

线性系统及其控制

张 琼 著



科学出版社

线性系统及其控制

张 琼 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要介绍线性系统的控制理论,包括系统的稳定性、能控性、能观性、能稳性、能检测性、最优控制等基本概念与相关理论,也简要讨论了非线性系统的稳定性以及一些无限维系统的衰减性质。旨在使读者全面了解控制理论的整体状况,为推动后续的学习和研究起到抛砖引玉的作用。

本书可以作为控制理论研究者的参考书,以及具有初步泛函分析、微分方程基础的高年级本科生或研究生的教科书。

图书在版编目(CIP)数据

线性系统及其控制/张琼著. —北京:科学出版社, 2017.3

ISBN 978-7-03-052326-6

I. ①线… II. ①张… III. ①线性系统 IV. ①O231.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 052775 号

责任编辑:赵艳春/责任校对:桂伟利

责任印制:张倩/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2017 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2017 年 3 月第一次印刷 印张: 9 1/2

字数: 160 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

控制论是诺伯特·维纳等在 20 世纪 40 年代创立的, 现在已发展为具有广泛应用背景和深刻理论内涵的学科. 本书主要以有限维线性系统为分析对象, 介绍控制理论的一些基本概念和问题. 此外也穿插一些非线性系统和无限维系统的控制问题. 从而帮助读者深刻理解系统的控制问题以及解决问题的思想方法.

本书第 1 章介绍了控制系统的状态空间描述, 引入传递函数、脉冲响应函数等概念, 并简要讨论了系统的实现理论. 第 2 章主要分析自由系统的稳定性, 主要工具包括谱理论、李雅普诺夫方程等, 此外, 还简要介绍了非线性系统的稳定性. 第 3 章介绍系统的能控性, 重点在于能控子空间、PBH 定理以及格莱姆矩阵. 第 4 章的主要内容是状态反馈能稳性、极点配置, 以及静态输出反馈能稳性的频域分析. 第 5 章介绍能观性和能检测性, 由于对偶原理的应用, 系统的能观、能检测性可由对偶系统的能控、能稳性质得到, 并基于系统的能稳、能检测性质建立了动态输出反馈控制. 第 6 章是关于线性系统的二次最优控制问题. 这一章的方法和思路可直接推广至无限维系统的二次最优控制问题. 第 7 章简要介绍动态规划和极大值原理, 并讨论它们与二次最优控制问题之间的关系. 第 8 章分析无限维系统的稳定性问题, 讨论具有不同类型扰动的波方程的稳定性和衰减性质.

本书并没有概括控制理论的全貌, 有兴趣的读者可以阅读所附的参考文献. 本书的出版获得北京理工大学数学与统计学院的资助. 作者感谢四川大学张旭教授的有益建议.

由于作者水平所限, 书中难免有不当之处, 恳请读者批评指正.

作 者

2016 年 12 月

符号说明表

$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$\mathbf{C}^+, \mathbf{C}^-$	开右半复平面, 开左半复平面
$\overline{\mathbf{C}^+}, \overline{\mathbf{C}^-}$	闭右半复平面, 闭左半复平面
$\mathbf{R}^n$	n 维实向量空间
$\mathbf{R}^{n \times m}$	$n \times m$ 阶实矩阵
Re, Im	复数的实部, 虚部
$\times$	直和
$\ \cdot\ $	范数
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	内积
$ A $	矩阵 A 的行列式
$Ran(A), D(A)$	A 的值域, 定义域
$\sigma(A)$	A 的谱
$\rho(A)$	A 的预解集, $\mathbf{C} \setminus \sigma(A)$
$\omega_s(A)$	A 的谱界
e^{tA}	矩阵指数
$\omega_g(A)$	矩阵指数 e^{At} 的增长阶
$\mathcal{X}_c$	能控子空间
$W_{A,B}$	$\Sigma(A, B, -)$ 的能控矩阵
$O_{A,C}$	$\Sigma(A, -, C)$ 的能观矩阵
$L^2(a, b)$	(a, b) 上的平方可积函数空间
$L^2([a, b], X)$	$[a, b]$ 到 X 上的平方可积空间
$H^m(a, b)$	(a, b) 上 m 阶的索伯列夫空间
$\mathcal{U}_{t_0, t_e}$	$[t_0, t_e]$ 上的允许控制集合
$J_{t_0, t_e}(z_0, u)$	$[t_0, t_e]$ 上初始状态为 z_0 、控制为 u 的价值函数

