058-03

两类重复边合并图的亏格

邵泽玲,刘彦佩
(北京交通大学 理学院,北京 100044)

摘 要:把图 G 的某条边和图 H 的某条边合并在一起构成的图,记作 $G *_e H$,在刘彦佩提出联树的基础上,通过把关联曲面逐层分段,得到了 n 个 $K_5(K_{3,3})$ 的边合并图 $K_5 *_e K_5 *_e \cdots *_e K_5(K_{3,3} *_e K_{3,3} *_e \cdots *_e K_{3,3})$ 的亏格为 $\lceil n/2 \rceil$.

关键词:曲面;联树;亏格;合并
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

Genera of Repeated Edge Amalgamation for Two Types of Graphs

SHAO Ze-ling, LIU Yan-pei
(School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: If G and H are graphs, then $G *_e H$ is defined to be a graph obtained by identifying some given edge of G with some given edge of H. In this paper, on the basis of joint trees introduced by Yanpei Liu and by dividing the associated surfaces into segments layer by layer, we show that the genus of $K_5 *_e K_5 *_e \cdots *_e K_5$ is $\lceil n/2 \rceil$, where n is the number of K_5. And so is $K_{3,3} *_e K_{3,3} *_e \cdots *_e K_{3,3}$.

Key words: surface; joint tree; genus; amalgamation

本文所考虑的图皆为连通的,曲面是无边缘的2-维紧流形,嵌入是图在曲面上的可定向胞腔嵌入.图 G 的亏格 $\gamma(G)$ 是指 G 所能可定向嵌入曲面的最小亏格.确定图的亏格是拓扑图论的基本问题,已被 Thomassen[1] 证明是 NP-完备的,然而对一些特殊图类,如 n-方体[2],完全图[3],完全二部图[4]等的亏格公式已有结果.Battle 等[5]也证明了任意图的亏格都等于它的每个块的亏格之和.Alpert[6-7]对某些特殊图类的合并得到了一些结果.在2003年,刘彦佩[8]提出了图的联树,建立了图的联树与嵌入的对应关系,为求图的亏格提出了更有效的工具.本文作者在联树的基础上,通过把关联曲面逐层分段,得到了 n 个 $K_5(K_{3,3})$ 的边合并图的亏格为 $\lceil n/2 \rceil$.

1 预备知识

令 $G=(V,E)$ 为图,u 是 G 的一个顶点,u 处的一个旋 σ_u 是与 u 关联的所有半边的一个循环置换,图 G 的一个旋 $\sigma_G=\{\sigma_u \mid \forall u \in V\}$.设 T 是 G 的一个支撑树,把不在 T 上的每条边(余树边)从中间劈分为两条半边,同时每边标注相同的字母,且带有指标:+(通常略之不计)或 -,从而构成一个联树[8],用 $\tilde{T}$ 表示.在一个联树 $\tilde{T}$ 上,由它的平面嵌入无限面边界和所有余树半边带指标数形成的循环序就是一个曲面,称为此联树的关联曲面[9].

引理1[9] 一个曲面的亏格为0,当且仅当,不存在 x 和 y 使在这个曲面中的次序为 $xyxy$,且 x, y 的两个指标都不相同.一个可定向曲面 $AxByDx^-Dy^-E$ 的亏格为 $k(k \geq 1)$.当且仅当,曲面 $ADCBE$ 是可定向的,并且亏格为 $k-1$.

由曲面的层分割,与同一个顶点关联的半边构成一个层段,关联曲面可被逐层分段.则调位是定义在层分割上交换同一层段内元素位置的一种运算.

收稿日期:2007-01-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60373030;10571031)
作者简介:邵泽玲(1977—),女,山东临沂人,博士生.email:zelingshao@tom.com
刘彦佩(1939—),男,天津市人,教授,博士生导师.