目 录

前言	
符号说明表	
第 1 章 系统的描述	1
1.1 系统的状态空间描述	1
1.1.1 状态空间描述	1
1.1.2 自由系统	5
1.1.3 输入输出映射	6
1.2 系统的传递函数	8
1.2.1 传递函数的定义	8
1.2.2 串联、并联与反馈	11
1.3 系统的实现	13
1.3.1 脉冲响应函数	13
1.3.2 传递函数的特性	16
第 2 章 系统的稳定性	19
2.1 线性系统的稳定性	19
2.1.1 稳定性的定义	19
2.1.2 谱界	20
2.2 稳定性的频域分析	26
2.2.1 多项式的稳定性	26
2.2.2 劳斯定理	29
2.3 稳定性与李雅普诺夫方程	33
2.3.1 耗散矩阵	33
2.3.2 李雅普诺夫方程	33
2.4 非线性系统的稳定性	37
2.4.1 非线性系统稳定性的定义	37
2.4.2 李雅普诺夫定理	41
第 3 章 线性系统的能控性	48
3.1 能控性	48
3.1.1 能控性的定义	48
3.1.2 能控矩阵、能控子空间	50

3.1.3 单输入系统的能控	53
3.2 能控性的 PBH 定理	57
3.2.1 卡尔曼分解	57
3.2.2 能控性的 PBH 定理	58
3.3 能控性、格莱姆矩阵和稳定性	61
3.3.1 能控性与格莱姆矩阵	61
3.3.2 能控性与稳定性	63
第 4 章 线性系统的能稳性	65
4.1 状态反馈与能稳性	65
4.1.1 状态反馈	65
4.1.2 能稳性的 PBH 定理	67
4.2 极点配置	70
4.2.1 单输入系统的极点配置	70
4.2.2 多输入系统的极点配置	71
4.3 能稳性的频域分析	74
4.3.1 静态输出反馈	74
4.3.2 频域分析	75
第 5 章 线性系统的能观性与能检测性	77
5.1 能观性	77
5.1.1 能观性的定义	77
5.1.2 对偶原理	78
5.1.3 能观性与李雅普诺夫方程	81
5.2 能检测性	83
5.3 输出反馈控制	86
5.3.1 输出反馈	86
5.3.2 动态输出反馈	87
第 6 章 线性二次最优控制	92
6.1 问题的提出	92
6.2 有限时间区间上的二次最优控制	93
6.2.1 最优控制	93
6.2.2 黎卡提方程	98
6.3 伴随系统	102
6.3.1 最优输出反馈控制	102
6.3.2 伴随系统	105
6.4 无限区间上的最优控制	106

第 7 章 极大值原理与动态规划	109
7.1 极大值原理	109
7.1.1 问题的提出	109
7.1.2 极大值原理	112
7.1.3 极大值原理与二次最优控制	119
7.2 动态规划	120
7.2.1 问题的提出	120
7.2.2 动态规划与二次最优控制	123
第 8 章 无限维系统的稳定性	125
8.1 预备知识	125
8.2 无限维系统稳定性的定义	128
8.2.1 稳定性的定义、频域条件	128
8.2.2 稳定性的时域分析	129
8.3 波方程的稳定性	132
8.3.1 指数稳定性	132
8.3.2 多项式稳定性	135
参考文献	138

第 1 章 系统的描述

1.1 系统的状态空间描述

1.1.1 状态空间描述

系统是由一些相互联系的环节或元件构成的整体. 为了定量地分析系统的动态特性, 需要建立受控对象的数学模型, 以描述系统内部变量与外部作用之间的关系. 动态系统是随着时间的变化而变化的, 每个动态系统都有其相应的时域, 时域可能是连续的, 也可能是离散的. 描述系统的动态的变量是定义在时域上的函数. 一般来说, 一个控制系统中的变量可以分为三类. 第一类是外部环境对系统的作用, 称为输入变量, 包括环境变化对系统造成的影响和扰动, 以及人们为了达到目标对系统施加的影响. 输入变量有时也称为控制变量. 第二类是系统对外部世界的作用, 称为输出变量, 又称为观测变量. 输入变量和输出变量是系统的外部变量. 第三类是描述系统内部动态的(最少的独立)变量, 称为状态变量. 它未必是物理量, 有时也可以直接量测.

本节主要讨论有限维连续时间系统的状态空间模型. 设系统的状态变量为 $z(t) : [0, \infty) \rightarrow Z \subset \mathbf{R}^n$, 输入变量为 $u(t) : [0, \infty) \rightarrow U \subset \mathbf{R}^m$, 输出变量为 $y(t) : [0, \infty) \rightarrow Y \subset \mathbf{R}^r$, 其中 n, m, r 是自然数. 分别称 Z, U, Y 为状态空间、输入空间(控制空间)和输出空间(观测空间). 以下方程描述了受控对象的动态过程:

$$\frac{d}{dt}z(t) = f(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0 \quad (1.1.1)$$

$$y(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_e] \quad (1.1.2)$$

其中, $0 \leq t_0 \leq t_e \leq \infty$, $f : [t_0, t_e] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $g : [t_0, t_e] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^r$ 是给定的映射, $z_0 \in Z$ 是初始状态. 方程 (1.1.1) 描述了输入所引起的状态的变化, 称为系统的状态方程; 方程 (1.1.2) 表达系统的输出由输入和状态所决定的过程, 称为系统的输出方程或观测方程. 称状态空间的维数为系统的阶数或维数. 用状态方程和输出方程描述系统, 并在此基础上展开分析, 称为状态空间方法. 由于

系统 (1.1.1)~(1.1.2) 的状态和输出由初始状态和输入确定, 我们记系统的状态为 $z(\cdot) \doteq z(\cdot; t_0, z_0, u)$, 输出为 $y(\cdot) \doteq y(\cdot; t_0, z_0, u)$.

在系统 (1.1.1)~(1.1.2) 中, 若映射 f, g 是 z, u 的线性函数, 则称该系统是线性系统. 有限维线性系统的状态方程和输出方程为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), & z(t_0) = z_0 \\ y(t) = C(t)z(t) + D(t)u(t), & t \in [t_0, t_e] \end{cases} \quad (1.1.3)$$

其中, 矩阵 $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 描述了系统内部状态变量之间的联系, 取决于系统的动态、结构和各项参数, 称为状态矩阵, 矩阵 $B(t) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 描述了输入变量对系统的控制, 称为控制 (输入) 矩阵, 矩阵 $C(t) \in \mathbf{R}^{r \times n}$ 表示输出变量如何反映状态, 称为观测 (输出) 矩阵, 矩阵 $D(t) \in \mathbf{R}^{r \times m}$ 表示输入对输出的直接作用, 称为直接传递矩阵.

线性系统的重要特征之一是叠加原理. 以线性系统 (1.1.3) 为例, 当输入变量为 $u_1(\cdot)$ 和 $u_2(\cdot)$ 时, 系统的状态分别为 $z_1(\cdot) \doteq z(\cdot; t_0, z_0, u_1)$ 和 $z_2(\cdot) \doteq z(\cdot; t_0, z_0, u_2)$. 另一方面, 若输入变量为 $c_1u_1(\cdot) + c_2u_2(\cdot)$, 简单计算后得到, 系统的状态为 $z(\cdot) = c_1z_1(\cdot) + c_2z_2(\cdot)$. 因此, $z(\cdot; t_0, z_0, c_1u_1 + c_2u_2) = c_1z(\cdot; t_0, z_0, u_1) + c_2z(\cdot; t_0, z_0, u_2)$. 输出也有同样的性质. 这表明, 两个外作用同时加于系统所产生的输出综合, 等于各个外作用单独作用时分别产生的输出之和, 且外作用增大若干倍时, 其输出也增大同样的倍数. 因此, 在分析和设计线性系统时, 若有几个外作用同时作用于系统, 可以将它们分别处理, 每个外作用的数值也可以只取单位值, 最后依据叠加原理讨论总外作用的输出.

若系统 (1.1.3) 中 $A(t) \equiv A, B(t) \equiv B, C(t) \equiv C, D(t) \equiv D$, 则称该系统是有限维线性时不变系统 (有限维线性定常系统). 此外, 假设输入与输出之间无直接关系, 即 $D \equiv 0$, 则该系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = Az(t) + Bu(t), & z(t_0) = z_0 \\ y(t) = Cz(t), & t \in [t_0, t_e] \end{cases} \quad (1.1.4)$$

系统 (1.1.4) 又记为 $\Sigma(A, B, C)$. 若系统无输入或输出, 则可记为 $\Sigma(A, B, -)$ 或 $\Sigma(A, -, C)$, 在不引起混淆时, 我们也记为 $\Sigma(A, B)$ 或 $\Sigma(A, C)$.

例 1.1.1 弹簧-质量-阻尼器系统

弹簧-质量-阻尼器系统是由弹簧、阻尼器以及与它们连接的物体构成的(图 1.1)。这是一种常见的机械振动系统,譬如汽车缓冲器、建筑抗震中的阻尼器等。设 m 是物体的质量, b 是阻尼器的阻尼系数, k 是弹簧的弹性系数, 变量 $x(t)$ 表示物体相对于平衡位置的位移, $u(t)$ 表示物体所受的外力, 是系统的输入。由牛顿第二定律, 系统的动力学模型为

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = u(t) \quad (1.1.5)$$

设系统的输出 $y(t)$ 是物体的位移。令 $z = (z_1, z_2)^\top \doteq \left(x, \frac{d}{dt} x \right)^\top$, 系统 (1.1.5) 的状态空间表示为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z &= Az + Bu \\ &\doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= Cz \doteq [1 \quad 0] z \end{cases} \quad (1.1.6)$$

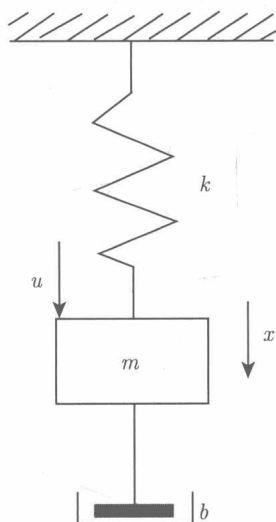


图 1.1 弹簧-质量-阻尼器系统

例 1.1.2 单摆系统

长为 L 的细线一端固定, 另一端系有一个质量为 m 的小球, 小球自然悬垂时的位置为平衡位置 (图 1.2). 设变量 $x(t)$ 是小球相对于平衡位置的角度位移. 则 $x(t)$ 满足方程

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{g}{L}\sin x(t) = 0 \quad (1.1.7)$$

其中, g 是重力加速度. 设系统的输出 $y(t)$ 是小球的角度位移. 令 $z(t) = (z_1, z_2)^T \doteq \left(x, \frac{d}{dt}x\right)^T$, 则得到系统的状态空间表示为

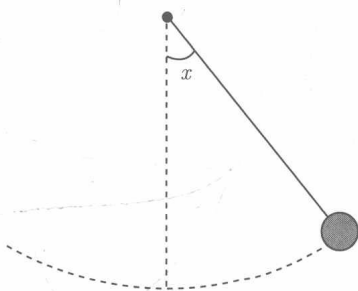


图 1.2 单摆系统

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z = f(z) \doteq \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{L}\sin z_1 \end{bmatrix} \\ y = g(z) = z_1 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

若小球受到一个与角速度成正比的外力的作用, 即存在常数 c 使得系统的控制变量为

$$u(t) = c \frac{d}{dt}x(t) \quad (1.1.9)$$

将其代入方程 (1.1.7) 得到

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + c \frac{d}{dt}x(t) + \frac{g}{L}\sin x(t) = 0 \quad (1.1.10)$$

相应的状态空间表示为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{L}\sin z_1 - cz_2 \end{bmatrix} \\ y = g(z) = z_1 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

例 1.1.3 单输入单输出系统

若系统的输入变量或输出变量是标量值函数, 即 $u(\cdot) \in \mathbf{R}$ 或 $y(\cdot) \in \mathbf{R}$, 称该系统为单输入系统或单输出系统. 譬如以下即是一个单输入、单输出系统.

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt}y(t) + a_n y(t) = u(t) \quad (1.1.12)$$

其中, 常数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$. 定义

$$z(t) = \left(y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t), \quad \cdots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) \right)^\top$$

则系统 (1.1.12) 的状态空间表达式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}z(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz \doteq [1 \ 0 \ \cdots \ 0]z(t) \end{array} \right. \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.1.13)$$

注意到系统 (1.1.13) 的状态矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \quad (1.1.14)$$

1.1.2 自由系统

若系统 (1.1.4) 无输入和输出, 即 $u(\cdot) = y(\cdot) = 0$, 则称相应的系统为自由系统, 即

$$\frac{d}{dt}z(t) = Az(t), \quad z(t_0) = z_0 \in \mathbf{R}^n, \quad t \in [t_0, t_e] \quad (1.1.15)$$

由于 A 是 n 阶矩阵, 系统 (1.1.15) 是一个常微分方程组. 特别地, 若 $A = a$ 是一个实数, 则方程的解是指数函数 e^{at} , 则将其展开为无穷级数:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(at)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a^k \quad (1.1.16)$$

另一方面, 容易证明无穷级数 (1.1.16) 在任意的有限时间区间内是一致收敛的, 满足方程 $\frac{d}{dt}z(t) = az(t)$, $z(t_0) = z_0$ 且是其唯一解. 以此为启发, 我们引入矩阵指数的定义.

定义 1.1.1 A 是 n 阶实矩阵, $t \in \mathbf{R}$. 定义矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad (1.1.17)$$

并称

$$\omega_g(A) \doteq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t}$$

为矩阵指数 e^{At} 的增长阶.

设 β 是任意有限的正实数, 对于 $t \in [-\beta, \beta]$, 有

$$\left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| = \frac{|t|^k}{k!} \|A^k\| \leq \frac{\beta^k}{k!} \|A\|^k \doteq M_k$$

容易验证, 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ 收敛. 因此, 级数 (1.1.17) 一致绝对收敛, 且有

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^{k+1} + \cdots = Ae^{At}$$

因此, e^{At} 是微分方程 $\dot{z} = Az$ 的 (唯一) 矩阵解. 综上所述, 我们得到关于自由系统 (1.1.15) 的一个基本结论.

定理 1.1.1 令 $z_0 \in \mathbf{R}^n$. 对任意的 $t \in [t_0, t_e]$, 问题 (1.1.15) 的唯一解为 $e^{A(t-t_0)}z_0$.

此外, 容易证明, 矩阵指数有以下性质.

定理 1.1.2 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. 则矩阵指数 e^{At} 满足:

- (i) 若 $AB = BA$, 则对任意 $t \in \mathbf{R}$, 有 $e^{t(A+B)} = e^{At}e^{tB}$.
- (ii) 对任意 $t \in \mathbf{R}$, e^{At} 可逆, 且 $(e^{At})^{-1} = e^{-tA}$.
- (iii) 若 S 可逆, 则对任意 $t \in \mathbf{R}$, $S^{-1}e^{At}S = e^{t(S^{-1}AS)}$.

1.1.3 输入输出映射

由定理 1.1.1, 自由系统 (1.1.15) 的解可由矩阵指数表示. 因此, 若初始条件 z_0 和控制 $u(t)$ 给定, 系统 (1.1.4) 的状态 $z(t)$ 和输出 $y(t)$ 分别为

$$z(t) = e^{A(t-t_0)}z_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (1.1.18)$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}z_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (1.1.19)$$

定义 1.1.2 设矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{r \times n}$. 对任意的 $t \in [t_0, t_e]$, 系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的脉冲响应函数定义为

$$\mathcal{G}(t) = Ce^{At}B$$

此外, 定义系统的输入输出映射为 $\Psi: L^2([t_0, t_e]; \mathbf{R}^m) \rightarrow L^2([t_0, t_e]; \mathbf{R}^r)$, 且

$$(\Psi u)(t) = \int_{t_0}^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

脉冲响应函数与输入输出映射描述了系统的输入和输出之间的关系. 事实上, 从式 (1.1.19) 可得, 若 $t_0 = 0$,

$$y(t) = Ce^{At}z_0 + (\Psi u)(t) = Ce^{At}z_0 + (\mathcal{G} * u)(t) \quad (1.1.20)$$

例 1.1.4 考虑弹簧-质量-阻尼器系统 (例 1.1.1). 由于该系统是单输入、单输出的, 因此其脉冲响应函数是标量值函数. 设 $m = 1$, 系统的状态矩阵、输入矩阵、输出矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的特征值是 $s_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4k})$, 相应的特征向量为 $z_1 = (1, s_1)^T$, $z_2 = (1, s_2)^T$. 向量组 $\{z_1, z_2\}$ 构成 $\mathbf{R}^2$ 中的一组基, 且

$$\tilde{A} \doteq P^{-1}AP = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } P = [z_1 \quad z_2]$$

和

$$B = [z_1 \quad z_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4k}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.1.21)$$

因此, 系统的脉冲响应函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= C e^{At} B = C P e^{\tilde{A}t} P^{-1} B \\ &= C P e^{\tilde{A}t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{s_1 t} \\ c_2 e^{s_2 t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4k}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \end{aligned}$$

1.2 系统的传递函数

1.2.1 传递函数的定义

上一节讨论了系统在时域上的模型, 本节引入系统在频域上的表示. 首先回顾函数的拉普拉斯变换的定义. 设在 $[0, \infty)$ 上定义的函数 $f(\cdot)$ 是指有界的, 即存在常数 δ 和正常数 M , 使得

$$\|f(t)\| \leq M e^{\delta t}, \quad \forall t \geq 0$$

则对于满足 $\operatorname{Re} s > \delta$ 的复数 s , $f(\cdot)$ 的拉普拉斯变换定义为

$$\hat{f}(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

拉普拉斯变换是线性映射, 当 $\operatorname{Re} s > \delta$ 时, $\hat{f}(s)$ 是解析函数. 此外, 拉普拉斯变换具有以下微分性质:

$$\left(\mathcal{L} \frac{d}{dt} f \right)(s) = s \hat{f}(s) - f(0)$$

考虑 $[0, \infty)$ 上的系统 (1.1.4), 对两个方程分别做拉普拉斯变换, 我们得到

$$s \hat{z}(s) = A \hat{z}(s) + B \hat{u}(s) + z_0$$

$$\hat{y}(s) = C \hat{z}(s)$$

因此,

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}z_0 + C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)$$

定义函数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 为系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的传递函数. 显然传递函数 $G(s)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ 上是解析的. 若系统的初值 $z_0 = 0$, 则输入的拉普拉斯变换和输出的拉普拉斯变换之间的关系由传递函数描述:

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$$

此外, 传递函数 $G(s)$ 是脉冲响应函数 $g(t)$ 的拉普拉斯变换, 即

$$G(s) = (\mathcal{L}g)(s), \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \quad (1.2.1)$$

设 n, m, r 是任意自然数, $M_0, \dots, M_n \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $M_0 \neq 0$. 则以下矩阵值函数

$$M(s) = M_0 s^n + s^{n-1}M_1 + \dots + M_n, \quad s \in \mathbb{C}$$

称为 n 次矩阵多项式, 并记该矩阵多项式的次数为 $\deg M = n$. 设 $G(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ 是复数域上的矩阵值函数, 若存在 $M(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ 以及标量值函数 $p(s)$, 使得 $G(s) = \frac{M(s)}{p(s)}$ 且 $\deg M \leq \deg p$, 则称 $G(s)$ 是真有理函数, 进一步地, 若 $\deg M < \deg p$, 则称 $G(s)$ 是严格真有理函数.

考虑系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的传递函数 $G(s)$. 设 $\text{adj}(sI - A)$ 是 $sI - A$ 的伴随矩阵, 则

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{C \text{adj}(sI - A) B}{|sI - A|}$$

由于矩阵多项式 $\text{adj}(sI - A)$ 的次数 $\deg \text{adj}(sI - A) < \deg |sI - A|$. 因此 $C(sI - A)^{-1}B$ 是严格的真有理函数.

定理 1.2.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $G(s)$ 是系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的传递函数. 若存在自然数 $k \geq 2$ 使得

$$\begin{aligned} CA^j B &= 0, \quad \text{其中 } j = 0, 1, \dots, k-2 \\ CA^{k-1} B &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$